206, 4

Library of the Museum

OF

COMPARATIVE ZOÖLOGY,

AT HARVARD COLLEGE, CAMBRIDGE, MASS.

Founded by private subscription, in 1861.

L. de Koninck's Library

and The gift of LOUIS AGASSIZ.

No. 182.

Dec. 1870. Bd May 18. 1881.

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

DE MADRID.

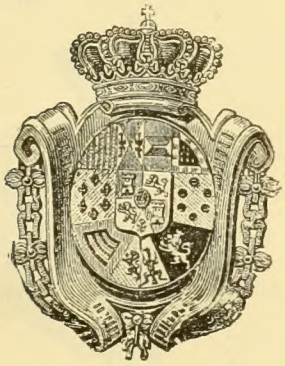
ZNA

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS.

TOMO II.



MADRID.

POR AGUADO, IMPRESOR DE CÁMARA DE S. M. Y DE SU REAL CASA.

—

1853.

Publicado por acuerdo de la Academia.

El Secretario perpétuo,

M. Lorente.

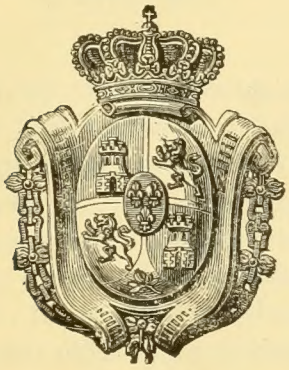
MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

DE MADRID.

1.ª SERIE. — CIENCIAS EXACTAS. — TOMO I. — 1.ª PARTE.



MADRID:

POR AGUADO, IMPRESOR DE CÁMARA DE S. M. Y DE SU REAL CASA.

—

1853.

NOTAS.

1.ª La Academia no adopta ni rehusa las opiniones de sus individuos: cada autor es responsable de lo que contengan sus escritos.

2.ª Los Discursos de recepcion de Académicos se incluirán entre las Memorias de la Academia, imprimiéndose en la primera publicacion que aparezca despues de aquel acto. En su consecuencia, se colocan á la cabeza de esta primera parte del tomo 1.º de ciencias exactas los Discursos leidos en las sesiones públicas que con ese objeto se celebraron en 22 de junio de 1851 y 27 de igual mes de 1852.

DISCURSO

SOBRE

LA IMPORTANCIA FILOSÓFICA DE LA QUÍMICA

CONSIDERADA

en su historia y en sus relaciones con otras que, como ella, tienen por objeto el estudio de la naturaleza.

LEIDO POR EL SEÑOR D. MANUEL RIOZ Y PEDRAJA

en la sesion pública de su recepcion como Académico numerario, celebrada el dia 22 de junio de 1851.

Señores:

Al cumplir en este dia, tan solemne para mí, con un deber consignado en los estatutos de esta Real Academia; al dirigir mi voz por primera vez á tan respetable Corporacion, consagrada al estudio y progresos de las Ciencias exactas, físicas y naturales, he juzgado oportuno presentar algunas breves consideraciones sobre la importancia filosófica de la ciencia á que estoy dedicado, considerada en su historia y en sus relaciones con otras que, como ella, tienen por objeto el estudio de la naturaleza. Cuadro magnífico, Señores, objeto digno de toda vuestra atencion si yo pudiera desenvolverle con aquellos rasgos de sublime elocuencia que le corresponden, pero que perderá sin duda todo el brillo, y una gran parte de su interés científico y literario, por la insuficiencia del individuo encargado de trazarle en este momento.

La Química, Señores, ciencia la mas esperimental de todas por la índole misma de su objeto, la mas popular tambien por lo útil y estenso de sus aplicaciones, es á la vez una de las partes mas importantes de la filosofía natural, y ha contribuido mas que otra alguna al desarrollo y progreso de todas las demás.

En la historia de las Ciencias, en esta parte la mas positiva de la filosofía, que nos descubre mejor que todos los razonamientos las leyes del desarrollo y progresos del entendimiento humano, la Química representa un papel de los mas interesantes, por la antigüedad de su origen y manera de constituirse; por la influencia que sobre ella ejercieron las ideas filosóficas dominantes en las diferentes épocas; y sobre todo por ese caracter esperimental que formó siempre su espíritu, y con el cual ha contribuido no poco á la rectificacion de la larga serie de errores que la filosofía natural viene apurando desde sus primeros ensayos hasta la época presente.

La Química toma origen en la práctica de las artes de los primitivos tiempos históricos; y en su primera época, que comprende toda la antigüedad hasta la edad media, la ciencia acumula una larga serie de hechos y fenómenos bien observados, con el arte de coordinarlos y reproducirlos en beneficio de las industrias perfeccionadas de aquellos remotos tiempos; y la filosofía contemporánea nos ofrece ya en algunos períodos de aquella época varias teorías generales, algunas evidentemente erróneas, pero otras que han sido sancionadas por la esperiencia de la posteridad, causando hoy nuestra admiracion por su sencillez y exactitud.

La ciencia se ha constituido ya; ha fijado en esta primera época el caracter de su lógica; ha descubierto el secreto de su método.

El arte esperimental ha producido los fenómenos; y la inteligencia, libre entonces de toda supersticion y de toda preocupacion sistemática, creó esas brillantes teorías, que aunque han llegado hasta nosotros desnudas de pruebas científicas, no pueden ser sino el resultado de un examen

profundo y progresivo de los hechos químicos á medida que fueron presentándose á la observacion.

En su segunda época la Química sufre la poderosa influencia de la autoridad espiritual y de las doctrinas tradicionales, que constituyeron el espíritu filosófico de la edad media.

Ninguna ciencia reviste con mas exajeracion las formas que caracterizan los diversos períodos de esta época memorable, porque ninguna hay tampoco, entre las que tienen por objeto esplicar los fenómenos de la naturaleza, que pueda producir hechos mas maravillosos, y tan á propósito para escitar la imaginacion.

Desnaturalizado el espíritu de observacion por el influjo de las ideas dominantes, se apoderó de la ciencia la especulacion mística y sobrenatural, y tomaron asi origen las fantásticas doctrinas del arte sagrada y de la alquimia.

Los alquimistas son propiamente los químicos de la edad media, y si á primera vista nos parece esta época completamente esteril para la ciencia, como la consideramos hoy, y aun digna de figurar en los anales de las estravagancias y locuras humanas, examinándola bajo otro aspecto y en sus diferentes períodos, se descubre en ella un fenómeno filosófico de la mas alta trascendencia.

Al través de las teorías estravagantes de los alquimistas, disculpables en una época en que los fenómenos físicos mas sencillos se suponian producidos por causas ocultas ó agentes misteriosos y sobrenaturales, se descubre en aquellos hombres notables una completa aficion al arte esperimental, una paciencia sin límites para repetir y continuar los mas penosos esperimentos, y una tendencia constante á sacudir el yugo de las doctrinas tradicionales, oponiendo la esperiencia á las teorías especulativas.

Los químicos de la edad media, á pesar de la influencia de la época, conservaron siempre respeto al espíritu práctico de la ciencia, no perdieron su fe en los resultados de la observacion y de la esperiencia, y contribuyeron de este modo muy poderosamente á la célebre reforma de los conocimientos humanos, preparada ya en el siglo XVI y desarrollada en los siguientes con tanta ventaja para los progresos de toda la filosofía.

Era de esperar que una ciencia que tanto habia contribuido á restablecer la autoridad de la esperiencia y de la razon en el dominio de todas las demás, no fuese la última á reconstituirse sobre las nuevas bases, sobre sus principios naturales, sobre su antiguo método.

La Química toma en efecto una parte muy activa en el movimiento general, en el desarrollo estraordinario que adquieren todas las ciencias en esta tercera época, única en los anales de la humanidad.

Comunicando una nueva direccion á sus investigaciones entra de lleno en el camino de la esperiencia, examina y compara sus resultados, y oponiendo entonces la razon á las tradiciones, la esperiencia á la especulacion, recobra sus formas severas, adquiere en poco tiempo proporciones gigantescas y se eleva á la altura de una gran ciencia, destinada por su objeto y por su espíritu á ejercer la mas alta influencia en la moderna civilizacion.

Pero todavía en alguno de los períodos de esta marcha rápida y magestuosa de la Química durante los tres siglos que precedieron al nuestro, se nos presenta otro fenómeno muy digno de fijar la atencion del filósofo, y que debe servirle de leccion severa para lo sucesivo.

El método esperimental estaba ya universalmente reconocido como el único capaz de conducir las ciencias físicas á su perfeccion y engrandecimiento; y sin embargo, bajo la influencia de este mismo método apareció en el siglo anterior una teoría química, producto de investigaciones erróneas, pero que apoyada en esperimentos plausibles, en miras ingeniosas y hasta en grandes reputaciones, llegó á dominar completamente la ciencia.

¡Tan cierto es que el método esperimental, sin las sábias restricciones que aconseja una sana filosofía, puede producir resultados tan funestos para las ciencias como los que ocasionaron en otro tiempo las miras puramente especulativas!

Pero el método de los químicos se iba perfeccionando mas cada dia, y la célebre teoría del *flogisto*, con elementos para una dominacion prolongada en otra ciencia menos práctica que la Química, sucumbió en el mismo siglo de su nacimiento al rigor inflexible de los memorables esperimentos de Lavoisier.

Desde esta época notable principia el período mas importante para la ciencia; el de la Química actual.

Por un principio de orgullo inherente á la condicion humana, estamos siempre dispuestos á juzgar favorablemente nuestra época; sin embargo, aun teniendo presentes todas las restricciones á que debe dar lugar esta consideracion, puede desde luego afirmarse que los progresos de la Química en el siglo actual importan mas en la ciencia mirada bajo todos conceptos, que los trabajos de todos los siglos anteriores desde la antigüedad mas remota.

No es mi ánimo trazar el interesante cuadro de estos rápidos progresos, que constituirian por sí solos abundante y escojida materia para un estenso discurso: cumple solo á mi objeto examinar muy brevemente su espíritu filosófico.

La Química actual no ha creado ningun método desconocido de las generaciones anteriores, pero ha perfeccionado el método esperimental de los antiguos, hasta el punto de haber llegado á hacerse una ciencia exacta, una ciencia de números, de pesos y de medidas.

Ha reunido en muy pocos años inmensos materiales para la construccion de su edificio científico; y la ciencia actual puede ofrecer ya á la alta filosofía un sistema completo, digno por todas sus circunstancias de figurar al lado de las concepciones mas exactas y sublimes de nuestra inteligencia.

El descubrimiento de los sesenta y dos elementos que hoy admite la ciencia; el examen analítico y sintético de todas sus combinaciones inorgánicas; el establecimiento de las tres grandes leyes sobre las proporciones químicas, deducidas de aquel estudio por el método rigorosamente esperimental, constituyen las bases fundamentales de este gran sistema.

La teoría atomística con sus principios sobre la constitucion física de los cuerpos, con sus deducciones sobre la causa de las proporciones químicas, con sus hipótesis, en fin, sobre la forma, volumen y peso relativo de los átomos, constituye la parte especulativa del mismo sistema.

Si fuese lícito admitir que el hombre en sus investigaciones cien-

tíficas habia resuelto ya el dificilísimo problema del verdadero equilibrio entre la esperiencia y la razon, el sistema filosófico de la Química contemporánea podria presentarse como el ejemplo mas perfecto de este equilibrio.

En sus principios fundamentales no cabe mayor solidez. La esperiencia pura, sin el mas mínimo grado de induccion, ha servido de base á los inmensos trabajos, á los innumerables fenómenos que se agrupan al rededor de este sistema; y la hipótesis establecida para remontarse á sus causas primitivas se encuentra tan en armonía con los hechos, tan rigorosamente ajustada á todas las analogías, que no es posible dejar de considerarla como la verdadera razon de estos fenómenos, como la espresion mas exacta de las leyes que rijen en ellos.

Tal es, señores, la importancia filosófica de la Química considerada del modo mas abstracto, y en todas las grandes épocas que constituyen su interesante y vastísima historia.

Si, descendiendo un poco de este punto de vista elevado, fijamos por un momento nuestra consideracion en las grandes relaciones que esta ciencia tiene con todas las naturales; si observamos de paso la favorable influencia que está ejerciendo sobre su desarrollo y progresos, hallaremos sin duda numerosos rasgos con que estender este importante cuadro hasta las mayores dimensiones que le corresponden.

La Química, al investigar los fenómenos naturales debidos á las afinidades, al estudiar con su rigoroso método los cambios de composicion que sufre la materia de que están constituidos todos los cuerpos, ha prestado á las ciencias naturales los mas importantes servicios, comunicando á unas las mejores bases para sus métodos, suministrando á otras principios exactos para fundar su filosofía, é ilustrando por fin á todas en la importantísima investigacion de los numerosos fenómenos compuestos, producidos por la contínua lucha entre la atraccion química y demás agentes naturales.

La mineralogia ha cambiado enteramente de aspecto desde que tomó en consideracion la composicion de los minerales, y las relaciones que existen entre esta y sus caracteres esteriores. Basada en estos nuevos principios ha perfeccionado sus clasificaciones, ha estendido sus medios

de investigacion, y ha adquirido, por fin, el carácter de una ciencia importante y susceptible de aplicaciones muy generales.

La cristalografía ha recibido de la Química toda la parte sintética. Este bello ramo de los conocimientos modernos estaria todavía limitado á un número mas ó menos considerable de observaciones puramente analíticas, si la Química, con sus trabajos esperimentales sobre la cristalizacion artificial, con sus investigaciones sobre las relaciones que existen entre las formas y constitucion de los cuerpos, con sus teorías, en fin, acerca de la razon ó causa primaria de estas relaciones, no hubiese construido toda la parte filosófica de este interesante tratado, elevándole hasta la altura misma del sistema atomístico.

Desde que la geologia, abandonando el campo de la astronomía, estéril para sus investigaciones, ha formado su necesaria alianza con las Ciencias naturales; desde que esta parte sublime de nuestra filosofía, renunciando á sus vanas especulaciones *à priori*, se ha colocado en el número de las ciencias inductivas, y procura estudiar los fenómenos que se refieren á la constitucion del globo y á la historia de sus grandes revoluciones en la composicion actual é indicios que nos quedan de su antiguo estado, la Química se ha apresurado á comunicarla preciosos datos sobre las propiedades y composicion de las diversas especies de rocas; sobre el origen y modo de formacion de muchos minerales; sobre la influencia química de los agentes esteriores en la costra superficial de la tierra; prestándola por fin su gran teoría de las acciones lentas, por medio de la cual podrán calcularse un dia las épocas de algunas de las grandes catástrofes que han trastornado la superficie de nuestro planeta.

La física, en el estudio de esa multitud de fenómenos compuestos, que son resultado de la accion combinada de las afinidades y fuerzas físicas; en sus importantes descubrimientos sobre la influencia que ejercen en las propiedades de los cuerpos la atraccion molecular, el calor, la luz y la electricidad; en sus investigaciones sobre la relacion que existe entre estos diversos agentes, recurre contínuamente á los progresos de la química, que la ilustra en estas interesantes cuestiones con sus trabajos sobre la dependencia entre las afinidades y las fuerzas eléctricas, con sus leyes sobre el desarrollo é intensidad de estos agen-

tes, con sus hipótesis en fin sobre la causa primitiva de todos estos fenómenos.

Era natural que la química, despues de haber adquirido el conocimiento de las partes constituyentes del reino mineral, y estudiado las acciones recíprocas de las sustancias consideradas hoy como elementales, eligiese como objeto de sus nuevas investigaciones esa mayor actividad, ese poder químico mas elevado que despliegan ciertos principios puestos en accion en el reino orgánico bajo la influencia de la vida.

Del robusto tronco de la química inorgánica ha nacido una ciencia nueva y vigorosa destinada á influir en el estudio de los séres vivientes, tan favorablemente como hemos visto á la química mineral influir en las ciencias pertenecientes á su reino.

Hace treinta años no existia apenas relacion alguna entre la química y la historia natural de los séres orgánicos, porque hace treinta años podia decirse que no habia nacido la química orgánica. Hoy estas dos ciencias han celebrado ya su grande alianza, porque la química, en el poco tiempo que lleva de investigaciones en este terreno, ha demostrado que el sublime problema de las leyes de la vida no podrá nunca resolverse sin el conocimiento exacto de las fuerzas químicas, que se desarrollan donde quiera que hay contacto de materias hetereogéneas, y que por consiguiente no pueden dejar de manifestarse en el interior de los séres vivientes.

Fundada en esta gran consideracion, y con la exactitud propia de su método, la química orgánica planteó desde luego un gran número de problemas químico-fisiológicos, y de sus principios y esperiencias ha deducido ya las conclusiones mas importantes para la fisiologia y aun para la filosofía general.

Estudiando las materias orgánicas bajo el triple aspecto de su composicion, propiedades y relaciones con la organizacion, la química ha deducido el gran principio de que los fenómenos orgánicos proceden inmediatamente de un choque continuado, de un antagonismo perpétuo entre las afinidades y un nuevo agente que la vida ha introducido en los séres organizados; agente que no puede considerarse como propiedad esencial de la materia: por consiguiente, que las opiniones de los que

no ven en aquellos fenómenos otras causas que las fuerzas físicas y químicas, distan tanto de la verdad como los que los atribuyen esclusivamente á acciones particulares independientes de aquellas fuerzas.

Con su brillante teoría de las metamórfosis orgánicas, y sus trabajos esperimentales sobre la putrefaccion y demás fermentaciones, la química orgánica ha destruido el célebre principio llamado de las *generaciones equívocas ó espontáneas*, demostrando que la supuesta produccion de plantas y aun animales sin necesidad de semilla, por solo la descomposicion de rocas y putrefaccion de materias orgánicas, es un gravísimo absurdo nacido de investigaciones mal practicadas, por mas que naturalistas muy distinguidos se empeñen hoy todavía en sostener lo contrario.

Esta importantísima conclusion de la química ha derribado á su vez una atrevida hipótesis, que elevando aquel falso principio á regiones mas altas en la filosofía y apoyada en algunas nociones geológicas, ha querido referir el origen primitivo del reino orgánico á una generacion equívoca de vegetales y animales inferiores, y á su trasformacion sucesiva en las especies mas perfectas que hoy conocemos.

En su estudio sobre las condiciones químicas del desarrollo y vida de los séres organizados, ha resuelto la ciencia una serie numerosísima de cuestiones que han conducido á los mas interesantes resultados.

Hoy se conoce perfectamente la naturaleza y procedencia de los alimentos que sostienen la vida en uno y otro reino; se poseen datos muy exactos acerca de las funciones opuestas de las dos clases de séres en su accion química sobre la materia de estos alimentos; se ha investigado la influencia del calor, la luz y la electricidad como agentes auxiliares en estas funciones; se sabe el importante papel que juega la atmósfera como vínculo comun entre ambos reinos, facilitando la gran circulacion de la materia que por ellos se verifica; y se han fijado por fin las grandes leyes de equilibrio químico que rijen en esta circulacion, levantándose sobre ellas una nueva ciencia, de miras elevadas y de las mas útiles aplicaciones, la *Estática química de los séres organizados.*

Los innumerables trabajos esperimentales que ha agrupado la química orgánica al rededor de este importantísimo cuadro de sus descubri-

mientos, han suministrado á la fisiologia general y ciencias que de ella dependen principios mas sólidos, y datos muy exactos para la resolucion de sus principales cuestiones.

La fisiologia vegetal debe á estos trabajos el conocimiento de todos los fenómenos y circunstancias que concurren en la germinacion de las semillas; les debe igualmente todas sus nociones sobre el origen y modo de asimilacion de los elementos orgánicos por los vegetales; ha rectificado en virtud de estos datos sus erradas opiniones sobre la influencia del humus en la vegetacion; conoce mejor el verdadero caracter de los fenómenos que presentan estos séres fuera de la influencia de la luz; y ha recibido por fin las primeras bases para resolver un dia el problema elevado y dificil de la formacion y funciones de los principios inmediatos, y de los agentes químicos bajo cuya influencia se verifica la trasformacion de unos en otros.

La química orgánica, en este nuevo campo de investigaciones, ha abrazado el examen de todas las circunstancias que influyen y pueden modificar la composicion inmediata de los vegetales, adquiriendo por este medio preciosos datos, que están ilustrando ya la filosófica é interesante cuestion de las analogías botánicas y químicas.

La necesidad de ciertos compuestos inorgánicos para el desarrollo y nutricion de los vegetales, y la influencia puramente química que ejercen aquellos compuestos en la vida de estos séres, son descubrimientos de la ciencia que, unidos al estudio sobre la descomposicion espontánea de las rocas y putrefaccion de sustancias orgánicas, han suministrado á la agricultura los verdaderos principios que deben guiarla en la eleccion y preparacion de los suelos, en la aplicacion de los abonos asi minerales como orgánicos, y en el examen de las infinitas cuestiones que se enlazan con la gran teoría de la aclimatacion.

Por último, la fisiologia animal, que entregada á sus antiguos recursos hubiera tocado probablemente al límite de sus investigaciones sin resolver su problema mas esencial, ha adquirido con los descubrimientos y progresos de la química orgánica un nuevo campo, que le conducirá sin duda á la resolucion de aquel dificil problema, reuniendo al estudio de las formas y movimientos de la economía animal el de las

fuerzas químicas, tan íntimamente enlazadas con la causa primitiva de los fenómenos vitales.

La química orgánica ha presentado ya en este nuevo campo descubrimientos tan importantes á la fisiologia animal, que en muy pocos años ha cambiado completamente el aspecto, la marcha y hasta los principios de aquella ciencia.

Además de los hechos capitales consignados en su estática de los séres organizados, la química con sus investigaciones analíticas sobre los sólidos y líquidos de la economía, con su estudio estenso de la composicion y propiedades de las diferentes materias alimenticias, sus observaciones sobre la influencia del oxígeno en las funciones animales, y sus teorías en fin sobre las trasformaciones que la materia esperimenta en los órganos por la accion de infinitos agentes, ha comunicado á la fisiologia conocimientos exactos sobre el desarrollo del organismo animal, y nuevos principios para esplicar la naturaleza y verdadero caracter de sus mas importantes funciones.

En virtud de estos trabajos de la química orgánica posee hoy la fisiologia animal una verdadera clasificacion de los alimentos, con el conocimiento de su diferente objeto segun su composicion. Sabe las grandes analogías que existen entre el régimen alimenticio de los animales herbívoros y el de los carnívoros, y las relaciones por consiguiente y vínculos de dependencia que unen á estas dos clases de séres entre sí y con el reino vegetal. Conoce con exactitud todos los períodos que constituyen la funcion de la digestion, con los cambios que las materias alimenticias sufren en cada uno de ellos, y naturaleza de los agentes que ocasionan estos cambios. Ha podido apreciar bajo su verdadero punto de vista la influencia del oxígeno atmosférico en la vida animal, y rectificar en consecuencia varias de sus antiguas teorías sobre la importante funcion de la respiracion. Y finalmente, ha adquirido nociones mas exactas sobre el origen del calor animal, sus pérdidas y compensaciones, sus leyes, y cuanto puede conducir á apreciar su verdadera influencia en las funciones del organismo.

He concluido, Señores, cuanto me habia propuesto decir sobre el objeto elegido para este imperfecto discurso.

Me resta solo pedir á la Academia la mucha indulgencia que necesito en este momento, y asegurarla mi profundo agradecimiento por el distinguido honor que se ha servido dispensarme admitiéndome en el número de sus individuos.

Madrid y junio 22 de 1851.

Manuel Rioz.

DISCURSO

SOBRE

EL INMENSO DESARROLLO QUE DESDE EL SIGLO XVII HAN RECIBIDO LAS MATEMÁTICAS,

manifestando su íntima asociacion con la Física, é indicando los trabajos de las Academias de Ciencias,

LEIDO

POR EL EXCMO. SR. D. MANUEL MONTEVERDE

en la sesion pública de su recepcion como Académico numerario, celebrada el dia 22 *de junio de* 1851.

Señores:

Pocos dias contaré tan satisfactorios como el de hoy, en que esta ilustre corporacion me dispensa el honor de recibirme en su seno, y me admite de este modo á participar de los méritos que ha contraido consagrando sus loables tareas á la propagacion de los conocimientos útiles, que tan poderosa influencia han de ejercer en la prosperidad de nuestro pais.

No puedo prescindir de manifestar mi sincero agradecimiento á los miembros de esta Academia por la preferencia con que me han distinguido acordándose de mí para elejirme por uno de sus socios; y me complazco en encontrar entre ellos no pocos con quienes tenia ya contraidas otras y mas antiguas obligaciones de gratitud. Al esclarecido General, que con tanto acierto preside este cuerpo, le debo desde mi juventud

una afectuosa deferencia, y numerosas lecciones prácticas de los muchos é inesperados recursos que para los casos árduos ofrecen los conocimientos científicos al buen éxito de las empresas militares; hállanse ocupando dignamente lugar en esta Academia profesores que supieron inspirarme amor al estudio, y dirijieron mis primeros pasos en el camino de las ciencias; condiscípulos cuyo ejemplo y reputacion en las clases me sirvieron de estímulo; compañeros de carrera, que con su cooperacion y consejos han contribuido al desempeño de los trabajos que se me han confiado; personas unidas á mí con lazos mas ó menos estrechos de amistad y conocimiento; y otras con quienes no me habian puesto hasta ahora en contacto las agitaciones de la vida social: pero sea cual fuere la distancia á que hayamos estado, sus nombres suenan muy alto para que no hayan llegado hasta mí, rodeados de la consideracion y alabanza á que se hacen acreedores los que se dedican á cultivar el talento y emplearlo en beneficio de sus semejantes.

Ocioso es estenderse acerca de la conveniencia de las academias: su número aumenta de dia en dia, y esta multiplicacion prueba mas elocuentemente que los discursos las ventajas obtenidas por los establecimientos de esta clase, escitando la emulacion, esparciendo las luces y ampliando las relaciones entre los pueblos, para dar mayor estension al comercio de sus conocimientos. Examinando con atencion los trabajos de las Sociedades de Londres, París, Berlin, etc., y hasta los de la de San Petersburgo, que tanto brilló cuando apenas la Rusia empezaba á entrar en la comunion de las naciones cultas, se ve el estraordinario desarrollo intelectual, que tanta superioridad ha dado á la civilizacion europea, trazado y esplicado en la historia de las academias de ciencias.

Por desgracia no ha tocado á la España escribir para esta historia sino su primera página, cuando D. Alonso el Sabio, en aquellos atrasados tiempos en que las luces del Oriente empezaban á penetrar las tinieblas de la edad media, concibió el feliz proyecto de convocar bajo sus auspicios á los primeros astrónomos de las famosas escuelas de Sevilla, Córdoba y Toledo para revisar las tablas de Tolomeo, que estaban ya en completo desacuerdo con las observaciones. Tal fue, aunque con otras

bases y sin el caracter de perpetuidad que ahora tienen estos cuerpos, el primer ejemplo que se vió en Europa de una asociacion de hombres especiales, eficazmente protejidos por el supremo poder del estado, contribuyendo mancomunadamente con sus talentos en favor de un objeto científico. Fruto de estos afanes fueron las célebres Tablas Alfonsinas, digno homenage rendido á las ciencias exactas por un príncipe matemático en el dia mismo en que fue exaltado al trono, y guia por largo tiempo de los astrónomos, á pesar de las inexactitudes y defectos de que adolecia, propios de aquella oscura y remota época.

No fue esta la única asamblea de sábios congregada por el promulgador de las Siete Partidas, cuya ardiente pasion á las ciencias y las letras no perdonó medio alguno para difundirlas en el reino; y distribuyendo con equidad sus beneficios entre ellas, no dió en el escollo de protejer inconsideradamente á determinados ramos del saber, que con su exuberante y viciada lozanía pudiesen enervar el vigor de otras menos favorecidas; escollo que mas adelante influyó notablemente en la paralizacion de los progresos intelectuales. A fines de la centuria decimaquinta, cuando aún se cultivaban en España con cierta distincion las ciencias exactas introducidas por los árabes, cuando otro príncipe matemático habia llamado á Portugal á nuestro Jaime de Mallorca para crear la astronomía náutica, gozaba Salamanca de muy alta reputacion entre las naciones cultas, y sin embargo, su claustro, invadido casi esclusivamente por la jurisprudencia, la teología y la sutil y falaz dialéctica escolástica, que apenas concedieron un estrechísimo recinto á las demás facultades, fue teatro de la lucha lamentable de Colon contra la preocupacion y el error, armado el primero de sólidos principios teóricos y prácticos, á que los segundos oponian citas y testos inconducentes; y á no ser por los elevados impulsos de la generosa y magnánima Reina Doña Isabel la Católica, no contaríamos entre nuestros hechos gloriosos el mas grande que refieren los fastos de las naciones.

Aunque este ejemplo se ha tomado de nuestra historia, el espíritu de aquella edad, harto larga por desdicha, hacia pesar tal vez mas

duramente el mismo yugo en los demás paises de Europa, sobre los que con un ingenio claro y bien encaminado trataban de esplorar las maravillas y secretos del universo: dos siglos antes vió la Inglaterra á Rogerio Bacon, víctima de su talento, consumiendo su vida en un prolongado encierro; y casi otro tanto tiempo despues del siglo de Colon, en época mucho mas ilustrada, fueron condenados Copérnico y Galileo, aquel en su obra, y este en sus escritos y en su persona.

Mas era ya la época en que las ciencias exactas adquirian todo el vigor necesario para sobreponerse á la preocupacion. Desde que se introdujeron en Occidente arrastraban penosamente su lánguida y prolongada infancia, siendo muy escasos los hombres superiores capaces de hacerlas adelantar; y la mayor parte de los que las cultivaban con ahinco se ceñian á la inteligencia de los autores célebres de la antigüedad, traidos á estas regiones por los árabes invasores, y por los griegos fugitivos de su destruido imperio. El estudio de estos clásicos produjo por fin sus frutos, levantando lentamente á las matemáticas de la postracion en que yacian: apareció entre nosotros el álgebra en el siglo XV; el descubrimiento de la imprenta estendió con rapidez los conocimientos en la centuria siguiente; y se presentaron Copérnico, Vieta, Tico, como precursores de los esclarecidos ingenios que ilustraron el siglo XVII, verdadero siglo de oro de las ciencias, en el que descuellan las colosales figuras de Galileo, Keppler, Descartes, Huigens, Leibnitz, Newton; álzanse al lado de estos otros talentos dignos de ser sus contemporáneos: inteligencias que en distinta época hubieran brillado como de primera magnitud, llaman apenas la atencion cubiertas por el esplendor de los primeros luminares: reúnense las mas altas capacidades para formar las primeras academias modernas; crúzanse los carteles de retos científicos, origen de nuestros premios académicos; y á impulso de tan enérgicos motores, y de la decidida proteccion de los gobiernos, todas las ciencias, y singularmente las matemáticas y físicas, reciben un increible desarrollo desde la Escandinavia hasta Sicilia, desde el Neva hasta los Pirineos. Y en medio de tan activo movimiento ¿qué era de la península Ibérica? Sus monarcas habian dado otra

direccion, gloriosa tambien, á los vuelos del genio español: era el reinado de los Felipes, que asentaron aqui el emporio de la literatura y de las artes.

Pero volvamos á las ciencias para recorrer ligeramente algunos de los mas notables adelantos de las matemáticas en la época á que nos referimos. El álgebra, que desde los reducidos límites de una aritmética general se habia elevado á analizar toda especie de cantidad, simplificó sus procedimientos, y dilató considerablemente su esfera con la invencion de los logaritmos y del cálculo diferencial; y aplicada con tan poderosos recursos á la geometría, dió á ésta los medios de esplorar con suma facilidad estensas regiones, poco accesibles y aun impenetrables á los métodos anteriores. Los progresos de la física y de las matemáticas puras proporcionaron no menos importantes triunfos á las mistas: se descompuso y analizó la luz, se esplicó el fenómeno de la vision, hallóse la ley de los senos en la refraccion, y de aquí nació la dióptrica; con la aparicion del telescopio pudieron los astrónomos estender sus incursiones en la inmensidad de los espacios, y el microscopio conquistó para los naturalistas un nuevo mundo, mostrándoles á la naturaleza tanto mas vasta y sublime cuanto mas y mas se deja penetrar en su indefinida pequeñez; se encontraron la ley de la caida de los graves, el peso del aire, y varios principios interesantes y profundos de mecánica; revelóse la gravitacion universal, las reglas que dirijen el movimiento de los cuerpos celestes, la existencia de los satélites de Júpiter y del anillo de Saturno: y todos estos y otros progresos astronómicos, unidos al conocimiento que se adquirió, con alguna precision, de la verdadera figura y magnitud de la tierra, hicieron grandes beneficios á la geografía y á la navegacion.

Las primeras academias que bajo la forma en que hoy las conocemos se dedicaron á cultivar las ciencias con esmero fueron las de Florencia, fundadoras de la física esperimental, que es la verdadera física: en 1661 la Academia del Cimento prensaba su globo de oro para probar la incompresibilidad del agua; y la poca delicadeza del esperimento y el entusiasmo con que fue acojido, prueban á un tiempo los pocos pasos que se habian dado en esta via, y el ardor y fe con que por ella se

marchaba. Por el mismo tiempo nacieron corporaciones semejantes en Londres y París; y tras ellas, en fin del mismo siglo y en el siguiente, se levantaron asociaciones por todas partes, que pródigamente asistidas por los gobiernos, como lo estaban las primeras, han hecho como ellas los mayores servicios, acometiendo empresas que requieren crecidos dispendios, y una direccion única para hacer concurrir á un mismo fin los esfuerzos de muchos individuos: sin esta unidad de miras, sin los auxilios de una munificencia verdaderamente regia, no se habrian podido intentar siquiera las espediciones á paises remotos para observar simultáneamente en varios puntos los mismos fenómenos celestes; ni los largos viajes para investigar la longitud del péndulo en diferentes latitudes, y para perfeccionar la geografía y la física del globo; ni las grandiosas operaciones geodésicas llevadas á cabo con rara inteligencia y exactitud, dando tal desarrollo á la geoformia que puede mirársela como creacion de nuestra época; ni otros mil trabajos semejantes, consignados en las memorias académicas, que son un precioso depósito de brillantes descubrimientos, y un monumento tan glorioso para los que los han hecho como para los gobiernos que los han promovido y alentado. Aunque en España muy poco ó nada se habia hecho para allanar el camino de las ciencias, no han faltado talentos cuyas producciones han obtenido una bien merecida reputacion; y vemos inscritos en cuerpos académicos estrangeros los nombres de los Juanes, Ulloas, Mendozas, Bethencourtes y otros, entre los cuales se encuentran honrosamente los de algunos miembros de nuestra recien instalada Academia. La creacion de esta, debida al ilustrado celo y proteccion de S. M., y la mayor amplitud que en los establecimientos de educacion se da actualmente á las matemáticas y ciencias naturales, hacen augurar dias mas favorables á la prosperidad de estos ramos de la ilustracion, tan desdeñados hasta hoy entre nosotros.

Al hablar de los progresos de las ciencias exactas en el siglo de Newton, no tanto me propuse manifestar el estado de ellas, como parar algun tanto la consideracion en aquella era notable de regeneracion científica, punto de union de dos grandes períodos, el antiguo y el de nuestros dias, cuyo respectivo espíritu se ve hasta cierto punto reflejado en

dos obras elementales, correspondiente cada una á su época, la *Geometría de Euclides* y la *Descriptiva de Monge:* aquella toda especulativa, toda abstracta; esta, toda de aplicacion, toda práctica: la primera es un encadenamiento de teoremas, con tal cual problema encaminado tambien á la teórica; la segunda es una sucesion de problemas, pero acompañados de métodos convenientes para investigar las propiedades de la estension considerada en abstracto, mas allá de los límites señalados antes á la geometría pura sin el auxilio del cálculo. Antiguamente los griegos y los árabes pensaban mucho, pero observaban poco; y no se estudió la naturaleza, al paso que se daba gran desarrollo á la geometría y se bosquejó el álgebra: ahora los brillantes descubrimientos en que abunda la época presente son fruto del cultivo simultáneo de las matemáticas y de la física, union fecunda que estimula á cada ciencia con las exijencias de la otra, y así satisface la inquieta curiosidad del entendimiento, ensanchando la esfera de sus ideas como fomenta los intereses materiales, y provee á las necesidades y goces de la vida real.

Dan testimonio de la alta influencia que en las matemáticas puras ejerce su aplicacion á la física la preciosa teoría de la curvatura de las superficies, originada de una cuestion sobre la figura de la Tierra; la fertil doctrina de d'Alembert sobre las funciones arbitrarias, nacida para resolver las cuestiones mas árduas pertenecientes á la atraccion de los esferoides, á las cuerdas vibrantes, &c.; en fin, á las investigaciones físico-matemáticas de las primeras capacidades del siglo último se deben la mayor parte de las trasformaciones, artificios y métodos nuevos que tanta superioridad dan á los procedimientos de Lagrange y Laplace sobre los de Leibnitz y Newton. Pero no olvidaremos que aunque el camino se hace mas estrecho y escabroso al paso que se estienden los conocimientos, los mejores laureles son de aquellos que primero salvaron el obstáculo y trazaron la marcha para lo sucesivo.

Antes era bastante limitado el número de fenómenos naturales á quienes se aplicaban los principios de las matemáticas abstractas: hoy la física, esa ciencia que á pasos agigantados crece, y crece indefinidamen-

te, reclama toda ella el auxilio del cálculo, desde sus mas simples elementos hasta su parte mas sublime: las combinaciones del termómetro y del barómetro, de que no se puede prescindir en los mas sencillos esperimentos, y los complicados fenómenos de la física corpuscular; la gravitacion de los cuerpos celestes, y la atraccion á pequeñas distancias; las propiedades de los cuerpos ponderables, asi como las de la electricidad y demás imponderables, todo se ha sujetado al análisis, y sus fórmulas revelan cada dia nuevos y desconocidos misterios, que tarde ó nunca hubiera descubierto la observacion.

Para dar alguna muestra de los progresos que en el siglo y medio último han hecho las ciencias físico-matemáticas, evitando al mismo tiempo la prolija enumeracion de todos los inventos de este período, me referiré á la astronomía como la mas perfecta de ellas, y á cuyos adelantos contribuyen con sus mas sutiles y elevadas teorías las dos ciencias de que depende. No me detendré á contar los pasos que han dado en esta carrera los célebres Bradley, Clairaut, Euler, d'Alembert, Lagrange y Herschel, contentándome con notar un punto homólogo en cada una de dos obras que son la gloria de su respectiva época, y los términos que marcan el espacio recorrido en el tiempo á que me refiero: hablo de los *Principios matemáticos de la Filosofía natural* y de la *Mecánica celeste*. Newton halló las leyes que ligan entre sí á dos cuerpos sujetos á su atraccion mútua, como el Sol y la Tierra: intentó estender sus investigaciones á la Luna, sometida al doble vasallage de la Tierra y del Sol; peró el análisis de entonces no le dió medios suficientes para llenar su deseo, ni habia venido al mundo el genio de d'Alembert para resumir en un solo teorema de sencillo enunciado toda una ciencia dificilísima. Laplace resuelve completamente el problema, estendiéndolo á cualquier conjunto de cuerpos; y aplicándolo al sistema planetario obtiene fórmulas exactísimas de los movimientos lunares, tan interesantes para la determinacion de las longitudes en el mar; hace lo mismo con los satélites de Júpiter en beneficio de la geografía, y da un testimonio mas de la infinita sabiduría del Supremo Hacedor, demostrando que á la direccion en un mismo sentido del movimiento de los planetas, á la pequeñez de la escentricidad de sus órbitas, y á la poca inclinacion con que estas se

cortan se debe la estabilidad del sistema solar: la alteracion de cualquiera de estas condiciones, fuera de ciertos y estrechos límites, lo sumiria tal vez en el desorden y la confusion. Newton por el contrario, llegó á figurarse que las perturbaciones son el germen deletéreo del sistema solar, y que si este cuenta larga vida no puede ser sin el concurso de una fuerza estraordinaria que de tiempo en tiempo venga á restablecer el equilibrio.

Por último, para espresar con un solo rasgo la distancia que nos separa del tiempo mas ilustrado de la antigüedad, que fue el de la escuela de Alejandría, basta decir que hoy sería un error grosero el de algunos segundos en resultados que Tolomeo juzgaba bastante exactos cuando la equivocacion no era mayor que media hora.

Hablando de astronomía, y en este recinto, no puedo menos de traer á la memoria al benemérito académico que me precedió en este honroso puesto, D. José Sanchez Cerquero, brigadier del cuerpo de la Armada, de ese cuerpo que tantos hombres notables ha dado á las matemáticas. El talento exacto y penetrante de este acreditado astrónomo, su prodigiosa memoria, y sus vastos conocimientos en todos los ramos del análisis, hacian esperar de él muchos y sazonados frutos para la Academia, si esta no hubiera tenido el sentimiento de perderle apenas instalada: he visto no obstante con gusto la Revista que publica esta corporacion, inaugurada con un artículo de mi antecesor. Otros escritos mucho mas profundos ha dado á luz en la *Correspondencia matemática* de Bruselas y en el *Almanaque náutico* del Observatorio de San Fernando, publicaciones que, juntas con el esmero y escrupulosa exactitud con que calculaba las efemérides para uso de nuestra marina, le adquirieron el título de miembro de la Sociedad astronómica de Londres, y de la de Meteorología de la misma capital, distincion singular que el severo patriotismo británico no concede al talento estrangero sino en fuerza de un mérito muy calificado.

Al bajar la vista desde este ilustre marino hasta el sucesor que la Academia le ha elejido, no puedo menos de reconocer mi pequeñez para llenar su puesto, que he aceptado por gratitud, y no porque confio en mi suficiencia. Para corresponder al inmerecido honor que la Aca-

demia me dispensa, ya que en facultades intelectuales no me es dado acercarme á mi predecesor, procuraré imitarle en laboriosidad, para ver si en fuerza de trabajo consigo contribuir con mi grano de arena á la edificacion del templo que aqui se levanta al culto de las ciencias.

Manuel Monteverde.

Las condiciones que la España reune por su posicion geográfica y su topografía física en favor de los progresos de las ciencias, son y han sido en todos tiempos numerosas y privilegiadas.

DISCURSO

que al contestar á los de los Sres. RIOZ y MONTEVERDE en el acto de su recepcion como Académicos numerarios,

LEYÓ

EL EXCMO. SR. D. ANTONIO REMON ZARCO DEL VALLE,

PRESIDENTE DE LA ACADEMIA,

en la sesion pública celebrada el dia 22 de junio de 1851.

Señores:

Los Estatutos de esta Real Academia, conformes con la naturaleza de su objeto, no exijen que los discursos de recepcion de sus nuevos individuos sean contestados por los que tuvieron la suerte de precederles; atribuyen solo al Presidente la facultad de pronunciar algunas palabras sugeridas por las impresiones del momento. No es en efecto adecuado el campo en que se cultivan las ciencias exactas, físicas y naturales para suscitar controversias ni ostentar las galas del bien decir, como acontece en las que, perteneciendo al dominio de las llamadas hoy ciencias morales y políticas, ó bien al de la bella literatura, dan espacio y ocasion á la fecundidad del ingenio.

¿Y por qué me desentiendo yo de tan saludables preceptos? Porque

cediendo al poder de una cuerda prevision he conocido de antemano los embarazos que debia encontrar en circunstancias como las presentes. Conmovido mi ánimo por el respeto que me impone la concurrencia de tantas y tan ilustradas personas, y por el aparato de una solemnidad, la primera que, despues del reciente establecimiento de la Academia, se tributa al culto de las ciencias, dificilmente hubiera acertado mi voz á espresar las vivas emociones que sentia.

Ahora, que veo justificado mi recelo, busco el apoyo que necesito en la firmeza y solidez de un pensamiento que hace tiempo me domina, y cuya sencilla manifestacion suplirá el vacío que de otro modo dejara mi silencio en el puesto que ocupo. Hé aqui ese pensamiento: *Las condiciones que la España reune por su posicion geográfica y su topografía física en favor de los progresos de las ciencias, son y han sido en todos tiempos numerosas y privilegiadas.* Meras indicaciones, rasgos ligerísimos, serán suficientes á la perspicacia de los que me honran con su atencion para elevarse á las grandes consideraciones á que sin temeridad no pudiera yo entregarme.

Basta echar una ojeada sobre la superficie de nuestro planeta, para descubrir al punto la situacion felicísima de la Península Ibérica. Colocada en el hemisferio boreal y en su zona mas benigna; separada del continente en su parte septentrional por una alta cadena de montañas que esparce hácia su centro otras diversas en su forma y direccion; y terminada al Sur por la Peña de Gibraltar y su punta de Europa, desde la cual parece que vela sobre las relaciones del Mediterráneo, riquísimo en recuerdos, y del Océano, no menos rico en porvenir, pertenece la Península á esa faja clásica que ciñe la tierra, al Norte del Ecuador, y que acaso pudiera mirarse como el terreno favorito de la civilizacion. Vienen al apoyo de estas ideas, iluminando las sombras de tan mal trazado cuadro, la historia antigua y moderna y las probabilidades de los tiempos futuros.

Dirijiendo la vista al Oriente, donde asomó la luz de esa civilizacion, observaremos cómo se difunde hácia nuestro pais, sirviendo de vehículo las aguas del Mediterráneo, hasta el punto de obedecer la ley de la sucesiva posicion de sus tres regiones hidrográficas marcadas por la configuracion de sus costas. Despues que los fenicios y los griegos se

fueron adelantando de una en otra de aquellas regiones, favorecidos en la infancia de la navegacion por las islas que en ellas encontraban, llegaron á los límites del mar Tirreno. Los focenses, penetrando en él, descubrieron al fin las columnas de Hércules. La España se enlazó con el Oriente, y en las estremidades de su propio territorio se abrieron las puertas de las regiones occidentales. Las minas de plata de aquellos confines ofrecieron aliento á las especulaciones mercantiles de los fenicios y con ellas á las investigaciones científicas á que se dedicaban con éxito manifiesto. De Tartesia y de Gades, dos siglos anteriores á Cartago, desembocaron en el Océano aquellos atrevidos navegantes, é imitando su ejemplo los cartagineses, hijos suyos, estendieron sus descubrimientos por aquellas costas y aguas ignoradas, que mas tarde habian de calificarse como pertenecientes al mundo antiguo. ¡Quién hubiera dicho entonces que 2500 años despues, en un puertecillo vecino á esas mismas colonias del Sud-Oeste de la Península, habia de dar al viento el pabellon de Castilla la carabela que condujo á Colon á la conquista de un nuevo mundo físico y científico, oculto por las olas del Atlántico!

¡Ah! Los destinos de la España la han colocado siempre en ese punto eminente de donde han partido tantos descubrimientos en bien del género humano y de los progresos de su inteligencia. ¿De dónde salió Vasco de Gama para encontrar el término meridional del antiguo continente en el cabo de Buena Esperanza? ¿De dónde Juan Sebastian del Cano, el mas feliz de los navegantes, pues dió el primero la vuelta al mundo, segun la frase usual?.... No, Señores, no emprenderé yo ahora la larga enumeracion de los hábiles y arrojados españoles, que en todo el ámbito de la tierra han perpetuado sus nombres con multiplicadas conquistas en provecho de las ciencias, cuyo desarrollo sucesivo tiene tan íntimo enlace con los progresos de la navegacion y el ensanche de los dominios de la geografía. Basta á mi designio atraer de esta suerte la atencion sobre España, y su influjo en los frutos recojidos por el entendimiento humano. Ni puede decirse que este influjo benéfico haya desaparecido para en adelante; merced entre otras causas á su admirable y envidiada posicion sobre los confines del Océano y del Mediterráneo, del Africa y de la Europa. Nuevas y multiplicadas consideraciones

vuelven á dar en nuestros dias su perdida importancia al último de aquellos mares. La aplicacion del vapor á la navegacion y los caminos de hierro llaman otra vez hácia sus aguas el espíritu mercantil, que abre nuevas vias para encaminarse á las riquísimas regiones del Asia. La civilizacion, que sigue esta huella, y que filtrándose en los paises mahometanos gana terreno diariamente, anuncia el renacimiento de la cultura en el litoral de ese gran mar histórico..... Y cuanto se refiera al Mediterráneo ha de producir respecto de España una accion eficaz y recíproca, promovedora de esfuerzos y progresos en el saber.

Aqui deseara yo poder estenderme en otro género de consideraciones, referentes siempre á mi propósito, y derivadas de la historia de los pueblos estraños que vinieron á la Península en circunstancias felices para el aumento de los conocimientos humanos sobre nuestro suelo. Los fenicios, los griegos, los romanos, los cartagineses y los árabes, todos estos estrangeros pisaron nuestras playas y penetraron hácia el interior en momentos de prosperidad, cuando las ciencias, las letras y las artes contribuian á ella. El mundo romano abrazaba en su mapa una gran parte de la España; y en nuestro suelo, bajo el dominio de Augusto, se verificó la transicion del período belicoso de aquel imperio al pacífico, bajo cuyo amparo medraron las ciencias y floreció la literatura. España surtió á Roma de hombres eminentes, y su geografía y sus producciones naturales alimentaron los estudios de Estrabon y de Plinio..... Saltemos para llegar á los árabes. Hé ahí uno de esos caractéres especiales, propios esclusivos de España, que le dan un lugar preferente en la clasificacion general de los pueblos Europeos durante el período mas oscuro de su historia científica. La invasion de los árabes, que encontró su límite poco mas allá del Pirineo, trasplantó á nuestro suelo el saber que los distinguia, y que cultivado sucesivamente, en Andalucía sobre todo, trajo al litoral del Norte del Mediterráneo las riquezas intelectuales de la parte oriental de su margen opuesta. Los progresos hechos en las matemáticas, la medicina, la astronomía y la química se conservaron y aun crecieron no poco bajo su dominacion en la Península, pudiendo citarse en prueba de ello hechos repetidos y nombres célebres. El brillo de esta cultura reflejó grandemente hácia el Norte de la Península, y

aun los pueblos que por allí la invadieron trayendo consigo la ignorancia de sus mayores, amalgamados aqui con los naturales, partícipes del influjo de la ilustracion romana, prestaron sus servicios á las ciencias, elevándose á una altura entonces desconocida. Asi llegó aquella época á que da nombre el célebre Alonso el Sábio, cuyas obras inmortales son de ello buen testimonio. Asi pudieron celebrarse en Toledo aquellos congresos científicos muy dignos de ser admirados en semejantes tiempos. Asi tambien Arnaldo de Villanova, gran químico, el esclarecido físico español Raimundo Lulio, y otros muchos, aprovecharon y estendieron las útiles lecciones de la escuela árabe.

Llegó para nosotros, y aun añadiré para las ciencias, una de las épocas mas venturosas con el reinado de Isabel la Católica y de Fernando V. Sí, señores, despues del hallazgo del nuevo continente, que sirvió de estímulo y origen á tantos otros, llevándonos mas allá de los cabos de Hornos y Buena-Esperanza, la esfera del entendimiento humano, ó sea el ámbito de sus investigaciones, se agrandó y aclaró de tal suerte, que no permite comparacion alguna con su estension anterior. Ensanchóse el mundo intelectual al paso que se dilataba el mundo físico. Ligáronse los progresos en el estudio de la tierra con los que se hacian en los espacios celestes. La recíproca accion de las ciencias y de sus aplicaciones, el uso y perfeccion de instrumentos, sucesivamente inventados, que acreciendo la fuerza de los órganos del hombre daban á su inteligencia un poder casi mágico, todo ha ido contribuyendo á hacer mas y mas fructíferas las conquistas territoriales y científicas en que tanta parte cabe á los Españoles. Y no se crea que fue solo su arrojo quien da derecho á esa gloria: fue tambien su saber. Admira, dice un sábio alemán, encontrar tantas verdades importantes en el orden físico dentro de las obras de los escritores españoles del siglo XVI, donde existen los gérmenes de las que despues se han desarrollado: acabando por citar á Acosta, Oviedo, Angleria y otros.

Así pudo llegar ese período esplendente de la historia de las ciencias, y en especial de la astronomía y las matemáticas, que abraza desde Galileo y Keplero hasta Newton y Leibnitz, á que han seguido despues tantos y tantos progresos de la inteligencia humana en tiempos poste-

riores. En ellos tambien, y aun con anterioridad á los célebres viajes de sábios estrangeros, resuenan los nombres de Ulloa, D. Jorge Juan, Mendoza y otros de nuestros compatriotas.

Ahora bien, señores, ¿podrá reputarse aventurada la opinion que atribuye á la España por su posicion geográfica, por el curso é influjo de la civilizacion, por el denuedo y la inteligencia de sus naturales, cierta especie de privilegio en favor del progreso de las ciencias? Ni la velocidad con que he recorrido la historia de siglos, ni las transiciones rápidas de unos á otros de sus mas notables períodos, ni la necesidad lamentable de ocultar hechos y callar nombres, en gracia de la brevedad, ni el desaliño, en fin, de mi narracion, serán parte, sin duda, á impedir que los hombres ilustres y distinguidos que me escuchan den á mi pensamiento el verdadero valor que en sí tiene. Acaso alguno de ellos acometerá esta obra, superior á mis fuerzas.

Concentremos en tanto nuestras miradas sobre el territorio mismo de la Península. Su estraña figura envuelve en la diversidad de las aguas que la bañan, de las montañas que la ciñen ó cruzan, y de las esposiciones que de ellas resultan, condiciones que las ciencias físicas y naturales sabrán encarecer.

En efecto, á la primera ojeada se advierte la traza simétrica de su contorno, correspondiente en sus cuatro grandes partes á los vientos cardinales. De aqui las notables diferencias del influjo atmosférico sobre su suelo y toda suerte de relaciones físicas. ¿En qué se asemejan los caractéres de la costa Cantábrica á los del litoral del Mediterráneo, ni los de este á los del Atlántico? Sin abandonar esta consideracion, añadiendo á ella solamente la influencia de la latitud geográfica, estiéndase la vista sobre el mapa general de la tierra, y compárese la situacion de nuestra Península con la de los demás paises. De buen grado me detendria en este paralelo, que mas de una vez me ha persuadido de la escelencia de aquella bajo el aspecto del conjunto admirable de objetos propios á la meditacion de los sábios. Donde sin embargo crece al mas subido punto el interés que escita su estudio es en la contemplacion de su relieve ó sea la topografía vertical de su suelo, verdaderamente rara, por la cual se esplican tantos fenómenos físicos, la inmensa va-

riedad de sus climas, producciones y cultivos, y aun los misterios de la historia; justificándose así la admirable relacion que existe entre esta, la geografía y la topografía.

En ese aparente laberinto de cadenas contínuas de montañas, algunas de las cuales penetran con sus cimas hasta la region de las nieves perpétuas; de grupos aislados, de rocas eminentes que asoman sobre la superficie de altas y llanas mesetas, se descubren las leyes de la orografía, hijas de la topografía física y de la naturaleza geológica de los terrenos. A los cuatro mares que podemos considerar en las aguas que bañan su contorno, y que segun observamos corresponden á los cuatro principales vientos, bajan desde el interior otros tantos planos inclinados con accidentes diversos. Demás de eso hay todavía otra ley general respecto de las pendientes del total de la Península; ley que no contradiciendo la inclinacion de aquellos otros planos, multiplica en gran manera los efectos físicos del desnivel de nuestro suelo. La cordillera cantábrica, prolongacion del Pirineo que corre de E. á O., forma en su cumbre la arista que separa el plano inclinado ó vertiente al Norte de otro plano ó vertiente que desde allí desciende hasta el litoral del Sur. Vecina al mar aquella elevada cordillera por su parte septentrional, su mucha altura con su poca base hacen sus caidas rápidas, profundos sus valles, fragosas sus costas, mientras que hácia el Mediodía, su declive mas estenso y suave, dividiéndose alternativamente en mesetas y líneas de montañas ó mas bien altos escalones, ofrece en su variedad la que se advierte en los climas y las producciones que constituyen la inmensa riqueza de España. De su estructura montañosa dependen las leyes de su hidrografía. Bajan de su centro, y de la línea divisoria de aguas entre el Mediterráneo y el Océano, rios torrentosos en la mayor parte de su curso, que si bien prestan á la agricultura los riegos que el clima requiere y á la industria fuerzas motrices abundantes, presentan obstáculos á la navegacion, precipitándose sus aguas para perderse en el mar. ¿Entraré yo á deducir de esta ligera y abstracta enumeracion de las condiciones dominantes en el relieve de nuestro suelo, su admirable escelencia para el cultivo de las ciencias físicas y naturales? Impertinente fuera. ¿Quién no percibe desde luego el provecho y el

placer que envuelve la aplicacion á la Península de esas leyes maravillosas de la naturaleza, que establecen tan feliz acuerdo entre los climas, los terrenos y la vejetacion? ¿Qué no diríamos si el tiempo lo consintiera, para manifestar la riqueza geológica que en todos conceptos encierran las abundantes y variadas rocas de orígenes diversos y épocas distintas?.... Señores: fuerza es interrumpir el vuelo de estas consideraciones, á riesgo de que pierdan su interés, por no descender con ellas á nombres propios de localidades y de objetos del dominio de la historia natural..... Yo me contentaré solo con citar un hecho clásico en apoyo de ese mi pensamiento favorito, cuya esplanacion, difícil en breves términos, va tal vez siendo enojosa.

Tomemos de nuevo el mapa general de la tierra, estudiemos las leyes de las principales cadenas de montañas que descuellan sobre la superficie de su parte seca; sin duda las hallaremos mucho mas altas que las que España posee: ahí están el Chimborazo, el Himalaya, y otras no tan encumbradas. Examinemos sus principales direcciones, encaminadas unas del Norte al Sur, otras de Oriente á Poniente, y vendremos á deducir que tal vez no se encuentre en otra parte el territorio clásico para el orden de la naturaleza que la España presenta en el conjunto de la Sierra-Nevada y sus vertientes al Mediterráneo.

La cadena de montañas que desde el significante cabo de Palos corre en su sentido general paralelamente á las playas de aquel mar en direccion de Levante á Poniente, hasta perderse sus descendencias cerca de Cádiz y del Guadalete, se entumece y levanta hasta las nieves perpétuas no lejos de Granada. Su distancia horizontal á la costa no alcanza allí á cuatro leguas; sus estribos bajan mas ó menos perpendicularmente de la cordillera al mar, completándose así los abrigos que constituyen el espacio intermedio en un grande y verdadero invernáculo. Y como por una parte la latitud geográfica de aquella posicion puede referirse á los 37°, y el cerro de Mula-Hacen, que señorea los demás picos, sube á la elevacion de 12.772 pies de Burgos, fácil es colegir que aquí se encuentra reducida á breve espacio casi toda la escala de la vegetacion. Dánse allí, cerca del mar, plantas tropicales, el algodon, el plátano, la caña de azucar y otras muchas; mientras que

en las rocas empinadas de la Sierra se encuentran los líquenes de los montes escandinavos. En el corto espacio que separa ambas líneas, el instinto de los naturales ha hecho facilmente lo que el arte no alcanza en las estufas de los mejores jardines botánicos. Despues de esto ¿no podria decirse sin arrogancia, que los archivos de la naturaleza se hallan en aquel espacio privilegiado, cuando menos en gran parte? Y siendo así, ¿cómo negar que la España es poseedora de señaladísimas ventajas para el estudio y progreso de las ciencias físicas y naturales?.... ¡Que no me fuera dado verter aqui algunos de los conceptos que á este propósito tuve la suerte de recojer de la boca del modestísimo sábio Don Simon de Rojas Clemente! Conducido á principios de este siglo á aquella magnífica escuela de la naturaleza, penetró sus secretos y se apropió sus lecciones, por desgracia escondidas todavía en sus obras inéditas. Emulo del célebre Ramond, que con el auxilio del barómetro media la altura del Monte-Perdido en las cumbres del Pirineo, practicó con sabiduría y esmero iguales operaciones comparadas con otras trigonométricas, que dieron á conocer los importantes desniveles de la Sierra-Nevada y de sus faldas hasta el vecino mar, obteniendo de tan preciosos datos luminosas deducciones en pro de las ciencias, y en pro tambien del honor y gloria de España.

¡Ah! Señores, su memoria, su ejemplo, no serán perdidos para nosotros. Los individuos de esta Academia, que apenas sale de su cuna, penetrados de los deberes que les imponen las felices condiciones esteriores é interiores del suelo de nuestra patria no menos que sus anales científicos, se dedicarán, con desprecio de toda suerte de obstáculos, á preparar la útil aplicacion de tantos y tan favorables elementos hasta donde alcanzaren sus recursos.

Buena prueba de ello es el amor al saber y el noble espíritu de laboriosidad, harto manifiestos en los notables discursos que acabamos de oir, y que aseguran á la Academia el eficaz auxilio de sus nuevos miembros.

Entreguémonos, señores, entreguémonos, cuantos tenemos la honra de frecuentar este recinto, á las árduas tareas que nuestro deber y nuestra aficion nos imponen. Vastísimo campo nos ofrecen, el estado ac-

tual de las ciencias, y la necesidad de apoderarnos de sus tesoros para aumentar con ellos la ventura que en el orden de la naturaleza cupo á nuestro pais privilegiado. Acaso mas tarde los que nos siguieren, auxiliados por la mayor facilidad de adelantar en esta clase de estudios, y estimulados con el recuerdo de los triunfos obtenidos por el poderoso ingenio de nuestros mayores á despecho de la ignorancia de los tiempos, alcanzarán la gloria de dar su propio impulso á los progresos del saber humano.

Antonio Ramon Zarco del Valle.

DISCURSO

SOBRE

LA APARENTE SENCILLEZ DEL ORGANISMO VEGETAL,

LEIDO

POR EL SEÑOR DON JOSE MARTIN DE LEON

EN

la Sesion pública de su recepcion como Académico numerario, celebrada el dia 27 de junio de 1852.

Señores:

Desconfiado siempre de mis facultades, persuadido de la cortedad de mis conocimientos y de la escasez de mis recursos, no podia menos de vacilar en la aceptacion del inmerecido obsequio con que tuvo á bien honrarme esta Academia, llamándome á su seno, para colocarme al lado de tantos y tan esclarecidos varones que acreditan su sabiduría. Alienta, sin embargo, mi temor la idea halagüeña de que gustando las aguas de esta fuente del saber, algun dia seré mas digno del título que hoy acepto lleno de orgullo; y entonces los generosos individuos que me abren las puertas de esta Asamblea, podrán decir que, á imitacion del *Sér Supremo*, han hecho *algo* de la *nada*.

Séame pues permitido rendir, ante todo, un testimonio de gratitud por el honor que se me dispensa, y la garantía de que, si mi ilustracion estuviese al nivel de mi voluntad, una y otra se emplearian en contribuir al desarrollo de las ciencias, á disipar los errores

con la luz de la verdad, á eliminar las hipótesis de entre los hechos, llenando asi la mision sublime del que dignamente haya de ocupar los escaños de esta Corporacion, tan honorífica como provechosa, tan respetable como ilustrada.

Otra circunstancia, Señores, hace mas obligatoria la espresion de mi gratitud profunda: vengo á reemplazar al Excmo. Sr. D. Jacobo María Parga, cuya biografía pudiera estar escrita en dos palabras: era *virtuoso* y *sábio*. Sus títulos, sus altos destinos, su erudicion, sus vastos conocimientos en ciencias naturales, su laboriosidad y genio investigador, sus virtudes, en fin, marcaban los quilates de su valor, y no era mi humilde persona la que debiera esperar la honrosa distincion de reemplazarle. Modelos tan dignos no debe sino venerarlos é imitarlos el que los encuentra en su carrera. Feliz yo si logro conquistar una pequeña parte de sus merecimientos.

Ahora, cumpliendo el deber que el Reglamento impone, someteré al juicio superior de la Academia un asunto científico, que le constituirán algunas observaciones sobre *la aparente sencillez del organismo vegetal*, á fin de ver si de ellas se desprende algun carácter que con facilidad señale los límites que separan á los animales de las plantas.

Si lo que diga no interesa vuestra curiosidad, ó mi decir es insulso ó desaliñado, será de justicia que me impongais la pena que, con razon, intimaba Horacio á los malos actores. El asunto, como todos los que ofrece la naturaleza al que estudia con aficion, es interesante, y rico en consecuencias útiles. Su desempeño será pobre, como lo es mi ingenio; pero el respetable Cuerpo á quien me dirijo es sábio, y como sábio, indulgente; cualidad que me prometo asistirá tambien al escojido concurso que me escucha.

La casi proverbial sencillez de las plantas es, á mi entender, una de aquellas preocupaciones comunes, que mas daño puede acarrear al adelantamiento de los diversos ramos de la Botánica; porque arraigadas en muchos, les hacen descansar en tan falso supuesto, y no moviéndose, dejan de acometer trabajos de investigacion para proporcionar alguna verdad importante, ni dan pasos que les hagan salir de su error, para lo que bastaria solamente una moderada reflexion.

Pero como estos preciosos seres, mudos é inmóviles, no bullen, ni saltan, ni ejecutan los graciosos movimientos y sonidos con que los animales tantas veces nos deleitan y entretienen; y como tampoco pueden distinguirse, con la facilidad que en estos se distinguen, los instrumentos con que los ejecutan, de aquí el que sin mas examen, sin tener en cuenta la inconcebible habilidad del artífice, sin pensar en que máquinas sencillas no pueden ejecutar operaciones complicadas, y olvidándose tambien de la escasez de nuestros medios comunes de ver, se haya formado ese juicio, que creo debe mirarse como error de trascendencia.

Escaso es el número de los órganos que el examen mecánico y la simple vista descubren en el interior del vegetal, y aún no es largo tampoco el de los averiguados á fuerza de observaciones microscópicas. Parénquima y fibras, celdas y vasos; pero ¡qué de modificaciones en la proporcion y naturaleza de las primeras! ¡Cuán diversificada la forma, calibre, superficie, densidad, adorno, guarniciones, y sobre todo, la posicion respectiva de los segundos! Vemos estas cavidades en su incremento, desde el embrion, que ensanchan y se alargan ó comprimen, que se entumecen ó coartan, se unen ó se desvian, y que agrupándose de mil diferentes maneras, dan origen al sinnúmero de combinaciones constantes, siempre iguales en las mismas, siempre distintas en las diversas especies: combinaciones que, bajo las lentes del microscopio, se manifiestan grandemente, formando una prodigiosa variedad de dibujos, que simulan los mas raros y primorosos encajes. Estos agrupamientos ordenados y simétricos de las fibras en el parénquima, en proporciones distintas, y cuya posicion respectiva es tan diversa, bastarian ya por sí solos á desmentir la pretendida sencillez de la organizacion vegetal, si no tuviésemos que oponer además las relaciones que se han observado entre el plexus ó tejido elemental y las formas esteriores; si no se hubiera encontrado la correspondencia entre la multiplicidad de las formas con que se nos presentan los órganos visibles, y las combinaciones orgánicas internas; si no supiésemos que esa simetría orgánica, tan sábia é ingeniosamente demostrada por el inmortal De-Candolle, cuya importancia taxeonómica y mor-

fológica es indisputable, une con lazos íntimos y estrechos los órganos esternos y los interiores de la planta, de manera que siempre que vemos de la misma parte de cualquier especie una representacion microscópica, se observa el mismo dibujo, la misma disposicion en su agrupamiento proporcional.

Sumamente escabroso es el camino que va directo á la escrutacion del delicado tejido de las plantas: así es que apenas hay quien no tropiece en él y se retraiga, cuando sabe que hasta los mas perseverantes observadores y anatómicos, y cuantos por él se han propuesto descubrir cosas nuevas, han venido á ofuscarse, á la manera que queda deslumbrado el que, por averiguar sus manchas, mira de frente el disco del sol.

No muestra tan facil la naturaleza sus prodigios; mas cuando se buscan con interés y se la examina con empeño, si por falta de instrumentos ó por escasez de medios no logramos descubrirlos, muy pronto hay que oponer esfuerzos á los obstáculos, y variar de rumbo para acertar con la senda que conduce al apetecido fin.

Al contemplar la inmensa profusion, el ostentoso lujo con que la naturaleza ha engalanado su creacion vegetal; el prodigioso número y diversidad de partes; la inconcebible multitud de formas y proporciones; al observar los variados y brillantes colores de las hojas, los delicados matices de las flores, los diversificados sabores de los frutos, se descubre la mano del grande artífice, sin que podamos menos de admirar y publicar su sabiduría y omnipotencia: pero ¿no nos dice esto algo mas....? ¿No habla todo ello, al propio tiempo que á los sentidos, al corazon y al espíritu del que lo observa un lenguaje sublime que es imposible desatender? ¿Quién será tan sordo é indiferente que desdeñe escucharle, siquiera para comprender algo de ese idioma celeste, siquiera para poder averiguar algo, ó las relaciones que existen entre lo que vemos y lo que se nos oculta....?

A la naturaleza, que nada crea en vano, que todo lo dirije á un fin único, grande y armonioso, sería un delirio suponerla caprichosa en su propósito de diversificar tanto las formas de estos graciosos seres, variar sus cualidades sensibles, y multiplicar sin límites sus apa-

ratos laboradores: asi he de llamar á esos grupos de vasos que se observan simétricamente colocados entre el tejido celular, porque es preciso mirar cada planta como un laboratorio natural y vivo, que trabaja desde que nace hasta que muere, provisto de millares de aparatos diferentemente montados, de los cuales se sirve la naturaleza para formar una multitud de sustancias que no podrian existir sin la organizacion vegetal.

Por estos aparatos activos, formados de menudos instrumentos membranosos, permeables ú horadados, y segun Mirbel glandulosos, corren los líquidos, y ascienden y descienden, y los atraviesan, cambiando y trasformando las materias disueltas, que ya fijan, ya depositan ó ya separan, movidos por las combinadas fuerzas de afinidad y las físicas del tejido, mas la de la accion glandular; verificando funciones ú operaciones admirables que siempre preside y á veces modifica la fuerza reguladora de la vida, ofreciéndonos á cada paso resultados tan varios como sorprendentes.

En este tránsito y trasformacion de líquidos es donde la naturaleza ostenta mas su poder inmenso. Sustrayendo y añadiendo átomos de sus elementos, forma y trasforma la multitud de sustancias que tanto nos admiran, y que han sido y serán por muchos siglos escuela sublime adonde vayan á buscar gloria los que hayan de seguir á los Liebig y á los Berzelius.

Si el químico filósofo ha logrado cambiar á su antojo la goma en azúcar, el azúcar en fécula, la fécula en ácido, este en aldeida y la aldeida en alcohol, y ha sabido trasformar muchas sustancias en otras diferentes en sus limitados aparatos, ¡qué no hará la naturaleza con sus prodigiosos recursos, y empleando las fuerzas de la vida de que el químico no puede disponer!

Admirable es en efecto la diversidad de sustancias que la planta elabora, ya simultánea ya progresivamente, en el curso de la vegetacion: y son tantos los cambios y trasmutaciones que ejecuta, que el ya largo catálogo de materiales inmediatos conocidos, debe tenerse en nada al ver que los trabajos analíticos modernos van dando diariamente de cada especie uno ú otro peculiar.

No era posible que esto fuese de otra manera, si se atiende á la gran complicacion de unas máquinas, cuyo oficio es el de preparar tantas suertes de materias cuantas puede buscar la necesidad, el gusto, el capricho del hombre y el instinto de la multitud de animales que de ellas se sirven: unas máquinas que la naturaleza emplea de contínuo para organizar la materia bruta que sería inútil para sostener la vida de aquellos; máquinas constituidas por el enlace de numerosos instrumentos que solo usan para componer productos diferentes y capaces de acomodarse á los diversos aparatos manducatorios y digestivos de los numerosos seres á cuyo nutrimento están destinadas.

Y sería ciertamente poco conforme á la razon pensar que esa multitud de sustancias de tan distinta naturaleza, fueran fabricadas con instrumentos uniformes, pues no es dable que sea uno mismo el aparato con que se elabora el intenso amargo de la tuera, que el dulce producto de la caña; no puede ser igual el que trabaja el acerbo del redoul y el suavísimo de la goma; ni serán semejantes los que producen el nutritivo Sagú y el terrible jugo del manzanillo. ¡Admirables aparatos, que en medio de tantas sustancias animalizadas como elaboran, no pierden su naturaleza vegetal, ni participan, cuando puros, de las cualidades de aquellas; y que á pesar de su pequeñez y de su delicadeza orgánica, resisten mas que el vidrio y los metales á la accion de los ácidos, de los álcalis y de las corrosivas materias que elaboran.

Al ver en los vegetales tanta belleza esterior, tanta complicacion interna, tan variados aparatos y tan multiplicados productos, no es posible resistir al deseo de averiguar los altos fines que en esta prodigiosa obra se propuso el Autor, cuyos milagros no permiten descanso á la curiosidad del naturalista filósofo, el cual, discurriendo á veces, pasa á suponer con razon que si los animales no son polífagos, habrán de necesitar alimentos tan variados como lo son sus órganos de digestion, y que las plantas son las fábricas de los alimentos que aquellos han menester: por eso tan complicadas y trabajadoras; por eso su grande importancia en la economía de la naturaleza; por lo mismo, si se establecieran gerarquías entre los seres, á no impedirlo la noble facultad de la inteligencia del hombre, que está á la cabeza del reino animal, debe-

rian anteponerse los vegetales, cuya mision es la de crear, á los animales, que parece solo tienen la de destruir. Hay ocasiones en que se nos presentan algunos de estos seres tan desnudos de galas ostensibles, y tan desprovistos de partes bien distintas y determinables, que apenas dan señales siquiera de organizacion interna ni esterna, no hallándose en ellos parte ni miembro que puedan servir de carácter para su determinacion, como sucede con los gelidios y muchas confervas entre los vegetales, con las esponjas y diátomas entre los animales: de manera que no bastan ojos ni auxiliados de las lentes, llegando á tal punto, á veces el decrecimiento orgánico de algunos, que parece se presentan con igual derecho á ser colocados en cualquiera de los dos reinos.

El examen de los medios mas propios para fijar este derecho ha ocupado la atencion de muchos sabios naturalistas; y si bien dió lugar á ideas ridículas, á oposiciones absurdas y sistemas estravagantes, como las de Daubenton, Munchaussen y otros, en cambio ha contribuido grandemente á los progresos de la Botánica y de la Zoologia.

Abandonada hoy por todos los naturalistas la idea de la no interrumpida cadena de seres para formar únicamente un reino orgánico, desechada la del reino intermediario para todos aquellos que no se asemejan á plantas ni animales, y plenamente combatida la de la transmutacion ó tránsito de unos en otros, sería conveniente intentar la investigacion de un medio que sustituyese con ventaja á los ya generalmente adoptados, y que facilitara la adjudicacion del derecho que corresponda á los muchos seres dudosos ó de incierta colocacion.

No convenia sin duda á los altos fines que el Autor de la naturaleza se propuso, el señalar con un carácter único y sobresaliente la diferencia entre los seres de ambos reinos, acaso para que, obligados á trabajar en el estudio de estas obras, conociéramos mejor su prodigioso mecanismo, é hincada la rodilla, confesásemos á un tiempo mismo su grandeza y nuestra pequeñez.

Del inmortal De-Candolle tenemos el mas completo paralelo que se ha presentado para distinguirlos; de este pueden deducirse las mas luminosas ideas y consecuencias muy importantes: sin embargo, esta-

bleció sus principales caractéres y los tomó de las propiedades vitales, que suelen oscurecerse en muchos á tal punto que no es posible percibirlas.

La sensibilidad, por ejemplo, atributo de los animales, se desacredita en el pólipo, y en cuantos no oponen resistencia al daño ni se les nota propension al bien. La voluntad no se manifiesta tampoco en los que, como la lapa y la estrella de mar, por sus movimientos no dan indicios de querer ni de rehusar: por manera que aquellos seres en que no se perciba la menor señal de sentimiento, el mas débil rasgo de voluntad, habrán de quedar sin colocacion definitiva, mientras por ser organizados no se cuentan entre las plantas. Y si estos caracteres de tanto bulto é importancia se sustraen mil veces á todo nuestro arte de observar, ¿qué ha de ser de los otros, mas pequeños y de menos fácil demostracion?

No se concede á las plantas la facultad de sentir, que con dificultad puede negárseles viendo en ellas mil veces propension á buscar lo que les aprovecha y á separarse de lo que las daña: y si bien es ingeniosa la teoría que atribuye sus movimientos á la escitabilidad de sus tejidos, estimulada por agentes de dentro ó fuera, cuesta trabajo no mirar aquellos movimientos como instintivos, y producidos por impresiones á que la planta no puede hacerse indiferente, lo cual en mi concepto es sentir á su manera; asi, pues, bien podríamos suponer sin repugnancia de la razon lo que no nos es dado demostrar: que la escitabilidad es la misma sensibilidad atenuada, aunque imposible de medir, en las modificaciones orgánicas.

Se ha dicho que no pueden sentir los vegetales porque carecen absolutamente de nervios, y que los movimientos tampoco pueden ser efecto de la irritabilidad, pues que en ellos no existen músculos; y sin embargo, vemos colocados entre los animales muchos en que ningun esfuerzo ha bastado para poder distinguir nervios, ni músculos; ni tampoco por los efectos la mas mínima de su existencia, en cuyo caso, cuando menos, puede dudarse si los tienen ó no: si lo primero, sería lo mismo que decir que hay nervios que no dan muestra de sentir y músculos no irritables; lo segundo probaria que sin ellos era posible

la animalidad: todo sér orgánico que trabaja por vivir y resiste á su destruccion mientras vive, debe sentir á su modo, en escala mas ó menos elevada, aunque á nuestro pesar no tengamos modo de reconocer los órganos con que siente; y en este supuesto, ¿dónde está la razon para negar á las plantas esas propiedades porque no se perciban? Estímense, en buen hora, y utilícense los caracteres tomados de ellas para diferenciar los seres de marcada organizacion; mas para fijar los dudosos, dichas propiedades, como fundamento, son en mi juicio las menos á propósito.

Es bien estraño que todos los naturalistas, hasta los mas doctos de nuestro tiempo, hayan ido siempre á buscar los caracteres diferenciales de estos seres ambíguos en las propiedades de la vida, que tan á menudo son imposibles de apreciar, ó en las propiedades físicas de los tejidos, que generalmente son comunes á vegetales y animales, desentendiéndose casi del todo de indagar señales mas sensibles que fácilmente pudieran descubrirse con nuestros medios materiales; y que para la resolucion de tantas dudas hayan contado tan poco con los grandes recursos que al efecto podia prestarles la química analítica: esa antorcha que en nuestros dias está esclareciendo los lugares mas oscuros de la fisiologia de los seres de ambos reinos.

Siempre que es difícil marcar la diferencia que existe entre dos seres casi amorfos de incierta colocacion; cuando los recursos que se han buscado han sido ineficaces, y se han agotado ya los medios de investigar propuestos hasta ahora; cuando se halla ejercitada la paciencia y fatigado el espíritu del naturalista, y el escalpelo ha sido inútil, é infructuoso el ojo y las lentes, hay que acudir por necesidad al poderoso auxilio del análisis, único medio de poder salir airoso, resolviendo el mayor número de casos en que la planta y el animal niegan al observador sus órganos interiores, no le dejan percibir posicion ni simetría, é intenta en vano hallar correspondencia entre los de dentro y fuera, que tanto pudiera servirle para caracterizarlos. En efecto, esos seres no resistirán á las operaciones habilmente dirijidas por el sagaz químico cuando los someta á la accion de acomodados agentes, y (en cualquier época de su vida) elimine sus productos y los enumere, notan-

do sus semejanzas ó diferencias, averigüe su naturaleza, observe la de los tejidos y lo reconozca todo y juzgue con exactitud.

Suponiendo que el ser perteneciera al reino animal, y que se muestre enteramente destituido de signos relativos á su organizacion, el químico investigador sabe ya de antemano que los productos en los animales son semejantes á los de sus análogos; y está cierto de no encontrar ninguno que sea peculiar: podrá confirmar el principio de que en ellos son idénticos los productos de especie á especie en órganos correspondientes; y que en las plantas, por el contrario, diferirán de especie á especie, dando siempre alguno particular. El químico puede eliminar, aislar y dejar perfectamente puro y libre de toda materia estraña el tejido fundamental, cuyos elementos se manifestarán ser de un compuesto sumamente carbonado si corresponde á un vegetal, y muy nitrogenado cuando pertenezca á un animal.

Todavía pudiera darse el caso de ofrecer dificultad el aislamiento de los tejidos; y sin embargo, su sagacidad le prestará medios para demostrar que aquellas masas informes, si son de animal se resolverán en materia análoga á la gelatina ó al gluten, y si de una planta en sustancia semejante al mucílago: observando y haciendo notar que en estas nunca, en aquellos pronto se manifiesta la fetidez amoniacal.

A la química, que debemos el conocimiento de esa multitud de sustancias que el vegetal elabora en su complicadísima organizacion, habremos de confesarnos tambien deudores del hallazgo de los medios mas adecuados para distinguir con seguridad los seres ambíguos en todos los casos en que no pueda percibirse simetría, determinarse posicion respectiva de órganos interior y esteriormente, y en que no sea facil ver la variedad de productos ó sacar alguno especial; pues habiendo de comparar la naturaleza de los vasos, la de los materiales inmediatos ó la de alguno particular, nada puede hacerse sin los agentes químicos, único medio, si no me engaño, de lograr el señalamiento riguroso y exacto que competa á todos aquellos seres que se presenten indeterminables ó de incierta colocacion, aquellos que pudieran considerarse con igual derecho á ser clasificados entre los animales ó entre las plantas.

Creo, pues, que el camino que acabo de indicar es, no solo mas espedito y suave que los antes propuestos, sino el único que puede conducir al intento, y del cual las mas veces ha estraviado el empeño de ir por el espinoso é intrincado de la averiguacion de las propiedades vitales.

Acaso se habrá notado que al presentar estas doctrinas he puesto en duda, ó me he separado algun tanto de lo que en la materia han pensado hombres eminentes: yo protesto desde luego mi sincero respeto á sus autorizadas opiniones, pero sin olvidar nunca lo que debo á los derechos del pensamiento. Tambien quizá se estrañará el que haya espuesto mi idea tan á la lijera, sin ejemplos, sin pruebas, detalles ni erudicion, y que no haya empleado el rigoroso tecnicismo de la ciencia; pero he creido que así lo exijia la brevedad, y mas que todo vuestra notoria ilustracion: fuera de que mi designio no es otro que suscitar una que sea interesante, que merezca ser acojida, y que mañana deba solo á vuestras luces su esclarecimiento. No me lisonjeo de haber ofrecido á vuestra consideracion ningun asunto estraordinario, pero sí uno de aquellos que pueden escitar á trabajos ulteriores de utilidad, y contribuir eficazmente al progreso de la ciencia.

Presentar una idea nueva, disipar un error de antiguo origen, es empresa muy superior á mis fuerzas: conozco cuán facil es intentarlo, y cuán dificil conseguirlo; sé que es preciso para ello estudiar la naturaleza sin descanso ni prevencion; observarla de contínuo en sus operaciones, si se han de notar sus fenómenos admirables; repetir mil esperimentos, averiguar las relaciones de los hechos: en una palabra, hacer profesion de investigador; proponerse dificultades para discurrir sobre ellas; y esforzarse, y sudar, y fatigarse, y aun con todo rara vez se logra algun descubrimiento, y no de aquellos que por caminos estraños vinieron á labrar coronas de triunfo á sus afortunados inventores.

Caminando el hombre siempre tras la verdad como tras la fortuna, cuando ha creido alcanzarlas, vuelan como el tiempo; se le escapan como las ilusiones; huyen los descubrimientos á veces delante del que los busca, aunque en otras se le presenten á la mas leve reflexion; porque la Providencia, y no la prudencia humana, es la que hace

adivinar y conseguir las cosas útiles, y el acaso proporcionará un dia lo que se ha negado al trabajo de muchos siglos: que en ocasiones, la casualidad acierta lo que yerra el cuidado y la atencion.

¡Desdicha es de las ciencias físicas y naturales no gozar el raro privilegio de las exactas, cuyas verdades tocan á la evidencia, y una vez adquiridas son conquistas hechas para todos los siglos, y quedan á cubierto del influjo del tiempo y de las vicisitudes! ¿A qué altura no podrian verse hoy las naturales, si poseyesen aquella prerogativa, con los trabajos de tantos sábios como de ellas se han ocupado, mas los que hoy con tanto esmero y talentos las cultivan en toda Europa? Pero á semejanza del Protéo de la fábula, vense estas ciencias revestidas de tiempo en tiempo de una nueva faz, y es que las verdades de hoy dejan de serlo para mañana, y que los descubrimientos en ellas suelen ser meras galas de que transitoriamente se revisten y disfrazan, sin dejar nunca de dar materia á nuestras investigaciones: así no cesaremos de vernos obligados á dar nuevo giro á las teorías para esplicar los fenómenos, ni podremos confiar jamás en la certidumbre de nuestras pobres adquisiciones.

Dígase, si no, que son hoy las verdades sentadas por Tico y Ptolomeo para establecer sus sistemas planetarios, y las de Buffon y de La Meterie para sus teorías de la tierra. Las leyes sobre la óptica y la mecánica establecidas por Galileo, ¿no se eclipsaron ante el talento de Newton y la sagacidad de Euler? Como verdades se tuvieron las bellas cosas que dijeron Boerhave sobre la materia del fuego, D'Alembert sobre la causa de los vientos, y Priesley sobre la naturaleza del aire. Por ciertas se tuvieron las ingeniosas que presentó Muschembroek de la electricidad, Sthal y Lavoisier acerca de la combustion: y ¿qué concepto se forma hoy de los principios sentados para aquellas teorías? ¿Qué queda de verdad á las consecuencias emanadas de aquellos principios? Sin embargo, por esto no dejaremos de confesar el gran mérito de aquellos sabios, como tampoco negamos la sublimidad al talento del gran filósofo que aseguró ser cuatro los elementos de las cosas sublunares. Hoy, que pasan de sesenta, ¿habrá quien se atreva á fijar el número con semejantes desengaños, ni á afirmar que tales cuerpos no

son formados de otros mas simples? ¿Y quién osará negar que la que supo concentrar el carbono en el diamante, un dia nos presente una sustancia que se resuelva en electricidad? ¿Quién es capaz de calcular todo lo que pasa en ese inmenso laboratorio de la atmósfera, donde la naturaleza tiene en juego todos los metéoros, influyendo en las acciones de los seres orgánicos, que á su vez ejercen sobre los demás, para no esperar que los metales y otros simples de hoy resulten mañana compuestos de elementos ignorados?

Veo, Señores, que esta digresion me aleja demasiado, y temo abusar mas de vuestra tolerancia; conozco lo sublime del objeto de esta Asamblea literaria; sé el compromiso en que queda el que se afilia bajo sus banderas, y que cada individuo que acoje se obliga á cooperar á sus loables fines; pero ¿qué auxilio ni qué cooperacion puede prestar el que se halla desprovisto de las dotes precisas, ni qué puede prometer quien solo conserva restos de un vigor que ya se acaba?....

Mi amor á las ciencias, mi veneracion á cuantos las profesan, son los únicos títulos que puedo presentar para obtener vuestra benevolencia: y ya sentado entre vosotros, si no valgo para otra cosa, serviré para admirar el fruto de vuestros laudables esfuerzos.

Madrid 27 de junio de 1851.

José Martin de Leon.

DISCURSO

ACERCA

DEL CONTRAPESO QUE LAS CIENCIAS DE LA NATURALEZA,

Y SEÑALADAMENTE LA QUIMICA,

EGERCEN CON SUS PASMOSOS ADELANTAMIENTOS SOBRE LOS MALES QUE AFLIGEN A LA HUMANIDAD,

LEIDO POR EL DOCTOR

D. JUAN MARIA POU Y CAMPS

EN

la Sesion pública de su recepcion como Académico numerario, celebrada el dia 27 de junio de 1852.

Nam quoniam variant animi, variamus et artes:
Mille mali species? mille salutis erunt.

Ov. Rem. am.

Φύσει γὰρ εστ' ἔρως.

Menandro fr.

Señores:

Sobremanera agradecido por el honor que me dispensa esta Real Academia con admitirme en su seno; estrañamente perturbado por la obligacion que su Reglamento me impone en esta ocasion solemne; no sé por cierto del vasto campo de la ciencia á qué fecundo ramo acogerme, para presentar con el interés de alguna novedad, siquiera algunas flores de los muchos y opímos frutos que á manos llenas la humanidad recoge, y que tan profusamente contribuyen á madurar los dignos é ilustrados individuos de esta Corporacion científica.

Mucho habré menester, Señores, de vuestra indulgencia; porque ¿que podria yo decir, que podria yo pensar que no haya sido ya objeto

de vuestras meditaciones? ¿que pudiera tener visos de alguno aunque escaso aliciente? Diversos por ventura son los ramos á que cada individuo de esta ilustre Corporacion se consagra; pero tan íntima es su conexion, tanto están entre sí ligados, como que de un mismo tronco reciben la vivificante sávia, que esto mismo me desanimaria hasta hacerme abandonar mi empresa, si ya la natural benevolencia del sábio, benevolencia que al conducirme á tal punto y sazon me habeis ámpliamente dispensado, no acallára mis justos y demasiado bien fundados temores. El contrapeso que las ciencias de la naturaleza, y señaladamente la química, egercen con sus pasmosos adelantamientos sobre los males que afligen á la humanidad, será, pues, el tema que procuraré, aunque en rápido bosquejo, delinear; que ni el espacio dá mas largas, ni á la ilustracion de la Academia convienen tampoco sino indicaciones, aunque en materias de tanta ó mas grave y filosófica trascendencia.

Oromazo y Ahrimanes se disputan el imperio de la tierra. Luchan el bien y el mal en eterna sangrienta guerra, sin tregua y sin descanso, y ya desde el primer origen del mundo; y hasta el último suspiro de la naturaleza, y solo con su total ruina, la desigual y fiera lucha podrá cesar. Espantosas catástrofes trastornaron la faz del mundo preadamítico, destruyendo su masa, renovándola, transformándola en su esencia y en sus formas, en su centro y en su periféria, en sus leyes y en su armonía: á la dilatada série de épocas entre sí tan diversas, tan turbulentas, sucede por fin otra mas regular, mas armónica y mas simétrica; amanece la aurora suave del hombre, y nuevo orden de cosas mece la cuna de la criatura mas perfecta de la creacion. Todo parece inaugurar la regularidad, la próspera bienandanza, la felicidad. ¿Ha sucedido así? ¡Ay! que del Edén antiguo sola se conserva la memoria; y del malaventurado arbol de la ciencia del bien y del mal, ¡cuán amargos frutos la generacion del hombre ha recogido!

Cierto es que sometido á leyes regulares el globo en que habitamos gira tranquilo en rededor del gran luminar que le anima, sin esperimentar ya mas que leve sombra de los grandes trastornos que á la actual época precedieron: verdad es que así deberá de proseguir hasta

tanto que llegue el punto fijado por el dedo del Altísimo, en que la final catástrofe que debe ponerla el sello fatal e improrrogable, destruyendo con el hombre todo lo existente, dé terrible complemento al mundo actual, para que de él surja y tenga origen otro nuevo orden de cosas. Pero en tanto los cataclismos, las convulsiones, las revoluciones y catástrofes morales y sociales, sustituyendo no menos sañudas á las físicas y materiales antiguas, caracterizan la época del mundo adamítico; durante la cual, si descansó el Omnipotente de sus obras anteriores, harto se cansan y se agitan las pasiones en no interrumpido é interminable choque, cambiando, renovando y destruyendo la faz de los imperios y de las sociedades, para de nuevo destruirlas, renovarlas y cambiarlas, en beneficio algunas veces, en notable detrimento y perjuicio no pocas de la triste humanidad.

Ha dicho algun filósofo, que la suma de bienes y de males es siempre la misma en este mundo, no de otra suerte que es siempre la misma la cantidad de materia: solo que á la par que desigualmente repartida y en varias y distintas formas transmutada esta; no menos diversamente aglomerados unos y otros en varios puntos, diseminados, esparcidos en luengas y remotas regiones ora, se manifiestan ora acumulados y recíprocamente contrapesándose, y ora entera y totalmente separados, por decirlo así, aquí triunfan los unos, acullá vencen los otros; sin estorbo, sin trabas y sin freno los males; sin contrariedad, sin impedimento, sin lucha los bienes; en perpétua y no interrumpida sucesion y movimiento. Si no fuese tal la exacta y genuina espresion de la verdad, todavía pudiéramos decir que no hay mal que por algun bien no quede compensado; como ni tampoco bienes algunos, por grandes que sean, no existen nunca, que por males igualmente grandes y no menos fecundos por desgracia nuestra, no queden amargados. Que no le es dado acá abajo disfrutar al hombre de contentamiento puro y sin mezcla, ni de felicidad que de algun dolor ó sinsabores no vaya acompañada: tal es de mezquina la condicion nuestra y de menguada, y tan deleznable y tan precaria la vida del hombre en la tierra.

Fecundo es nuestro siglo, y con harta razon puede gloriarse en descubrimientos y en progresos científicos de no escasa importancia

y valer: mas en recompensa, ¡de qué graves desastres no se vé abrumado; de cuántos y de cuán inmensos males no se mira circuido! Por manera que si á beneficio de los rápidos y grandes incrementos artístico-científicos á que hemos llegado, pudiéramos caer en la tentacion de ensoberbecernos, por la suma de bienes materiales que á poca costa nos proporcionamos; de lo cual se sigue que el hombre del pueblo pueda disfrutar hoy de goces vedados antiguamente é imposibles á la mas fastuosa opulencia, de goces que hubieran parecido fabulosos simplemente enunciados un dia, ¡á cuán cara costa los pagamos por otra parte, y cuán humillados no deberemos doblegar la cerviz orgullosa, si consideramos la inmensidad de males que nos agobian, de peligros que nos asédian; las necesidades siempre crecientes; el dolo, los fraudes, la envidia, la avaricia, la corrupcion invasora siempre que nos amenaza, que nos persigue, que nos destruye, que amaga acabar, no ya con los individuos, sino con la sociedad misma, para de nuevo sumergirnos en la mas espantosa barbarie, y hasta de antiguos y remotos siglos desconocida!

Así los esfuerzos de las ciencias benéficas y amigas del hombre, los esfuerzos mismos que para el bien están haciendo, en su daño no pocas veces se convierten; sirviendo para su destruccion lo que para alivio de sus males, aumento de sus goces y conservacion de la vida se habia destinado.

Próvida la madre naturaleza, donde quiera nos ofrece con la mayor profusion el metal entre todos el mas útil y precioso; el único entre todos inocente y de suyo inofensivo, bajo cualquiera forma que se presente: y el hombre desde luengas edades ha transformado en instrumento mortífero y de horrenda destruccion al hierro, del cual la medicina se vale para sanar mil dolencias, del cual la agricultura, las artes y las ciencias tan inmensos recursos sacan en pro y en utilidad de todas nuestras necesidades, y hasta de nuestro lujo y de nuestros placeres. El carbon, manantial inagotable del cual tantos beneficios recogemos, sin el cual no podria existir la culta sociedad; los salitres y el azufre, fuente perene de su industrial riqueza y prosperidad, en espantoso instrumento de destruccion están convertidos: y si bajo esa

forma satánica prestan no obstante beneficios considerables al hombre, desmontando terrenos y canteras, abriendo ricos veneros en las entrañas de la tierra, trazando caminos, surcando canales, salvando grandes y costosos obstáculos á los manantiales de la pública prosperidad; todavía pesan mas acaso en la balanza de lo justo los crímenes por el infernal invento perpetrados, los desastres, las devastaciones, ya casualmente ya de intento, con el mismo ocasionados; en tanto que á sus aplicaciones útiles, no pocos, al paso que graves inconvenientes están aún anexos.

En breve período de años inmenso espacio la química ha salvado, para colocarse en primera línea entre las ciencias bienhechoras de la humanidad: y malvados sin embargo han estudiado de ella lo bastante para cometer los mas horrendos atentados; y gente venal y corrompida, abusando como siempre de lo mas sagrado, han hecho detestable aplicacion de sus principios para corromperlo todo, para adulterarlo todo, para envenenar al público y á los particulares, para satisfacer las mas sórdidas pasiones, la vil codicia, la avaricia detestable, no menos que los abominables mónstruos de la envidia y la venganza.

Al compás que las ciencias benéficas de la naturaleza han ido progresando, no parece sino que han ido tambien en aumento los males morales y físicos. ¿Será, pues, que estos estén en razon directa de los adelantamientos de aquellas, y no ya en la inversa, como se pretende? ¿Será, que imposible en la tierra el progreso absoluto del bien, deba siempre neutralizarle el del mal, ya que no contrapesarle y acaso destruirle? ¿Sería, pues, que debiese el hombre abandonarse á la inercia, y esperar su dicha y su bienestar de la negacion, de la árida y desconsoladora negacion de todo? ¿Sería acaso que para salvarse la sociedad, la sola y triste áncora, á que debiéramos amarrarnos fuese la barbarie?

El término, el último refinamiento de la civilizacion, aumentando los goces y con ellos las necesidades del hombre, le ha hecho voluptuoso, le ha afeminado, le ha corrompido, y surmergiéndole en el lujo y la molicie, ha concluido por último con la sociedad misma, entregándola raquítica y enervada á merced de la robusta y destructora barbarie; la cual inficionada á su vez con los emponzoñados hálitos de los vencidos, ha contraido lentamente sus mismas enfermedades morales, ha caido

en su misma consuncion y honda gangrena, para acabar en la sucesion de los tiempos con un fin no menos lamentable y desastrado.

No es empero la ciencia responsable de males tantos y tan graves; no: la supina ignorancia en todas sus faces, la ignorancia siempre presuntuosa, es antes bien y sola ella la causadora de todas las desgracias de la sociedad. Y cuando esto decimos, no solo por ignorancia queremos significar la carencia total del saber, sino y tambien, y harto mas especialmente, esa ciencia dimidiada, ese saber á medias y en embrion, por decirlo asi, tan fastuoso, tan hinchado, tan vano y tan satisfecho de sí mismo; que por nada cuenta con las agenas luces; que en nada tiene la íntima conexion de todas las cosas; que se envanece con el mas necio orgullo por lo poco que posee, contemplando con el mas altivo desdén y menosprecio lo mucho, lo infinito que en su estéril capacidad no puede contener. De ese saber raquítico y miserable, y que á pesar de su diminuta estatura, cree en su delirio gigantesco abrazar con sus cien brazos la inconmensurable estension de lo creado; y á pesar de su miópia penetrar con vista de águila el por qué, la razon y las causas de todo cuanto bajo del sol y por cima de él existe. ¡Pobre ignorancia, que no pudiendo llegar al *sapere ad sobrietatem,* en su lastimosa indigestion ha contraido las diversas y mortales enfermedades que han agobiado á la mísera humanidad, segun la clase de fanática intolerancia que la ha aquejado, segun los colores del engañoso prisma de que se ha dejado fascinar! Graves dolencias y mortales todas, que por tantos y tan diversos modos han afligido la haz de la tierra y la afligen todavía, conmoviendo hasta los mas sólidos cimientos de los reinos mas poderosos, y amenazando destruir la sociedad entera, y anonadarla y sumergirla en un cáos de horrenda confusion y oscuridad.

Todavía sin embargo luce el faro de salvacion al través de las opacas y densas nubes de la tempestad: el ronco y aterrador bramido de los elementos desencadenados nos ensordece; mas no tanto por dicha que no se deje percibir la celestial armonía que en el puerto de nuestros deseos nos promete el ansiado reposo, el tranquilo y sólido remedio á tantos males. Enormes son los que nos abruman; mas por felicidad, á su lado mismo surge el correctivo; al estremo opuesto de la

palanca se aferra el contrapeso que los aligera, que nos salva. Búscale afanosa la generacion presente, y no halla defraudada su esperanza en los maravillosos beneficios que en el vasto campo de las ciencias de la naturaleza recoge; en los fecundos y rápidos descubrimientos, en las salvadoras aplicaciones que de todos y de cada uno de sus ramos á cada paso y sin cesar se hacen. Y entre tanto hacinamiento, si es permitido decirlo asi, entre tal cúmulo de pasmosos y benéficos adelantamientos, ¿queda por ventura rezagada la química, sin contribuir con sus luces, sin aumentar el acervo comun con sus admirables riquezas? No por cierto.

Entre las grandes y fecundas aplicaciones de principios científicos, sin duda son admirables para los progresos de la industria y de la civilizacion las del vapor á las máquinas, á los buques, á los caminos de hierro; medios poderosos de creacion, de comunicacion y de locomocion, cuyos inmensos resultados sería del todo imposible enumerar: empero la telegrafia eléctrica descuella tal vez entre todas como la elevada palmera del desierto, sobrepujándolas por su importancia; en tanto que, á pesar de cuanto en contra se haya dicho, no ha hecho derramar al hombre una lágrima siquiera; al paso que en la historia del vapor industrial y de los ferro-carriles, estensas cuanto fúnebres páginas escritas con sangre de sus víctimas, hacen estremecer todavía á la triste humanidad. La inconcebible rapidez, la casi instantaneidad de comunicaciones por la telegrafía eléctrica solo beneficios proporciona; y desde que D. Francisco Salvá presentó su telégrafo en Madrid en 1796, sin que tuviese consecuencia positiva el prematuro fruto de su estudiosa laboriosidad, hasta la maravillosa, nueva y fecundísima aplicacion del P. Tschopp, sábio benedictino suizo (*), ni un solo fruto ha produ-

(*) El P. Atanasio Tschopp, decano de la Abadía de Einsiedlen, acaba de hacer un descubrimiento muy importante para la telegrafia eléctrica. Con el concurso de un mecánico de las cercanias ha llegado á construir un aparato para escribir, cuyos resultados son de una perfeccion superior á cuanto hasta ahora se ha visto, pues no solamente es muy legible la escritura reproducida inmediatamente en el papel, sino que es tan elegante como la mejor prueba litográfica. La Gaceta de Schwytz, que refiere el descubrimiento del sábio benedictino, enumera las muchas ventajas que presenta, y llama sobre él la atencion de la Comision federal encargada del establecimiento de la telegrafia en Suiza.

cido que no sea sazonado, que no redunde en beneficio del público y de los particulares, en pro y en honra del Estado y de su seguridad.

Y ya que de electricidad estamos hablando, de este poderoso agente de la naturaleza, destinado tal vez á cambiar un dia la faz actual del mundo, cuyo porvenir inmenso en sus aplicaciones químicas comprendió el primero el célebre Humphrey Davy, ese famoso químico salido de un oscuro laboratorio de farmacia de Penzance, del Condado de Cornouailles; de ningun modo debemos dejar que pase desapercibida la híbrida galvanoplastia. No menos fecundo tal vez en provecho real de la humanidad, aunque segunde por otra parte y multiplique hasta lo infinito los costosos caprichos del lujo y de la fastuosidad; mas amenazador para ella con todo se presenta este arte, llevando consigo el amago de inminentes peligros, de terribles y espantosos trastornos, que pudieran hasta conmover la sociedad entera: descubrimiento interesante, si los hay en nuestra época, por el número y la variedad, por la estension y la novedad de que es capaz en sus aplicaciones.

Benéfico á la vez por un lado, transforma en arte inocente y agradable con el dorado químico una profesion de suyo antes tan perniciosa, tan insalubre y tan mortífera como la del dorador de metales; abriendo nuevas y desusadas vias de prosperidad á las bellas artes, al comercio y al uso creciente de los metales preciosos: pero de otro fiera palanca de destruccion y lamentables ruinas, prestando al fraude y á la avaricia medios antes desconocidos y ni siquiera posibles de imaginar, pone un arma de tremendo invencible poder en manos del falsario, del monedero falso, del envidioso, del vengativo, del ambicioso, y de todo enemigo de las cosas y de los poderes constituidos, con la cual, é inevitablemente, pueda llegar á derrocarlos, á destruirlos y anonadarlos, sin que recurso humano quede fuera de la ciencia, para ponerse á cubierto, para desviar de sí tamañas maldades.

Inmenso es, pues, el poder de la ciencia electro-química, de esta nueva productora de bienes y de males, no menos grandes, no menos fecundos tal vez unos que otros, si no mas. Cultive por tanto y con esmero los unos; y ya que no pueda arrancar los otros de raiz, cuide á lo menos de neutralizar los zumos envenenados que deberian destilar

sobre la sociedad, puesto que puede y debe hacerlo. Y puesto que puede y debe perfeccionar los medios de conjurar el no menos inmenso peligro que tan inopinadamente evocó, sepa recoger á manos llenas los frutos sazonados y nutritivos de su arbol, y alejar y poner fuera del alcance del crímen los malditos y emponzoñados que á tan nefastos usos pudieran destinarse.

Menos amenazador, como mas lúcido y tranquilo, aunque no del todo inocente, se nos ofrece el arte admirable de la fotografía. Desde que apareció con general admiracion, como simple auxiliar y concurrente de las bellas artes, pudo ya echarse de ver cuán útil no sería su asociacion á los trabajos de la arqueología y de la cosmografía: mas era muy poco sin duda lo que á primera vista se pudo concebir; y por ventura es poco todavía lo que de la pintura fotogénica se puede realmente esperar, sin embargo de haber servido ya de mucho en sus trabajos á la física, á la química y á la historia natural. La fotometria con su auxilio ha inventado ingeniosos métodos, inapreciables por su exactitud matemática, evaluando la intensidad relativa de las luces solar, de las estrellas y de la luna, y comparando con fabuloso rigorísmo numérico los deslumbradores rayos del sol con los prestados y 300.000 veces mas débiles de la luna: y en el laudable afan de aplicaciones industriales se ha recurrido á los mismos medios para estudiar comparativamente las principales fuentes luminosas, asi naturales como artificiales, por los Sres. Fizeau y Foucault.

Becquerel en Francia, Herschell en Inglaterra, Moser en Alemania, Draper en América, ocupándose en el estudio de la accion química de la luz ante-meridiana, distinta por muchos caracteres de la post-meridiana, han construido varios instrumentos, denominados *actinógrafos*, á propósito para apreciarlos por medio del bromuro argéntico, cuyo grado de alteracion sirve de medida para la intensidad de la accion química de la luz solar en cada período del dia: abriendo así nuevo campo á descubrimientos futuros del mayor interés acerca de la esencia real del agente luminoso, de sus efectos físicos y químicos, y de su naturaleza íntima.

Y por último, en el laboratorio de Greenwich hace años están en

uso instrumentos meteorológicos de tan ingenioso artificio, que registran por sí propios y llevan cuenta de sus mismas observaciones (de cuya admirable aplicacion fué autor el Dr. Brooke), señaladamente para las observaciones barométricas y magnéticas. La aguja indicadora se pinta en la superficie de un cilindro giratorio, que da una revolucion completa en cada 24 horas; el cual, preparado fotogénicamente, conserva el trazo contínuo del indicador, presentando una curva, cuyas ordenadas indican el estado del instrumento en la hora señalada por la abscisa correspondiente.

Antes que las ciencias físico-químicas hubiesen creado la aereostacion, imposible hubiera parecido que el hombre pudiera remontarse hasta donde no alcanzan las aves de mas alto vuelo: y antes de los arriesgados esperimentos de Robertson, Saccharoff, Gay-Lussac, Barral y Bixio, nadie sin duda hubiera creido posibles mas que desgracias, llanto, desolacion y luto, como frutos desventurados del último arrojo de las ciencias, llevado al parecer mas allá de la locura.

Mucho dejan en verdad que desear tan atrevidos esperimentos; sin embargo mucho se puede todavía esperar de esa aplicacion azarosa, y solo de ella, que es mas, pueden surgir los medios de resolver altas cuestiones físicas, astronómicas y químicas, de no escaso porvenir para el progreso de las ciencias y de sus aplicaciones. Las leyes de sucesivo decremento de temperatura, de humedad y de densidad á medida que nos elevamos en la atmósfera; la composicion de la misma y proporciones diversas de sus factores; la diferencia de refrangibilidad; la ley de propagacion del sonido; y si es exacta la fórmula de Laplace así en las capas atmosféricas verticales, como en las horizontales; la permanencia, ó no, y hasta qué alturas, y bajo que modificaciones, de la fuerza magnética del globo; la opinion de Francklin acerca de las corrientes inversas y constantes, especie de monzones, una inferior y fria de los polos al ecuador, superior la otra, del ecuador á los estremos de la tierra (descubrimiento de inmenso porvenir para la navegacion aérea, y que tal vez puede resolver por sí solo este problema que está ahora en moda) de aquel arte aventurero, cuanto maravilloso y arriesgado, pueden solo esperar la correspondiente solucion.

Por otra parte, el alumbrado del gas es otra de las consecuencias, y en verdad muy sencilla, de los descubrimientos químicos de últimos del siglo pasado. James Clayton habia hecho la primera observacion científica relativa á los gases combustibles de la ulla, que mas tarde debia realizar Wat en Birmingan en provecho de la industria: y hoy en dia nadie desconoce ya las grandes ventajas que trae consigo al por mayor el alumbrado de gas, removiendo al paso los muchos inconvenientes de toda suerte, inseparables del antiguo; sin que dejen de entrar en cuenta las mismas eventualidades y peligros de incendio, que mas por el moderno que por el antiguo método se evitan. Hay mas todavía respecto á la parte económica, que sigue anexa á la mayor pureza del gas; porque empieza tambien la industria á sacar no despreciables beneficios de las aplicaciones que ya Winsor habia vislumbrado que de muchos de los diversos productos de la destilacion de las ullas podian hacerse, á saber, de los asfaltos, betunes, aguas amoniacales y demás. Hasta tanto, pues, que la luz eléctrica no llegue á destronar la luz gaseosa, y aun entonces y con creces, podrá gloriarse la ciencia de las ventajas reales y positivas con que recompensa al hombre en lo posible de tantas amarguras y sinsabores como por todos lados le asédian.

¿Y qué diremos del descubrimiento del piroxílo, ú algodon-pólvora, cuyos inconvenientes y ventajas tanto se han ponderado, queriéndolo ensalzar unos hasta las nubes, para verse deprimido, rechazado y hundido por otros en el fango? Acaso los que tan encontrados pareceres han emitido tengan en parte razon. Acaso en los combates produjera mas desastres aun que ventajas de él pudieran conseguirse. En tal caso, instrumento de muerte debe proscribirse tal vez; pero agente de prosperidad y de vida, deba dársele cien y mil veces la bienvenida.

Sin embargo, si como agente balístico presenta en realidad los graves inconvenientes que tanto han ponderado otros mejor que los artilleros franceses, no se eche en olvido que Berzelius, tan competente en la materia! asegura que ni en Suecia ni en Inglaterra ha ocasionado en este concepto ningun accidente sério.

Por otra parte, infinitas parecen ser las ventajas para la esplotacion

de minas, segun Combes y Flandin, de un cuerpo que inflamado se transforma instantáneamente y sin resíduo, en fluidos elásticos que se espanden hasta ocupar en volumen 8000 tantos mas que el primitivo, sin humo y sin olor, con una fuerza cinco ó seis veces mayor que la de la pólvora ordinaria empleada para los barrenos. El solo inconveniente que en tal caso presentaria, y por cierto de harta gravedad, cual es el de producir mucho óxido carbónico, gas á la vez deletéreo é inflamable, desaparece sin embargo con la simple adicion de 8 por 100 de salitre; con lo cual queda el gas oxidado á beneficio del oxígeno del ácido nítrico, y transformado en carbónico; al paso que todavía aumenta con esto la fuerza espansiva del piroxílo y adquiere un poder de siete á ocho veces mayor que el de la pólvora de minas.

Empero el factor temeroso que en su furia amenazaba aumentar de un modo deplorable el catálogo de los medios de destruccion, se ha convertido felizmente en aura benigna y suave de vida, en precioso remedio para los males que afligen á la humanidad; en inapreciable correctivo contra los desafueros de la guerra, contra las desgracias ocasionadas por los demás inventos industriales, contra todas las lesiones, traumáticas sobre todo, que en las diversas faces de su trabajosa carrera pueden atentar contra la existencia de la mísera humanidad (*). Queremos hablar del *Colódion*, de la nueva consoladora forma del piroxílo, descubierta en Boston por el médico Maynard, al ocuparse de sus propiedades químicas en bien y en pro de sus semejantes; y de que tanto provecho para las ciencias médico-quirúrgicas en abundante cosecha se puede recoger. Disuelto en éter el piroxílo adhiere á la piel con fuerza tal que enormes pesos no bastan para despegarlo; y mientras que la herida queda resguardada del aire y de los agentes esternos, contraidos sus labios con regularidad y fuerza; como resiste aquel á la accion del agua y de los humores animales, y es transparente al propio tiempo;

(*) Ainsi, chose remarquable, le composé que ses propriétés explosives semblaient destiner à étendre la liste des plus terribles agents de destruction, se présente aujourd'hui, modifié à peine dans sa contexture, parmi les nouveaux moyens curatifs qui protégent la vie des hommes. (Payen, *Chim. industr. org.* 1851.)

puede el facultativo lavar al enfermo y examinar, sin molestia y perjuicio, el estado de las partes subyacentes, y seguir los progresos de la adherencia, de la curacion de la herida, de la úlcera, de la lesion, cualquiera que fuese.

¡Loor á la ciencia que del mal produce el bien, y hace que del instrumento de destruccion salga el remedio, y de la muerte misma surja la vida! ¡Loor mil veces á las ciencias de la naturaleza en general, y á la que penetra en el interior de los cuerpos en particular, para arrancarles su secreto y sus misterios en bien de la pobre y afligida humanidad!

El grande Hipócrates decia que es obra divina mitigar el dolor. El descubrimiento del método anestésico, con que la química ha enriquecido á la cirugía, y por el cual á la espantosa tortura de sus sangrientas operaciones se sustituye, no solo la insensibilidad, sino y tambien hasta el placer, sobrepuja en esta parte los límites de todos los inventos de la ciencia del hombre. El éter y el cloroformo, semejantes al óxido nitroso ó *gas alegrador* de Humphrey Davy y al *hachache* de los orientales, no solo moderan, suprimen, destruyen, anonadan con su bienhechora influencia los dolorosos efectos de las vivi-secciones quirúrgicas; sino que sustituyen al dolor una especie de éxtasis, por decirlo asi, un estado particular y desconocido de placer sensual y de bienestar moral, de un modo infinitamente superior á todo cuanto los antiguos nos habian transmitido con sus métodos narcóticos y estupefacientes: y esto que en la edad media estaba muy adelantado por cierto el arte de los soporíferos, que destruian durante un tiempo dado toda sensibilidad.

¿No hubiera parecido en realidad una quimera pretender amputar un miembro, sajar las carnes, destrozar las entrañas, para estraer un cálculo; ó de otra suerte disecar prolija y espantosamente los tegumentos, los tegidos, los nervios del miserable paciente, para arrancarle un ojo; y lograr que al tiempo mismo, indiferente aquel á su propia destruccion, gozase mas bien de sensaciones voluptuosas, sin embargo de seguir á veces en sus trámites, en sus sonidos y vibraciones las líneas que el hierro destructor recorria al cortar, sajar, punzar, des-

truir, arrancar y dilacerar sus atormentadas partes (*)? Y sin embargo, del laboratorio de un químico salió vencedora la inconcusa prueba de tal posibilidad. Desde el descubrimiento de Davy, las inhalaciones gaseosas, primero de óxido nitroso, despues de éter, eran frecuentes en cursos y en laboratorios químicos; de suerte que ya en 1815 se describia el aparato á propósito para respirar el éter con el objeto de producir la insensibilidad (**).

¿Y quién sería que pudiese con razon dudar de la utilidad inmensa, imponderable, del método anestésico? Mientras tanto que el dolor sea un mal, tendrán inmenso precio todos los medios capaces de combatirle, de hacerle desaparecer, de impedir que nos aflija y que agrave nuestras dolencias. Y de todos los dolores, los que acompañan al hierro y al fuego en las operaciones quirúrgicas, son, á no dudarlo, de los mas atroces, de los mas crudos y terribles: y el dolor es padre de la muerte; y los grandes hombres de la ciencia, no pudiendo negarlo, no pudiendo desconocerlo, ellos mismos asi lo afirman, lo proclaman á voz en grito; lo sientan como un principio irrecusable, para la enseñanza, para las precauciones con que se debe de obrar en todo lo que tiene alguna relacion con aquello mismo que no pueden evitar (***). De mofa y escarnio serían dignos aquellos desdichados operadores que sientan como principio las ventajas del dolor, si ya no lo fuesen mas bien de lástima, por el desarreglo de las funciones nor-

---

(*) Éviter la douleur dans les opérations est une chimère qu'il n'est pas permis de poursuivre aujourd'hui. Instrument tranchant et douleur en Médecine opératoire, sont deux mots qui ne se présentent point l'un sans l'autre à l'esprit des malades, et dont il faut nécessairement admettre l'association. (Velpeau, *Traité de Médecine opératoire*, 1839.)

(**) Il consiste (l'appareil) en un petit flacon de verre à deux tubulures, à moitié rempli d'éther. L'une des tubulures reçoit un tube qui s'ouvre d'une part dans l'air atmosphérique et plonge de l'autre dans l'éther. L'autre tubulure opposée à la précédente, est courbée en arc, de manière que son extrémité, devenant horizontale, le malade la reçoit dans sa bouche, et c'est par elle qu'il respire. L'air atmosphérique introduit par la première tubulure traverse l'éther et s'imprègne de sa vapeur, qu'il porte dans les voies respiratoires. (Nysten, *Art.* Ether, *Dictionnaire des sciences médicales*, 1815.)

(***) La douleur tue comme l'hémorragie. (Dupuytren.)

males de su pobre cerebro. ¿Podrian ignorar por ventura cuántas veces el solo dolor asesina, y dejar por tanto de sacar en consecuencia, que si el dolor es el amarillo padre de la muerte, la anestésia debe de ser la blanda madre de la vida?

Pero Flourens habia dicho, que si el éter sulfúrico es un agente maravilloso y terrible, todavía el cloroformo es mas maravilloso y terrible: así que la estraordinaria actividad del último puede estinguir la vida con la sensibilidad. Conviene sin embargo distinguir entre los agentes y el método anestésico, si ha de resolverse filosóficamente la cuestion, puesto que de suyo es complexa, y tiene dos caras muy distintas entre sí; por cuanto nada prueba contra el método el uso ó el abuso de uno ó mas de los que actualmente se conocen. Mr. Roux evalúa en 100.000 los individuos que tanto en Europa como en América han sufrido la anestésia en la práctica quirúrgica hasta marzo de 1850, esto es, en cosa de tres años; y solo cuenta de doce á quince casos desgraciados, de los cuales no se puede juzgar aún con pleno conocimiento de causa: en tanto que Velpeau asegura de sí mismo, que sobre 500 casos de su práctica particular ningun accidente desgraciado ha tenido que deplorar nunca.

Ultimamente parece amanecer en el horizonte científico una nueva forma anestésica local, que si progresa como es de suponer, acaso produzca en lo sucesivo grandes resultados. El licor de los holandeses y el éter clorhídrico clorado parece que han dado al profesor Aran resultados que inducen á esperar con algun fundamento, que no será infructuosa esa nueva via.

Y no es solo á título de pública utilidad, no es solo como apreciable servicio hecho en alivio de los males inherentes á la mísera humanidad que debe figurar la eterizacion en primera línea entre los descubrimientos contemporáneos; por cuanto transportados al dominio de la filosofía los estudios esperimentales de este orden, pueden llegar á ser nuevos é inagotables manantiales, de donde la psicológia venga á sacar desusados recursos para penetrar en los recónditos misterios en que todavía están envueltas las relaciones que median entre el alma y el cuerpo, entre la vida y el espíritu. "La cuestion de las

inhalaciones del éter (dice Velpeau) adquirirá proporciones del todo imprevistas. El hecho que encierra es uno de los mas importantes que se hayan visto; un hecho del cual es imposible calcular la estension; que debe impresionar, remover profundamente, no solo la cirugía, sino y tambien la fisiologia, la química y hasta la psicologia (*)."

Grande es, pues, el contrapeso que las ciencias de la naturaleza, y señaladamente las químicas, egercen sobre los males que afligen á nuestra infortunada especie; y aun cuando otros beneficios de ellas no recogiera, todavía los que por deber y por gusto á las últimas consagramos la mayor parte de nuestras vigilias y de nuestra vida, ten-

---

(*) J'eus à opérer un homme vigoureux et fort, d'une tumeur qu'il avait au dessous de l'oreille gauche, et qui pénétrait le creux de la région parotidienne. Cette région, remplie de nerfs, de vaisseaux et de tissus filamenteux ou glanduleux très serrés, est une de celles (tous les chirurgiens le savent) où les opérations occasionnent le plus de douleur. Soumis à l'action de l'éther, le malade est tombé dans l'insensibilité au bout de trois minutes; l'opération était à moitié pratiquée sans qu'il eût fait de mouvements ou proféré des cris. Il s'est mis ensuite à parler, à vouloir se remuer, à nous prier d'ôter notre *camphre* qui le gênait, mais sans avoir l'air de songer à ce que je faisais. Une fois l'opération terminée, il est rentré peu à peu dans son bon sens, et nous a expliqué comme quoi il venait de faire un rêve, dans lequel il se croyait occupé à une partie de billard..... Quand à l'opération, il ne l'avait sentie en aucune façon, il ne s'en était point aperçu; seulement en invoquant ses souvenirs et ses sensations, il nous a soutenu qu'il *entendait très bien mes coups de bistouri, qu'il en distinguait le cric-crac*, mais qu'il ne les sentait point, qu'ils ne lui causaient aucune douleur.....

Une jeune fille sujette à des convulsions hystériques, et qui était venue à l'hôpital pour se faire arracher un ongle rentré dans les chairs..... l'opération qu'elle avait à subir est très douloureuse, et une de celles dont la vivacité des douleurs est en quelque sorte proverbiale..... l'inhalation produit son effet en deux minutes et demie. Je procède ensuite à la fente de l'ongle, dont j'arrache successivement les deux moitiés: pas un mouvement, pas un cri, pas un signe de souffrance ne se manifeste pendant l'opération; et cependant cette pauvre jeune fille paraissait voir et comprendre ce que je faisais, car, au moment où je m'apprêtais à lui saisir l'orteil, elle a relevé la tête, comme pour s'asseoir et en me regardant d'un air hébété..... Deux minutes après, elle avait repris connaissance, et nous a dit n'avoir rien senti, n'avoir nullement souffert.....

Un homme du monde, très impressionable, très nerveux, s'est trouvé dans la dure nécessité de se faire enlever un œil depuis longtemps dégénéré..... Cinq minutes ont été nécessaires pour amener l'insensibilité. Alors j'ai pu détacher les paupières, diviser tous les muscles qui entourent l'œil, couper le nerf optique, disséquer une tumeur adjacente, remplir l'orbite de boulettes de charpie, nettoyer le visage, compléter le reste du pansement et appliquer le bandage, sans que le malade ait exécuté le moindre mouvement, jeté le plus léger cri, manifesté la moindre sensibilité. Ce n'est que deux minu-

driamos mucho por qué felicitarnos, tendríamos mucho por qué considerarnos como recompensados, en gracia al bien que producen, de los afanes, y los contratiempos, y las privaciones, y los males, y las enfermedades mismas inherentes á su estudio. Afortunadamente hay mas todavía: que esta ciencia, altamente filosófica, profundamente bienhechora, al ocuparse de la composicion íntima de los cuerpos, al investigar las propiedades esenciales é inseparables de las diversas é infinitamente variadas formas de materia, al penetrar con incansable afan por entre las mas recónditas anfractuosidades de la creacion, sin arredrarse por los obstáculos, sin desmayar por la consideracion de la

---

tes après l'application de l'appareil qu'il est revenu à lui. Homme intélligent, d'un esprit cultivé, il a pu nous rendre compte de ses sensations, et nous a dit qu'il n'avait nullement souffert, qu'il n'avait rien senti; que par moments il s'apercevait bien qu'on lui tirait quelque chose dans l'orbite, qu'un certain bruit se passait par là, mais sans lui faire du mal, sans lui causer de douleurs. Il entendait bien aussi que je parlais près de lui, que je m'entretenais avec les aides; mais il n'avait point conscience de ce que je demandais, de ce que nous disions.....

Une foule de médecins et d'élèves se sont maintenant soumis aux inhalations éthérées, à fin d'en mieux apprécier les effets. Quelques uns d'entre eux s'y soumettent plutôt avec plaisir qu'avec répugnance: or tous arrivent plus ou moins promptement à perdre la sensibilité. Il en est quelques uns, deux entre autres, qui en sont venus, par des exercices répétés, à pouvoir indiquer toutes les fases du phénomène, dire..... ce qu'ils sentent, ce qu'ils ne sentent pas. Bien plus, chose étrange et à peine croyable, ils sont arrivés, en perdant leur sensibilité tactile, à conserver si bien les autres facultés intellectuelles, qu'ils peuvent se pincer, se piquer, et en quelque sorte se disséquer eux-mèmes, sans se causer de douleurs, sans se faire souffrir!

On le voit, il n'y a plus moyen d'en douter, la question des inhalations de l'éther va prendre des proportions tout-à-fait imprévues. Le fait qu'elle renferme est un des plus importants qui se soient vus, un fait dont il n'est déjà plus possible de calculer la portée, qui est de nature à impressionner, à remuer profondément, non seulement la Chirurgie, mais encore la Physiologie, la Chimie, voire mème la Psychologie. Voyez cet homme qui entend les coups de bistouri qu'on lui donne et qui ne les sent pas; remarquez cet autre qui se laisse couper ou une jambe ou une main, sans s'en apercevoir, et qui, pendant qu'on l'opère, s'imagine jouer au billard ou se quereller avec des camarades! Voyez-en un troisième qui reste dans un état de béatitude, de contentement, qui se trouve très à son aise pendant qu'on lui morcelle les chairs! Voyez en fin ce jeune homme qui conserve tous ses sens, assez, du moins, pour s'armer d'une pince et d'un bistouri, et venir porter le couteau sur ses propres organes: n'y a-t-il pas là de quoi frapper, éblouir l'homme intelligent par tous les côtés à la fois, de quoi bouleverser l'imagination du savant le plus impassible? (Velpeau, *Comptes rendus à l'Académie des sciences*, 1847.)

insuficiencia de esa pobre criatura que se llama hombre; al reunir, agregar, combinar las moléculas infinitamente distintas, infinitésimamente diversificadas de la materia, para simular, reproducir y entrar en competencia con las producciones de la naturaleza; y al separarlas, disgregarlas, esparcirlas, desunirlas, imprimiéndolas nuevas y distintas formas al arbitrio de su poderosa voluntad, en medio de nuestra misma pequeñez y miseria; á tan elevado punto de bienhechora grandeza ha llegado, que fuera de todo cálculo hubiera parecido el que de tanta insuficiencia de medios, tal cúmulo de tesoros reales y positivos en beneficio del hombre y para alivio de sus males, remedio de sus necesidades, castigo de sus enemigos, correctivo de crímenes y sostenimiento de la sociedad amenazada, en tan breve período de tiempo hubiesen podido surgir.

No es nuestro ánimo referirnos á los maravillosos adelantamientos de la química en cuanto es agricultora, en cuanto es artística ó industrial, ni menos considerarla por el lado de las economías doméstica y pública; no: mas alto rayan en este momento nuestras pretensiones; mas elevada todavía es en este punto nuestra consideracion. Nadie hay ya que ignore que sin la química propiamente dicha y debidamente considerada, ni hay verdadera fisiologia animal ni vegetal; ni hay verdadera medicina terapéutica y curativa; ni hay verdadera higiene; así como tampoco hay verdaderas mejoras artísticas: nadie hay ya que ignore que ni la química misma existiria en el estado en que se halla, y mucho menos pudiera como debe progresar, si con profunda intensidad á la perfeccion de sus medios analíticos, sin descanso y sin tregua y con ardoroso afan no se aplicára: empero lo que no todos saben; lo que hay entre todo de mas precio; lo que sobre todo radiante en esplendor benéfico se levanta; lo que vale mas incomparablemente que todos los adelantamientos artísticos, que todos los nuevos, ingeniosos, fecundos métodos de estraccion de metales preciosos, de riquezas arrojadas á la inestinguible sed de oro del siglo, sed rabiosa de oro que, invadiendo las sociedades, amenaza hundirlas en la mas espantosa disolucion; lo que vale mas que todo, decimos, es la escrupulosa, investigadora, incansable seguridad con que

se presenta al Estado, á los Gobiernos, á la humanidad entera, ofreciéndola los medios exactamente matemáticos de salvarla, de poner un dique á las malas pasiones, á la insaciable codicia, á la venganza que rie sentada entre ruinas; medios de descubrir sus infames arterías, sus horrendos atentados; y por tanto de cohibirlos, de neutralizarlos, de prevenirlos, de anonadarlos, de oponerse con buen éxito á tanta perversidad.

La terrible ciencia de los venenos, primera rama de la química que ha sido cultivada por los pueblos bárbaros, segun espresion de Sismondi, se ha transformado hoy en dia, en manos de la química analítica, en arbol frondoso, cuyos sazonados y opímos frutos no solo pueden conservar la salud pública, sino que restablecen la del particular que ha sido destruida, y son el sostén de la sociedad, contra la cual á cada paso y donde quiera se está atentando. Y si el crímen bajo cualquiera de los repugnantes aspectos de que se reviste, bajo cualquiera de las múltiples formas que toma, ha consumado por desgracia sus tenebrosos atentados; aun entonces, salvadora la ciencia de los tósigos, los combate, los persigue, y destruye tal vez, ó neutraliza sus mortíferos, emponzoñados brevages, ó á lo menos, poniéndolos de manifiesto, sacándolos á la clara luz del dia, previene, si no todas, muchas de sus desastrosas consecuencias: señala el punto donde está el mal; o descubre, lo desentraña, lo espone á la pública vergüenza; y persigue al criminal, y entrega atado de pies y manos al crimen á la execracion y á la vindicta públicas, de las cuales ya de hoy mas no podrá evadirse.

El arte de envenenar es el solo por fortuna que no ha progresado (*) en el sentido mas estricto de la palabra. Conocido desde la mas remota antigüedad, no parece sino que mas sutil, al paso que mas artera y mañosamente en la historia se le viera practicado, cuanto

---

(*) El Dr. Duncan, junior, decia que no es porque sepamos menos, sino porque sabemos mucho mas que los antiguos que el arte de los envenenamientos secretos parece que se ha perdido.

menos adelantada estuvo la verdadera cultura, y con ella los progresos de las ciencias esencialmente benéficas: sin embargo, la historia de los emponzoñadores es la historia de todas las épocas, de todas las edades, de todas las naciones. Abramos los poetas; leamos los historiadores: Homero y Eurípides, Higinio y Ovidio, Virgilio y Plauto, Juvenal y Petrónio, Herodoto, Diodoro de Sicilia, Estrabon y Tito Livio, Teofrasto, Plinio, Tácito, Suetonio y otros infinitos, nos dan en sus páginas, repetidas, lastimosas pruebas de la frecuencia con que soberanos y vasallos, fuertes guerreros y débiles mugeres, todos á porfía han manejado esa arma traidora para deshacerse de sus enemigos, para conseguir sus fines, para perpetrar horrendos y villanos atentados de toda suerte. Las historias persas, egipcias, griegas y romanas hacen erizar los cabellos. Mas si de la antigüedad nos trasladamos á la edad media, y hasta á tiempos muy próximos, mas cercanos á la edad en que vivimos, ¡qué de horrores no encontraremos todavía! La ponzoña sigue siendo una arma de guerra, una arma pérfida, alistada al servicio del poder, al servicio de todas las malas pasiones: y si el infando reinado de los Tiberios, de los Calígulas, Claudios y Nerones está manchado con crímenes innumerables de esta especie; no menos fecunda la Italia de la edad media (para no hacer mencion de los pueblos bárbaros) en asesinatos por el veneno, sigue asombrando al mundo con toda suerte de alevosías, con toda suerte de crímenes, al par de la Alemania, en donde el tósigo no perdona al trono; y de la Inglaterra, en donde Plantagenetas y Tudores lo manejan con infernal destreza; y de la vecina Francia, en donde desde Childeberto II, emponzoñado por Fredegunda, y de tantos otros soberanos, víctimas de los fatales brevages, hasta los procedimientos jurídicos de la famosa *cámara ardiente*, tantas maldades en este género se han perpetrado.

Pero ¿á qué fin sacaríamos de nuevo á la pública execracion los nefastos hechos de las modernas Locustas, la impía Tophana y la malvada Spara? ¿A qué los atroces atentados de la Marquesa de Brinvilliers y de las mas célebres envenenadoras de nuestros tiempos, Margarita Swanziger, que en el espacio de nueve meses cometió setenta envenenamientos en Baviera; la otra Gottfried, que durante los cin-

cuenta años de su vida en Brema, hasta el año 1828, asesinó envenenados hasta cuarenta infelices; la tristemente célebre madama Lafarge; esa desnaturalizada española, que con atroz sangre fria envenenaba lentamente á su marido y á los hijos que de él tenia, aunque la fortuna, descubriendo el crímen, salvase al primero de sus parricidas manos; y tantas y tantos otros criminales mas ó menos modernos aún, horror y abominacion de las generaciones pasadas, presentes y futuras?

¿Será el envenenamiento, pregunta un célebre toxicólogo, como una de las enfermedades de la humanidad, que sin dejar nunca de existir, aparecen de vez en cuando, semejantes á las epidemias, engendradas por un germen pérfido y propagadas por el contagio? Si tal fuese, no estaria por desgracia libre nuestra sociedad actual de enfermedad y de contagio tan malignos, tan temerosos; antes bien la maldad, la corrupcion, la depravacion de costumbres, siempre crecientes, siempre mas amenazadoras, hijas primogénitas del desenfreno y del olvido completo de nuestros deberes mas sagrados, no nos dejarian augurar sino muy tristemente acerca del porvenir tenebroso que nos espera. ¡Mas á Dios gracias, que en sus providenciales miras, al lado mismo del mal quiso benigno colocar el oportuno remedio! Los inmensos progresos de la química analítico-toxiconómica han conseguido echar por tierra las oscuras operaciones del genio del mal; y si hasta nuestro siglo todo se podia temer de un arte nefando, que en la lobreguez de sus cavernas habia llegado hasta la última perfeccion de su malicia, sin freno, sin trabas, sin correctivo de ninguna especie, ya que de nada podia servir la química entonces para sacar á pública luz sus perversas maquinaciones, para destruir el efecto de sus obras de tinieblas y de muerte, para descubrir y prevenir ó remediar las consecuencias de sus infames arterías; no es, no, así, por dicha nuestra, sino todo lo contrario en la actualidad, en esta actualidad por otra parte tan malaventurada.

La química toxicológica ha entrado ya en una nueva era, y tanto á pasos agigantados ha percorrido el glorioso estádio, que alcanzó con sus manos sencillos métodos de exactitud rigorosa para apreciar, co-

mo quiera y donde quiera que existan, en el seno del organismo y fuera de él, las mas insignificantes cantidades de los agentes de perdicion y de muerte. ¿Qué importa que esa sustancia penetre profundamente los sistemas todos del organismo; que la otra se dirija á órganos determinados; que la de mas allá siga por último distintas vias de eliminacion? Allí las buscará con planta segura el químico; allí las encontrará, aun cuando para comprobar el delito perpetrado se viesen las Autoridades protectoras de la sociedad, en la necesidad dura é imprescindible de violar la santidad del sepulcro, de perturbar el reposo de las calladas tumbas.

Y si por ventura llega un dia, que sí llegará, en que la química legal pueda aplicar con fruto á la investigacion de todas las sustancias tóxicas lo que ha conseguido practicar con un sinnúmero, y puntualmente con las mas usuales en ese arte dañado, las que mas temor debian por lo mismo infundir (*), ¿qué mas se le podrá exigir para proclamarla altamente bienhechora de la humanidad, y protectora en primer término de la sociedad ultrajada y fatídicamente amenazada?

Y por cierto que no en balde, repetimos, nos alumbra su antorcha. Horroriza el pensar tan solamente en el insondable cáos de maldades y de sofisticaciones, de fraudes y de miserias, y de adulteracion de todas las sustancias, de todas las cosas, hasta las mas necesarias, mas indispensables para el uso de la vida, y por consiguiente de los lamentables efectos que necesariamente se siguen de esa inestinguible sed de oro, que no perdona la salud ni la vida, no ya de individuos solamente, sino ni tampoco de la sociedad en masa. "¿Por qué motivo, dicen Garnier y Harel al felicitarnos por los estraordinarios pro

---

(*) Mais toutes ces combinaisons, et le corps primitif lui-même, ne sont connues que dans les laboratoires..... Disons toutefois que, fussent-ils mis en œuvre comme instruments de crimes, ils seraient, dans les débris d'un cadavre, aussi faciles à découvrir que l'arsenic même. *Il n'est plus pour la Chimie* D'ACQUA TOPHANA, *ou de* CANTARELLA *de composition impénetrable.* (FLANDIN, *de l'arsenic.*)

gresos de la industria, tenemos que deplorar la marcha tan rápida como espantosa de la falsificacion, de esa hidra de cien brazos que por donde quiera alcanza á cuanto se vende, y que del mismo modo desprecia el pan del pobre que los esquisitos alimentos del potentado?" Tampoco son los solos Garnier y Harel quienes se lamentan en el vecino reino de tanto fraude, de tanta falsificacion, de tal y tanta villana codicia y mala fe con que se adultera todo, desde el pan y el vino, desde los alimentos de primera necesidad para el sostenimiento de la vida comun, hasta los objetos que sirven para la satisfaccion de nuestros deseos, para la conservacion y restablecimiento de nuestra salud, para el egercicio de las artes, para todo, en una palabra; Chevallier, Payen..... ¿qué mas? cuantos autores se ocupan de química y de ciencias químicas en Francia, en Inglaterra y donde quiera, todos, todos á una voz se lamentan mas ó menos de esa infecta gangrena que se ha apoderado allí mas que en ninguna otra parte, donde quiera demasiado, de los corrompidos miembros de la sociedad actual. Gracias á que del mismo mal surja el remedio y la represion del mismo, ya que penetrando la química los mas recónditos misterios de la materia y de su modo de existir y de actuar, nos guarece con armas de tal y de tan fino temple.

Sontibus unde tremor, civibus inde salus.

Concluyamos, pues, con el célebre profesor de Giessen: "Sin el exacto estudio de la química y de la física, ni la fisiologia ni la medicina aclararán los problemas que son mas importantes, los problemas de las leyes de la vida; ni los medios de prevenir y de corregir las alteraciones que afectan el estado normal del organismo: sin este estudio no se conocerá profundamente la naturaleza de la fuerza vital..... La industria ha sacado inmensas ventajas de la química..... que es la base de la agricultura..... Sin conocimientos químicos, el hombre de Estado permanecerá estraño á la vida real de aquel, á su desarrollo orgánico y á su perfeccion. Su entendimiento no podrá tomar parte en lo que es verdaderamente útil al pais y á la humanidad, ni evitará tampoco lo que le es perjudicial."

Creo haber llenado ya lo que á mi propósito convenia. Graves, tremendos son los males que en nuestros aciagos tiempos aquejan á la generacion presente, á la sociedad entera: pero en sus altos designios la Providencia no nos ha abandonado al sicofanta destructor; y aunque es mucho, infinito lo que le queda al hombre por descubrir (*), esto no obstante, grande es ya y sobremanera consolador el contrapeso que las ciencias de la naturaleza, y señaladamente las químicas, egercen con sus maravillosos adelantamientos contra el poder de las tinieblas y de infausta desolacion que donde quiera pugna por hundirnos.

Mi satisfaccion, pues, sería completa, y nada me quedaria que desear, si al desempeñar mi compromiso pudiese estar yo seguro de no haber fatigado la atencion de la Academia, ni abusado de su paciencia. De todos modos, la cortesanía que distingue á sus dignos individuos suplirá, no lo dudo, por todo lo que á mí me pueda haber faltado.

(*) Multa venientis aevi populus ignota nobis sciet, multa saeculis tum futuris, cum memoria nostri exoleberit reservantur. (SENECA.)

Juan María Poú y Camps.

MEMORIA

SOBRE LA FORMA MAS CONVENIENTE

DE LOS TRIÁNGULOS GEODÉSICOS,

POR

EL SEÑOR DON ANTONIO TERRERO,

Académico numerario en la Seccion de Ciencias exactas.

Mucho se ha escrito acerca de la forma que mas conviene dar á los triángulos geodésicos. Cotes, Bouguer, Cagnoli, Delambre y otros han resuelto, ó han creido al menos resolver esta cuestion verdaderamente importante; y sin embargo, creemos falte aún no poco que decir en ella.

Puissant, Francoeur, Salneuve y varios modernos, suponiendo estar bien medida ó calculada la base b de uno de estos triángulos, y que en uno mismo ó en contrarios sentidos se hubiesen cometido en la observacion de sus ángulos, los errores iguales $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle C$, concluyen que debe ser equilátero el triángulo para que sean mínimos los errores

$$(1)\ \triangle a = a\,(\text{Cot.}A - \text{Cot.}B)\triangle A,\quad (3)\ \triangle a = \frac{2\,\text{Sen.}\,(A+B)\,\triangle A}{\text{Cos.}\,(A-B) - \text{Cos.}\,(A+B)}$$

$$(2)\ \triangle c = c\,(\text{Cot.}C - \text{Cot.}B)\triangle C,\quad (4)\ \triangle c = \frac{2\,\text{Sen.}\,(C+B)\,\triangle C}{\text{Cos.}\,(C-B) - \text{Cos.}\,(C+B)}$$

que resulten en los lados a y c (*) cuando se calculen con estos datos erróneos.

(*) Los (1) y (2) para cuando $\triangle A = \triangle C = \triangle B$, y los (3) (4) para $\triangle A = \triangle C = -\triangle B$.

Algun tanto gratuita nos parece en verdad la suposicion á que ha tenido que recurrirse para obtener estos resultados, si bien la razon confirmada por la esperiencia induce á creer probable, que mientras no varien el goniómetro y el observador, resulten aproximados, pero siempre en el mismo sentido, los errores $\triangle A$, $\triangle B$, $\triangle C$. Por esto y con razon dice el General Piobert, *que semejantes soluciones de casos hipotéticos no son aplicables á operaciones geodésicas delicadas.*

Como para venir á estas ecuaciones haya tenido que sustituirse por los senos y cosenos de $\triangle A$, $\triangle C$ y $\triangle B$, que no son infinitamente pequeños, los primeros términos de sus desarrollos, y que despreciarse además los $\triangle a\ \triangle B$ Cos. B y $\triangle c\ \triangle B$ Cos. B, que tampoco lo son de segundo orden; no puede en rigor concluirse de las (1) y (2) que tanto menores serán $\triangle a$ y $\triangle c$ cuanto mas se aproximen á ser iguales A, C y B, y que $\triangle a = \triangle c = 0$ cuando $A = C = B$; aunque sean estas otras tantas verdades demostradas exactamente por las espresiones

$$\triangle a = \frac{\text{Sen. } (A+\triangle A)}{\text{Sen. } (B+\triangle B)} \cdot b-a, \quad \triangle c = \frac{\text{Sen. } (C+\triangle C)}{\text{Sen. } (B+\triangle B)} \cdot b-c.$$

No hay, pues, duda en que mientras fuesen relativamente iguales los errores cometidos en la observacion de los ángulos, el triángulo equilátero daria con exactitud el valor de sus lados, y tanto menos diferentes de ellos cuanto mas se aproximase á dicha forma.

Pasemos á las ecuaciones (3) (4). Puissant y Francoeur deducen tambien de ellas, que serán mínimos los valores de $\triangle a\ \triangle c$ cuando $A = C = B$. Refiriéndonos á la (3) se ve, que la condicion $A = B$ no es seguramente suficiente para el mínimo valor de $\triangle a$ entrando dos indeterminadas A y B en su espresion; ó como dice Piobert, si $\triangle a$ disminuye con $A-B$ tambien disminuyen cuando se acerca $A+B$ á 0° ó 180°. Facilmente se ve que el menor valor de $\triangle a$ exije además la condicion de $A+B = 180^\circ$. Las condiciones precisas son, pues, $A = 90^\circ$, $B = 90^\circ$. Volviendo á considerar finitos los valores de $\triangle A$, $\triangle B$, la espresion

$$\triangle a = \frac{\text{Sen. } (A+\triangle A)}{\text{Sen. } (B+\triangle B)} \cdot b-a$$

exije únicamente para el menor valor de $\triangle a$ que $A+B = 180^\circ$. Ahora

bien, no siendo posible satisfacer á la vez en un triángulo finito á las dos condiciones $A=90^{\circ}$, $B=90^{\circ}$, ni á la única $A+B=180^{\circ}$, al aproximarnos á esta última ¿con cuál de aquellas deberá cumplirse y á cuál podrá faltarse? ¿O deberá acaso faltarse á ambas, aproximándose hasta cierto grado á una y á otra? ¿Cómo se atenuará á la vez el error $\triangle c$, y hasta qué grado convendrá disminuirlo? He aquí las cuestiones que resta aún dilucidar.

El citado General Piobert emprende otro camino para resolver esta cuestion. Consiste en determinar la desfiguracion del triángulo, cifrada en la razon del desvío de su vértice á su altura, y que sería aún mejor á su base constante b. No entraremos en los pormenores de su cálculo, cuyos resultados tampoco podemos aceptar como derivados de una verdadera equivocacion; tal es el considerar como diferenciales de los lados del triángulo á los del paralelógramo diferencial formado en el movimiento de desfiguracion, ó sea en el desviamiento de los lados. De aquí resulta que todas sus deducciones están basadas en las espresiones

$$D=\sqrt{da^2+dc^2+2dadc\ \text{Cos.}\ B}$$

da Sen. $B.=c$ Sen. dA, dc Sen. $B=a$ Sen. dC

siendo realmente

$$D=\frac{\sqrt{da^2+dc^2-2da\ dc\ \text{Cos.}\ B}}{\text{Sen.}\ B}$$

da Sen. $B=c$ Sen. $dA+a$ Cos. B Sen. dC, dc Sen. $B=a$ Sen. $dC+$ c Cos. B Sen. dA.

Aunque el sistema ideado por Piobert sea sin disputa el mas adecuado para estimar la precision con que las operaciones geodésicas se prestan á determinar la posicion de un punto con relacion á una base visible desde él, no le creemos sin embargo á propósito para cuando este punto deba ligarse á la base por una cadena de triángulos. En este caso es preciso determinar la forma mas conveniente de estos triángulos, para que resulten atenuados por ella los errores de los la-

dos, que son los que se propagan creciendo de uno en otro hasta reunirse en los últimos, tanto mas abultado cada uno cuanto mayor fuese el número de triángulos por donde hubiese pasado, y menos favorable la configuracion de estos. Verdad es que tambien se reunen en los azimuts de los últimos lados los errores cometidos en los ángulos, pero estos son los de observacion, que ni aumenta ni disminuye la forma de los triángulos. He aquí por qué se dice generalmente que *son mas perjudiciales los errores ocasionados en la medicion de la base, ó los que resultan en los lados, que los cometidos en la observacion de los ángulos;* debiendo entenderse esto en el concepto que los de los ángulos afecten muy poco ó nada á los lados, pues de lo contrario tan perjudiciales vendrian á ser los unos como los otros.

La geodesia por otra parte debe calcular en último resultado, y procediendo de estacion en estacion, las latitudes y longitudes de todos los vértices; y si se examinan atentamente las fórmulas preparadas al efecto, se verá que su exactitud descansa esclusivamente en las observaciones astronómicas hechas en una primera estacion, en las de los ángulos de la red ó cadena, y por último en la del valor del lado que liga la estacion ya determinada con la que se quiere conocer.

Así pues, la desviacion del vértice que conviene atenuar con la forma del triángulo, es precisamente la que tiene lugar en la direccion de cada uno de los lados; esto es, los errores que en ellos resultan.

El método del General Piobert podria ser útil, siempre que se determinase la cadena que diera menos desfigurado el triángulo que ligase la base medida con el último vértice.

Hemos dicho que restaba aún averiguar á cuál de las condiciones $A=90^{\circ}$, $B=90^{\circ}$ habia de faltar el triángulo, ó cuánto debiera separarse de ambas. Con este objeto debe apreciarse aisladamente la influencia que en los lados tiene el error cometido en cada uno de los ángulos. Supongamos que en la medicion del ángulo A sobre la base se hubiese cometido un error $\triangle A$. El que resultaría al lado opuesto a por entrar en el cálculo $A+\triangle A$ en vez de A sería:

$$\triangle a=\frac{b\ \text{Sen.}\ A\ \text{Cos.}\ \triangle A}{\text{Sen.}\ B}+\frac{b\ \text{Cos.}\ A\ \text{Sen.}\ \triangle A}{\text{Sen.}\ B}-a.$$

Haciendo Sen. $\triangle A = \triangle A$, Cos. $\triangle A = 1$

$$\triangle a = \triangle A \frac{b \text{ Cos. } A}{\text{Sen. } B}$$

donde se ve, que tanto menor será $\triangle a$ cuanto mas se aproximen á restos los ángulos A y B.

Del mismo modo, para atenuar los efectos que sobre el lado c debe ocasionar un error cometido en el otro ángulo C tambien sobre la base, convendria se aproximasen á restos los C y B.

Averigüemos ahora si un error $\triangle B$ en el ángulo B opuesto á la base exije alguna condicion para atenuar los que deben producirse en los lados a y c. Para esto tendremos que

$$\triangle a = \frac{\text{Sen. } A}{\text{Sen. } (B + \triangle B)} . \; b - a, \; \triangle c = \frac{\text{Sen. } C}{\text{Sen. } (B + \triangle B)} . \; b - c$$

Quitando divisores, desarrollando y desestimando los términos de segundo orden

$$\triangle a = - \triangle B \frac{a \text{ Cos. } B}{\text{Sen. } B}, \; \triangle c = - \triangle B \frac{c \text{ Cos. } B}{\text{Sen. } B}$$

vemos pues que conviene sea recto el ángulo B.

Los mismos resultados se obtienen considerando al triángulo como esférico, y resolviéndolo por la regla de los cuatro senos, por el método de Delambre, ó por el que está mas en uso y es debido á Legendre.

Conviene pues, que los triángulos sean ó se aproximen á trirectángulos; mas lejos de ser esto posible, la corta estension que cada uno ocupa sobre la superficie de la esfera es causa de que apenas difieran de los rectilíneos, siendo casi inapreciable su esceso esférico. De aquí, que como el ángulo opuesto á la base ó lado conocido merezca una particular consideracion, porque no solo influye esclusivamente y con mas eficacia que los formados sobre esta en la propagacion de sus propios errores, sino que contribuye además tanto como estos al acrecentamiento de los que en ellos se hubiesen cometido, convendrá aproximar dicho ángulo á recto con preferencia á los otros dos.

No es posible dar una solucion terminante y general al problema que nos ocupa. La dificultad que para ello se encuentra proviene, de

que dependiendo la forma que buscamos de la relacion entre los mismos errores inevitables y desconocidos $\triangle A$, $\triangle B$ y $\triangle C$ no es posible obtener un resultado independiente de ellos mientras no se haga alguna suposicion que los elimine; y de que cuando no quedan completamente destruidos los $\triangle a$ y $\triangle c$ que resultan en los lados a y c, la forma que favorece al uno perjudica al otro, y es además preciso en este caso vayan creciendo los triángulos en el principio de las cadenas, para que siendo menor su número no se multipliquen los errores inherentes á las observaciones, ni lleguen muy abultados á los últimos lados los cometidos en los primeros si se propagan estos en progresion creciente.

La suposicion $\triangle A = \triangle B = \triangle C$, da en el triángulo equilátero con exactitud los lados a y c, y bajo tal concepto esta forma satisface á todas las condiciones, y es sin disputa la mejor: mas por probable que sea la proximidad de los errores angulares, sería muy aventurada la hipótesis de su igualdad, para establecerla como un principio en operaciones geodésicas de alguna importancia.

La de que sean muy pequeños dichos errores angulares $\triangle A$, $\triangle B$ y $\triangle C$ nada tiene de gratuita, porque así lo exije la delicadeza con que deben hacerse las operaciones de este género, y partiendo solo de ella se deduce ser la forma rectangular la que mas conviene. No es dificil deducir de la ecuacion $\triangle a = a\ (\triangle A \text{ Cot. } A - \triangle B \text{ Cot. } B)$ que sobraría fuese $\triangle B < -\,{}^{5}/_{4}\,\triangle A$ para que diera el triángulo rectángulo isósceles con mas aproximacion los lados que el equilátero, y que el máximo error que puede dar este, escede en 0,1559 de su valor al que llega á producir aquel.

Si hacemos $A = B = {}^{1}/_{3}\,\pi$ resulta

$$\triangle_1 a = a \text{ Cot. } {}^{1}/_{3}\,\pi\ (\triangle A - \triangle B)$$

y si $A = {}^{1}/_{4}\,\pi \quad B = {}^{1}/_{2}\,\pi$

$$\triangle_2 a = a \triangle A.$$

Para que sea $\triangle_1 a > \triangle_2 a$, basta que

$$\text{Cot. } {}^{1}/_{3}\,\pi\ (\triangle A - \triangle B) > \triangle A$$

y con mas razon que

$$\triangle B < -\,{}^3/_4\,\triangle A.$$

Si representamos con $\triangle A$, $\triangle B$ los valores absolutos de estos errores, y admitimos que puedan tener signos contrarios

$$\pm\triangle B < \mp\,{}^3/_4\triangle A$$

de donde resultan las dos combinaciones posibles y relativas á $\triangle B<0$, $\triangle A<0$

$$\triangle B < {}^3/_4\,\triangle A,\ \triangle B > {}^3/_4\,\triangle A.$$

Suponiendo ahora que sea δ el límite absoluto en los errores angulares, los máximos que pueden dar los triángulos en cuestion serán

$$\triangle_1 a = 2a\delta\ \text{Cot.}\ {}^1/_3\,\pi$$

$$\triangle_2 a = a\delta$$

de donde

$$\frac{\triangle_1 a - \triangle_2 a}{\triangle_1 a} = 1 - {}^1/_2\ \text{Tang.}\ {}^1/_3\,\pi$$

ó bien

$$\frac{\triangle_1 a - \triangle_2 a}{\triangle_1 a} = 0{,}1339.$$

Otra consideracion de bastante importancia viene tambien en apoyo del triángulo rectángulo. Consiste en ser este el que propaga mas disminuidos á sus lados los errores ocasionados en su base, bajo cuyo concepto llegarán estos tanto mas atenuados á los últimos lados, cuanto mayor sea el número de los triángulos que entren en la cadena. Para convencerse de esta verdad basta observar que tanto menor será el error

$$\triangle a = \triangle b\,\frac{\text{Sen. } A}{\text{Sen. } B}$$

que resulta en el lado a por el $\triangle b$ ocurrido en la base, cuanto mayor sea Sen. B, cuanto mas se aproxime á ser $B = {}^1/_2\,\pi$.

El triángulo rectángulo en B parece ser el que mas conviene, pero esta condicion no deja por sí sola completamente definida la forma. Se necesita otra que dé la relacion entre los ángulos A y C ó entre

:

sus lados opuestos a y c, y esta depende de la preferencia que merezca uno de estos sobre el otro, y por lo tanto del número de los triángulos que hayan de apoyar sobre cada uno de ellos.

El triángulo rectángulo, á pesar de sus conocidas ventajas, adolece de un inconveniente que le hace inaplicable en muchos casos. Aunque su forma disminuya los errores de los lados al propagarlos de uno en otro, conviene sin embargo sea lo menor posible su número, para que no se multipliquen los de observacion. Para esto sería preciso fuesen creciendo al principio y esta es una condicion á que no puede satisfacer. Es por lo tanto indispensable en semejantes casos separarnos de esta forma de modo que disminuya lo menos posible el ángulo B, y de aquí un problema de geometría que hay que resolver en cada caso; y véase con cuánta razon digimos no se debia esperar una solucion general para todos. Si por ejemplo, estando al principio de una cadena destinada á medir un arco de meridiano ó de paralelo, se quisiera creciesen los lados en la razon impropia $\frac{m}{n}$; bastaria determinar el máximo ángulo en la circunferencia de radio $\frac{m}{n}\ b$, y cuyos lados pasasen por el centro y por un punto distante de él la cantidad b.

Se supone en todas estas discusiones que somos árbitros de elegir á nuestro antojo los triángulos, lo que no es posible en la práctica; mas siempre seremos dueños de escojer entre los puntos que puedan servir de estacion el que menos se separe del que consideremos conveniente.

Madrid 20 de setiembre de 1851.

Antonio Cerrero.

ASTRONOMIA.

DEL TIEMPO.

MEMORIA

DEL

SEÑOR D. ANTONIO TERRERO,

Académico de número en la Seccion de Ciencias exactas.

1. El tiempo es para nosotros, como dice el célebre Laplace, la impresion que deja en nuestra memoria una serie de acontecimientos que nos consta haber tenido lugar uno despues de otro. Así es realmente como nos formamos idea de esa cantidad, que se estiende y pierde en el pasado y en el porvenir, sin que alcancemos en ella ni un principio ni un fin, como tampoco concebimos un término posible á la estension. El tiempo se asimila, pues, á una línea indefinida, y á un punto que resbalara continuamente sobre ella el instante presente de nuestra existencia.

2. El tiempo es, como la estension, susceptible de medida, y de ser en consecuencia representado por números. Es siempre suficiente para ello la division en partes iguales de tamaño conocido de la cantidad que debe ser medida, y la naturaleza misma se ha encargado de esta reparticion. Fenómenos celestes de observacion bien fácil nos ofrecen en efecto señalados en el tiempo los instantes divisorios de varios sistemas de estos intérvalos, que si no son del todo iguales, pue-

den unos considerarse equivalentes por sus inapreciables diferencias, y buscarse en los demás términos medios, entre los estrechos límites en que todos oscilan. Verdad es que los intérvalos correspondientes á cada dos de estos diferentes sistemas, ó sea sus términos medios, parecen inconmensurables entre sí; pero siempre es posible averiguar sus relaciones con la aproximacion que se quiera. Queda, pues, al hombre el cuidado de buscar estos términos medios, estas relaciones entre ellos, y por último, el apreciar con instrumentos adecuados las partes fraccionarias de la unidad natural mas reducida.

5. De estos diferentes intérvalos naturales de tiempo, solo nos haremos cargo por ahora de los que esclusivamente se derivan de los movimientos de la tierra con relacion al sol y estrellas, considerados como puntos fijos en el espacio ilimitado. Consisten estos en los *años sidéreo, trópico* y *anomalístico,* asi como tambien en los dias *sidéreo* y *solar*.

Año sidéreo es el tiempo empleado por la tierra en volver á conjuncion con el mismo punto del cielo ó sea la misma estrella; *trópico,* el que tarda en volver al mismo equinoccio, al mismo solsticio, ó sea en adquirir la misma longitud; y finalmente, *anomalístico,* el que necesita para volver al mismo ápside. *Dia sidéreo,* el comprendido entre dos pasos sucesivos del meridiano de un lugar por el equinoccio de primavera; y *solar,* el que lo está entre los del mismo meridiano por el centro del sol.

Los dias se dividen en 24 partes, llamadas horas, y determinadas por incrementos iguales (de á 15°) en los respectivos ángulos horarios, y del mismo modo cada hora en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos, etc.

4. El año trópico y el dia solar parecen ser los destinados por la naturaleza para reglar todos los actos de nuestra vida social. Determinado el primero por el período completo de las oscilaciones del ecuador terrestre al septentrion y mediodía del sol, y siguiendo asi la marcha de las estaciones, indica las épocas precisas de las labores; y abrazando el segundo el de las fluctuaciones luminosas en cada meridiano, señala los intérvalos dedicados á la fatiga y al descanso.

5. Los años sidéreo, trópico y anomalístico, siendo próximamente los tiempos empleados por la tierra en su revolucion completa al rededor del sol, faltando únicamente al segundo el necesario para andar el arco de precesion, y sobrando al tercero el invertido en el del movimiento de los ápsides, varian bien poco; y si se determinan por promedios entre una larga série de observaciones, deben considerarse exentos de las desigualdades procedentes de la nutacion y demás perturbaciones que pudieran afectarlos. Otro tanto sucede al dia sidéreo, que depende de la rotacion uniforme de la tierra; mas no asi al solar, que derivándose de ambos movimientos combinados, y abrazando tan solo del primero una pequeña parte de la revolucion completa, resulta naturalmente alterado por las variaciones de éste y por la oblicuidad de la eclíptica.

6. Para regularizar todos estos movimientos reduciéndolos á sus términos medios, y darse además razon de ellos por una significacion geométrica, han supuesto los astrónomos que una *tierra* ficticia *t* (*figura* 1.ª), que llamaremos *media eclipcial*, recorre la eclíptica en el mismo tiempo que la verdadera *T*, con movimiento angular uniforme respecto al sol, y viniendo en los ápsides á conjuncion con ella.

7. Claro es que partiendo ambas del perihelio *P* en el mismo instante físico, aunque la verdadera *T* camine con movimiento retardado, como empieza con mayor velocidad, se adelantará á la *t*, é irá alejándose mas y mas de ella hasta un cierto máximo, desde el cual volverán á aproximarse para venir á conjuncion en el afelio *A*, y que lo contrario sucederá en la otra mitad de la órbita, en que el movimiento de la verdadera *T*, aunque acelerado, empieza con menos velocidad que la *t*.

8. En cualquier instante dado, se llama *anomalía verdadera* á la distancia *PST* andada por la tierra verdadera *T*, y *media* á la *PSt* recorrida por la media *t*, diciéndose *ecuacion del centro* á la diferencia *TSt* entre ambas anomalías, y que es la misma que entre las longitudes media y verdadera, cuyo máximo asciende á 1° 55′ 33″,5. Segun esto, la posicion de la tierra media se averigua por una simple proporcion; y aplicando á ella la ecuacion del centro, que se encuen-

tra en todas las tablas solares, se tendrá la correspondiente á la tierra verdadera.

9. Como el máximo valor de la ecuacion del centro depende de la escentricidad de la órbita, por la observacion de aquella ha podido calcularse ésta con mas precision aún, que por los diámetros solares, habiéndose llegado felizmente por ambos métodos al mismo resultado.

10. Con esto se tiene regularizado ya el movimiento ánuo, y dividido el año por dos equinoccios y dos solsticios medios en cuatro estaciones, tambien medias, iguales entre sí y poco diferentes de las verdaderas, que pueden determinarse facilmente con la ecuacion del centro.

11. Mas todo esto no es bastante para igualar los dias solares, ó sea buscar un *dia medio* entre los *verdaderos*. De las dos causas que concurren á su desigualdad, hemos correjido únicamente la variabilidad del movimiento orbitual de la tierra, faltándonos salvar aún la de la oblicuidad de la eclíptica. Es preciso pues, que una segunda tierra ficticia τ, que llamaremos *media ecuatorial*, recorra análogamente el ecuador, coincidiendo con la t en los equinoccios; y esta indicará la marcha que habria de seguir nuestro planeta para que fuesen iguales los dias solares, y nos dará su término medio. La distancia ascensional $T'S\tau$ entre esta tierra τ y la verdadera T, se llama *ecuacion de tiempo* (*), que tiene dos máximos y dos mínimos, llegando á $16\frac{1}{4}$ minutos el mayor de aquellos, y á $-14\frac{1}{2}$ minutos el menor de éstos.

(*) Desde luego se comprende bien que los máximos de ascension y longitud de las dos tierras medias deben coincidir tambien en los solsticios, y que los de las verdadera y media ecuatorial se ajustan asimismo en cuatro posiciones, que no serán los solsticios ni los equinoccios mientras no coincida con estas líneas la de los ápsides.

Aunque es indiferente la línea en que supongamos caminan estas tierras ficticias, con tal que sea uniforme el movimiento longitudinal de la una y el ascensional de la otra, supondremos, para fijar las ideas, y para que sean tambien uniformes sus movimientos lineales, que describen círculos cuyos centros están en el del sol. Considerando los astrónomos la órbita aparente del sol, imaginan tambien para esplicar las relaciones entre estas unidades del tiempo, dos soles ficticios que recorren la eclíptica y el ecuador de un modo análogo al que se ha esplicado para las dos tierras medias.

12. Hemos supuesto que los dias verdaderos son desiguales, y vamos á demostrarlo. El célebre Laplace en su esposicion del sistema del mundo se contenta para esto con señalar las dos causas que concurren á hacer desiguales dichos dias, á saber: la variabilidad del movimiento orbitual de la tierra y la oblicuidad de la eclíptica. Mas todo esto no es suficiente, pudiendo compensarse estas causas para producir un movimiento ascensional uniforme, que combinado con el tambien uniforme de rotacion, dieran un dia solar de duracion constante. Concibamos, en efecto, que la tierra se moviese en su órbita de suerte que su proyeccion sobre el ecuador lo verificara uniformemente. ¿Sería uniforme su movimiento anomalístico? ¿Dejaria de existir la oblicuidad de la eclíptica? Ciertamente que no; y á pesar de existir las mismas dos causas de desigualdad diaria, los dias serian iguales.

Sea *Aa Pd* (*fig.* 2.ª) la proyeccion ecuatorial de la órbita terrestre. *A* el afelio, *P* el perihelio, y *ad* la línea de los equinoccios. Si en un instante dado se encuentra la tierra en *T*, empezará el dia sidéreo para el meridiano *TN*, y el verdadero para el *TM*. Si en el tiempo de una rotacion completa suponemos se ha trasladado de *T* á *T'*, los meridianos *TN* y *TM* habrán tomado las posiciones *T'N'*, *T'M'*, paralelas á las primitivas; habrá terminado para el *TN* el dia sidéreo comenzado en *T*, y pasará otra vez este meridiano por el punto ♈, asi como el *TM* por el mismo punto del cielo ó la misma estrella *E*.

Continuando la tierra su movimiento, y siendo mayor la velocidad de rotacion que la angular de su revolucion, aunque ambas en un mismo sentido, vendrá á pasar otra vez el meridiano *TM* por el centro del sol; y suponiendo tenga esto lugar en *T''*, terminará allí para dicho meridiano el dia verdadero principiado en *T*. De aqui resulta que $E''T''S = TST''$, será el esceso del dia verdadero sobre el sidéreo; esto es, el tiempo empleado por la tierra en girar una cantidad igual á la diferencia en ascension recta del sol por dicho dia verdadero, lo que se espresará asi:

$$Dv = Ds + \triangle \mathrm{R}v\odot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Siendo constante Ds, si lo fuese igualmente $\triangle \mathfrak{R}v\odot$, lo sería tambien Dv y uniforme el movimiento ascensional: es fácil ver, y demostraremos en seguida, que este es variable, luego variables $\triangle \mathfrak{R}v\odot$ y Dv.

Lo mismo haríamos ver respecto á la proyeccion ecuatorial de la tierra ficticia t, y lo contrario en la τ, en que es seguramente uniforme dicho movimiento.

Pasemos ahora á demostrar que el movimiento ascensional de la tierra verdadera T y de la media t no es uniforme. Sabido es, por la ley de las áreas, que la velocidad en longitud es máxima en el perihelio P, mínima en el afelio A, y que crece de éste á aquel del mismo modo que decrece de aquel á éste, siendo únicamente la misma en los puntos simétricos respecto á la línea de los ápsides.

Sean $NE\ N'E'$ (*fig.* 1) la esfera celeste, y el coluro de los solsticios; $N\,\Upsilon\,N'\,\simeq$ el de los equinoccios; $E\,\Upsilon\,E'\simeq$ el ecuador; $\Upsilon\,\mathfrak{S}\simeq\mathfrak{V}$ la eclíptica.

Llamemos θ á la inclinacion de ésta: Υ', $\mathfrak{S}'$, $\simeq'$, $\mathfrak{V}'$, las velocidades de la tierra T ó la t en estos puntos; como tambien Υ'', $\mathfrak{S}''$, $\simeq''$, $\mathfrak{V}''$, la ascensional en los mismos. Claro es que

$$\Upsilon''=\Upsilon'\,\text{Cos.}\,\theta,\ \simeq''=\simeq'\,\text{Cos.}\,\theta,\ \mathfrak{S}''=\frac{\mathfrak{S}'}{\text{Cos.}\,\theta},\ \mathfrak{V}''=\frac{\mathfrak{V}'}{\text{Cos.}\,\theta}$$

y como en la tierra verdadera T no puede ser á la vez $\Upsilon'=\simeq'$, y $\mathfrak{S}'=\mathfrak{V}'$, resulta que tampoco serán á un mismo tiempo $\Upsilon''=\simeq''$, $\mathfrak{S}''=\mathfrak{V}''$. En la tierra media t son siempre $\Upsilon'=\simeq'=\mathfrak{S}'=\mathfrak{V}'$: luego no siendo $\theta=0$, tampoco podrán ser $\Upsilon''=\simeq''=\mathfrak{S}''=\mathfrak{V}''$.

13. Para encontrar ahora las relaciones entre estas diferentes unidades de tiempo, preciso ha sido recurrir á repetidas y delicadas observaciones, que nos han dado por resultado ser $\varphi=366{,}256376646$ el número de rotaciones de la tierra mientras verifica ésta una revolucion completa al rededor del sol, esto es, que un año sidéreo equivale á φ dias sidéreos.

$$As = \varphi\, Ds = 366{,}256376646\ Ds. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

y teniendo en cuenta la precesion de los equinoccios y el movimiento de los ápsides, que llamaremos $\omega = 50'',105$ y $\omega' = 11'',8$, resultará dar solo $\varphi\left(1 - \frac{\omega}{2\pi}\right)$, mientras vuelve al mismo equinoccio, y $\varphi\left(1 + \frac{\omega'}{2\pi}\right)$ mientras al mismo ápside. De aquí:

$$At = \varphi\left(1 - \frac{\omega}{2\pi}\right) Ds = 366{,}242217276\ Ds. \ldots\ldots\ldots \quad 3$$

$$Aa = \varphi\left(1 + \frac{\omega'}{2\pi}\right) Ds = 366{,}259711388\ Ds. \ldots\ldots\ldots \quad 4$$

Siendo φ el número de rotaciones absolutas, ó sea relativas á las estrellas, consideradas como puntos fijos en el espacio, que da la tierra mientras completa en el mismo sentido su revolucion al rededor del sol, claro es que serán $\varphi - 1$ las que dará relativamente á este astro; esto es, las que pareceria dar si se le mirase desde él, y de aquí que el año sidéreo contenga este número de dias solares medios: de donde

$$Ds = \left(1 - \frac{1}{\varphi}\right) Dm = 0{,}997269672\ Dm. \ldots\ldots\ldots \quad 5$$

y eliminando Ds entre esta ecuacion y las (2), (3), (4),

$$As = (\varphi - 1)\, Dm = 365{,}256376646\ Dm. \ldots\ldots\ldots \quad 6$$

$$At = (\varphi - 1)\left(1 - \frac{\omega}{2\pi}\right) Dm = 365{,}242255936\ Dm. \ldots \quad 7$$

$$Aa = (\varphi - 1)\left(1 + \frac{\omega'}{2\pi}\right) Dm = 365{,}253051009\ Dm. \ldots \quad 8$$

14. Nada se presta tanto á la medida de los tiempos como el movimiento uniforme. Siendo constante en él la velocidad, son aquellos proporcionales á los espacios, y se hallan en razon compuesta de la directa de éstos y de la inversa de las velocidades en dos movimientos diferentes. Pues bien, ya tenemos aqui tres de estos movimientos; los dos de traslacion de las tierras imaginarias, y el de rotacion comun á éstas y á la verdadera.

Sean sus ecuaciones respectivas

$$e = vt. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9$$

$$\varepsilon = \nu\tau. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10$$

$$E = VT. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

Para que estos movimientos nos sean conocidos, preciso es determinar las velocidades v, ν, V. Si elejimos por unidad de medida de los tiempos el invertido por la tierra en una rotacion completa, esto es, el dia sidéreo, tendremos

$$v = \frac{2\pi}{\varphi} = 0{,}017155156. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12$$

$$\nu = \frac{4\pi^2}{\varphi(2\pi - \omega)} = 0{,}017155819. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13$$

$$V = 2\pi = 6{,}283185307. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14$$

de donde

$$e = \frac{2\pi}{\varphi} t = 0{,}017155156\ t. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15$$

$$\varepsilon = \frac{4\pi^2}{\varphi(2\pi - \omega)} \tau = 0{,}017155819\ \tau. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16$$

$$E = 2\pi T = 6{,}283185307\ T. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17$$

Estas ecuaciones (15), (16), (17), unidas á la (5), no solo sirven como las (2), (3) y (4), (6), (7) y (8) para espresar las relaciones en-

tre las unidades de tiempo, sino tambien para conocer la longitud, anomalía y ascension heliocéntrica de la tierra y geocéntrica del sol en un instante dado, y vice-versa.

Si queremos averiguar, por ejemplo, el incremento que obtiene la ascension recta media de la tierra en los dias medio y sidéreo, en poniendo por τ en la ecuacion (16) $\frac{\varphi}{\varphi-1}$, y despues 1, tendremos

$$\triangle \mathrm{R}\, m\odot = \frac{4\pi^2}{(\varphi-1)(2\pi-\omega)} = 59'\ 8'',529851569.\ldots \quad 18$$

$$\triangle \mathrm{R}\, m\odot \text{ en } Ds = \frac{4\pi^2}{\varphi(2\pi-\omega)} = 58'\ 58''641647414\ldots \quad 19$$

15. Conocidos ya estos tipos de medida, y trazados tambien definitivamente en el tiempo físico, y con arreglo á los padrones, los instantes divisorios de las diferentes sucesiones de unidades, resta únicamente comparar entre sí, ya en un mismo meridiano ya en distintos, los tiempos contados por el sistema sidéreo y por el solar medio, como tambien con el tiempo verdadero. Para esto examinaremos atentamente la marcha de la tierra durante un intérvalo que abrace los tres dias respectivos. Sea T' (*fig.* 3.ª) la proyeccion ecuatorial de la tierra, y τ' la tierra ecuatorial. Para el meridiano $T'M'$ será $\gamma' S' M'$ la hora sidérea, $S'M'$ la verdadera, y $s'\mu'$ la media. Se ve, pues, que la hora sidérea es la ascension recta de los puntos del cielo ó de las estrellas por donde pasa el meridiano en el instante que se considera; que la hora verdadera y la media son menores que la sidérea en la ascension recta verdadera y media del sol; por último, que la hora media escede á la verdadera en el arco $s's_1 = T'S\tau' = e'$, que es la ecuacion de tiempo, todo lo cual se espresa en las ecuaciones siguientes.

$$Hs = \mathrm{R}* \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20$$
$$Hm = Hs - \mathrm{R}\, m\odot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21$$
$$Hv = Hs - \mathrm{R}\, v\odot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22$$
$$Hm = Hv + e. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23$$

Si al llegar la tierra á T'' y la media á τ'' se ha puesto el meridiano TM en la direccion de la línea de los equinoccios pasando por el de primavera, terminará en este instante un dia sidéreo y principiará otro; serán las 24 *hs.* del primero y las 0 *hs.* del segundo, $S''M''$ será la hora verdadera, y $s''\mu''$ la media, siendo $s''s_{//}=T''S\tau''=e''$ la ecuacion de tiempo. Como la velocidad V de rotacion es φ veces la v de traslacion de la tierra τ, vendrá á pasar el meridiano $\tau\mu$ por el centro del sol; y si esto se verifica al llegar las tierras á T''' y τ''', terminará en este instante un dia medio para empezar otro, y serán las 24 *hm.* del primero y las 0 *hm.* del segundo; $\gamma'''B'''M'''$ será la hora sidérea, y $S'''\gamma'''M'''$ la hora verdadera, siendo $M'''S'''=T'''S\tau'''=e'''$ la ecuacion de tiempo. Por ser tambien considerablemente mayor la velocidad de rotacion de la tierra que la de traslacion de la tierra verdadera aun en el perihelio, vendrá á pasar muy poco despues por el sol el meridiano TM; y si esto se verifica en T^{iv}, se habrá terminado un dia verdadero y empezará otro, siendo las 24 *hv.* del primero y las 0 *hv.* del segundo; $\gamma^{iv}B^{iv}M^{iv}$ será la hora sidérea, y $s^{iv}\mu^{iv}$ la media y la ecuacion de tiempo. Continuando su marcha nuestro globo, volverá á pasar por el punto equinoccial de primavera el meridiano en cuestion; y si suponemos tenga esto lugar en T^{v}, terminará allí el dia sidéreo comenzado en T''', siendo las 24 *hs.* de éste y las 0 *hs.* del siguiente, será la hora verdadera $S^{v}M^{v}$, y la media la $s^{v}\mu^{v}$, siendo $s^{v}s_{v}=T^{v}S\tau^{v}=e^{v}$ la ecuacion del tiempo. Suponiendo que al llegar á T^{vi} haya vuelto á pasar el meridiano que consideramos en la posicion media por el centro del sol, finará el dia medio que tuvo principio en T''', serán las 24 *hm.* de dicho dia, y las 0 *hm.* del siguiente; $\gamma^{vi}B^{vi}M^{vi}$ la hora sidérea, y $S^{vi}B^{vi}M^{vi}$ la verdadera, y $M^{vi}S^{vi}=T^{vi}S\tau^{vi}=e^{vi}$ la ecuacion del tiempo; por último, volviendo á pasar el meridiano TM por el sol en T^{vii}, concluirá el dia verdadero empezado en T^{iv}, serán las 24 *hv.* de este dia y las 0 *hv.* del siguiente; $\gamma^{vii}B^{vii}M^{vii}$ será la hora sidérea, y $s^{vii}\mu^{vii}=T^{vii}S\tau^{vii}$ la media y la ecuacion del tiempo.

Además, $T''ST^{v}$, $T'''ST^{iv}$, $T^{iv}ST^{vii}$ serán las diferencias de ascension recta verdadera en los dias sidéreo, medio y verdadero respec-

tivos, como asimismo $\tau'' S\tau^{v}$, $\tau''' S\tau^{vi}$ y $\tau^{iv} S\tau^{vii}$ las diferencias de ascension recta media en un dia sidéreo, uno medio y en el verdadero á que pertenece esta última, que por ser funcion del dia verdadero será variable como las tres primeras. Se ve asimismo en la *figura* 3.ª que la diferencia de ascension recta verdadera durante un tiempo cualquiera, es igual á la diferencia de ascension recta media en el mismo tiempo, mas la diferencia de ecuacion del tiempo; que un dia medio es igual á un dia sidéreo, mas la diferencia de ascension recta media en un dia medio; que un dia verdadero es igual á un dia sidéreo, mas la diferencia de ascension recta verdadera en dicho dia verdadero; y por último, que un dia verdadero es igual á un dia medio, mas la diferencia de ecuacion del tiempo en dicho dia verdadero. Claro es que estas diferencias de ascension recta y de ecuacion de tiempo deben espresarse en tiempo sidéreo ó medio, segun la especie de dia con que se suman.

Todas estas relaciones se espresan en las ecuaciones siguientes.

$$\triangle \mathfrak{R}\, v\odot = \triangle \mathfrak{R}\, m\odot + \triangle e. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24$$

$$Dm = Ds + \triangle \mathfrak{R}\, m\odot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25$$

$$Dv = Ds + \triangle \mathfrak{R}\, v\odot \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26$$

$$Dv = Dm + \triangle e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27$$

Desde luego se comprende bien que la ecuacion del tiempo e será aditiva ó positiva cuando vaya adelantada la tierra verdadera, y al contrario, sustractiva ó negativa cuando atrasada; y segun acabamos de ver, cuando sea mediodía verdadero para un meridiano TM, $Hv = 0$ y $Hm = e$. En todos los anuarios astronómicos se encuentra esta ecuacion del tiempo para cada mediodía verdadero del observatorio respectivo, espresada, como es consiguiente, en tiempo á razon de 15° por hora, bien sea con el nombre de *ecuacion del tiempo*, ó ya con el de *hora media* al *mediodía verdadero*. En el primer caso se advierte si es aditiva ó sustractiva, ó bien se indican sus valores con los signos positivo y negativo, viniendo á ser en el segundo los complementos á 24 *h.* cuando la tierra verdadera está atrasada.

16. Los dias solares se distinguen con nombres que nos son harto conocidos; mas conforme al uso astronómico, y segun acabamos de considerarlos, se encuentran terminados en los instantes de los pasos del meridiano superior por el centro del sol, contándose seguidamente hasta 24 *h.* desde su principio á su fin, mientras que en el uso civil principian y acaban 12 horas antes; esto es, en los pasos inmediatos anteriores del meridiano inferior ú opuesto al del lugar que se considera, dividiéndose por el mediodía en *mañana* y *tarde*, en cada una de las cuales se cuentan desde 0 hasta 12 horas. Resulta de aquí tener estas 12 horas, mas los tiempos contados segun este último sistema. Así es, que las 6 horas del 21 de Diciembre segun el uso astronómico serán las de la tarde del mismo dia segun el civil, y las 9 de la mañana del 1.° de enero de 1852 contadas con arreglo á este último, corresponderán á las 21 horas del 31 de diciembre de 1851 segun el primero.

Varios pueblos tomaron por principio del dia el instante de la salida del sol, otros el de su puesta, dividiendo algunos el dia *artificial*, ó sea el tiempo que está el sol sobre el horizonte, en 12 horas iguales, y en otras 12 tambien iguales entre sí la *noche*, ó sea el tiempo que se encuentra oculto desde el ocaso al orto inmediato. Tambien se ha pensado dividir el dia en 10 horas, la hora en 100 minutos, y cada uno de éstos en 100 segundos, cuyo sistema emplea en sus obras el célebre Laplace.

En los distintos meridianos, cada dia denominado reconoce por su origen en el tiempo físico ó absoluto un instante diferente, y diferente por lo mismo el lugar que en él ocupa. Cada instante del tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos de un cierto meridiano por el sol, debe servir de origen á un mismo dia nominal, y es preciso por lo tanto fijar este meridiano, que debe empezar á contar antes que los demás cada uno de los dias. Debe tenerse presente al elejirlo que no atraviese por un continente ó isla poblada, pues en tal caso pueblos muy próximos empezarian á contar dos dias consecutivos dentro de un corto intérvalo de tiempo.

Habiendo llevado nosotros á nuestras posesiones de Ultramar la

cuenta de los dias caminando siempre de Oriente á Occidente, hemos venido de hecho á elejir con el indicado objeto un meridiano al Occidente de las islas Filipinas, y que atraviesa el Asia por su mayor estension. Convendria, pues, fijar de una vez este meridiano, que podria ser el que pasa por la punta mas occidental de la isla del Hierro, una de nuestras Canarias, y que fuese además adoptado por todas las naciones civilizadas, segun lo fue algun dia, por el primero para contar tambien desde él las longitudes. Entonces se sabria que al atravesarlo de Oriente á Occidente y cambiar las longitudes orientales en occidentales, se cambiaria tambien el dia, agregando uno á la cuenta que se llevaba, y al contrario cuando se atravesase de Occidente á Oriente. Otro de los inconvenientes que se derivan del distinto origen de los dias, es que en un mismo instante físico es distinta la hora que se cuenta en cada meridiano, siendo mas tarde en la diferencia de longitudes en los mas orientales (*), de donde nace que al espresar la hora en que ha tenido lugar un acontecimiento, sea indispensable señalar tambien el meridiano á que aquella hora se refiere, y tambien la necesidad de que cada viajero vaya adelantando su relój ó cronómetro lo que gana en longitud oriental, y atrasándolo en lo que pierde de dicha longitud ó gana en la occidental, resultando de aquí menores las horas que cuenta aquel, y mayores las que éste.

Para evitar las reducciones de tiempo de un meridiano á otro, se ha ideado contarlo en dias medios ó sidéreos desde un instante determinado por una posicion de la tierra, independiente de toda situacion local, llamándose al contado de este modo *tiempo equinoccial*, para distinguirlo del relativo á cada meridiano, á que se da el nombre de *local*.

17. La hora verdadera se averigua por la observacion de los astros, y por los cuadrantes solares; mas como este último medio sea muy poco delicado, y falte durante la noche, así como ambos en

(*) Esta diferencia en longitudes debe entenderse contando desde el horario solar hasta 360°.

tiempo nebuloso, se hace indispensable el empleo de instrumentos que puedan servir á la medida del tiempo sin estos inconvenientes. Desde luego se comprende bien que cualquier fenómeno físico que pueda reproducirse con las mismas circunstancias, teniendo necesariamente igual duracion, constituirá una verdadera unidad de medida, que si nos fuese además dado repetir sucesivamente, nos proporcionaria cualquier porcion determinada del tiempo. La medicion de éste se efectúa por medio de relojes de péndola, ó simplemente péndulos; relojes de volante perfeccionados, llamados cronómetros; clepsidras, y ampolletas.

La ampolleta, que mide el tiempo por el que emplea una determinada cantidad de arena en caer de un recipiente cónico superior á otro inferior por la garganta que los une en sus cúspides, es un artificio tosco y rudo, que solo se usa en el dia á bordo de algunos buques; y la clepsidra, que lo verifica por el descenso gradual de un líquido en un gran depósito que se vacia por un orificio conveniente, ó por la cantidad que se evacua del mismo modo, aunque susceptible de bastante exactitud, ha sido abandonada por la mayor comodidad y precision de los péndulos y cronómetros, siendo éstos los únicos medios empleados por la astronomía moderna.

18. Pasemos ya á considerar las unidades que proceden del movimiento de la luna. Consisten estas en sus períodos sidéreo y sinódico. Se entiende por *período sidéreo* ó *mes lunar periódico,* el tiempo que invierte la luna en volver á conjuncion con el mismo punto del cielo, ó sea con la misma estrella, y por *período sinódico*, ó *mes lunar sinódico,* ó simplemente *lunacion,* el que emplea en volver á conjuncion con el sol. A pesar de la corta escentricidad orbitual de nuestro satélite, basta considerar la grande retrogradacion de sus nodos, y el sensible movimiento de sus ápsides, para comprender la variabilidad de ambos períodos.

Es por lo tanto indispensable buscar un término medio en cada uno de ellos, por la observacion de un crecido número, ó si quisiéramos darnos una esplicacion geométrica de estas unidades de tiempo, imaginar dos lunas medias que se moviesen al rededor de la tierra

media eclipcial en los planos de la órbita lunar y en la eclíptica de un modo análogo á aquel con que lo verifican al rededor del sol las dos tierras ficticias. Repetidas observaciones nos han hecho conocer que el término medio entre las revoluciones sidéreas es $\downarrow = 27^{dm},321661423$, lo que espresaremos así:

$$Mlp = \downarrow Dm = 27{,}321661423\ Dm. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 28$$

$$Mlp = \frac{\downarrow \varphi}{\varphi - 1} Ds = 27{,}396462749\ Ds. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29$$

De aquí resulta, que si suponemos (*fig.* 4.ª) sean t' y λ' las posiciones de la tierra y luna medias eclipciales en el instante de una conjuncion, t'' λ'' las que tienen al cabo de un mes lunar periódico, y t''' λ''' las que al fin del mes lunar sinódico, y llamamos x al número de dias de este último, como el mes lunar sinódico escede al período en el tiempo que emplea la luna en andar el ángulo $S\,t'''\,E''' = t'\,S\,t''' = x \triangle \mathfrak{R} m \odot$ será

$$\frac{\downarrow}{x} = \frac{2\pi}{2\pi + x \triangle \mathfrak{R} m \odot}$$

de donde

$$Mls = \frac{\downarrow (2\pi - \omega)(\varphi - 1)}{(2\pi - \omega)(\varphi - 1) - 2\pi\downarrow} Dm = 29{,}530680923\ Dm. \quad 30$$

$$Mls = \frac{\downarrow \varphi (2\pi - \omega)}{(2\pi - \omega)(\varphi - 1) - 2\pi\downarrow} Ds = 30{,}565556839\ Ds. \ldots \quad 31$$

19. Los años astronómicos que hemos descrito se prestan mal á las necesidades de la vida social, á causa de no contener un número cabal de dias, y de que tan solo en un meridiano puede coincidir con el de un dia el principio de cada año. Por esta razon se han formado años artificiales, llamados *civiles*, que no son otra cosa que coleccio-

:

nes de dias, numerándose para distinguirlos desde aquel en que tuvo lugar un acontecimiento notable, y que se denomina *época.*

Se entiende por *calendario* ó *almanaque* unas tablas que se publican generalmente en fin de cada año, y en que se presenta dividido el siguiente en sus meses, semanas y dias, con espresion de las festividades, horas de la salida y puesta del sol y de la luna, sus eclipses, y otras noticias que pueden ser de algun interés en la vida social. Cuando se designan además las posiciones, paralajes, semi-diámetros y distancias de dichos astros, con cuantos fenómenos celestes son indispensables para las prácticas de la astronomía y de la geodesia, se suelen llamar *anuarios astronómicos, almanaques náuticos, efemérides,* y tambien *conocimiento de los tiempos.*

Año griego. El precepto religioso obligaba á los griegos á contar los años por el sol y los meses por la luna. Un oráculo les habia prescrito además que ciertas fiestas debieran celebrarse en las mismas posiciones del sol y en las mismas fases de la luna, y esto exijia estuviesen de acuerdo los años solares y los meses lunares. En un principio eran aquellos de 354 dias, despues de 360, y por último de 365, resultando de aquí que aun con este mayor número, el principio de los años retrogradaba en cada uno $0^{dm},2422$ sobre el año trópico, pasando así por todas las estaciones. De cada dos lunaciones hacian un mes de 30 dias y otro de 29, y de los dias que faltaban hasta el completo del año solar, formaban en 8 años 3 meses de á 30 dias, que agregaban á tres de dichos años, hasta que Meton observó que 235 lunaciones hacian muy próximamente 19 años, á saber, 128 á razon de 12 al año, y otras 7 que agregaban á 7 de los años del *ciclo de Meton.* Los años de 13 meses se llamaban *embolísmicos,* habiéndose despues quitado para mas exacta correspondencia una lunacion á cada cuatro ciclos. El mes lo dividian en décadas, empleando tambien para contar el tiempo un período de 4 años, que llamaban *olimpiada.* La era para contar las olimpiadas se celebró 776 años antes de Jesucristo.

El año persa constaba como el griego de 365 dias, de suerte que cada cuatro años retrogradaba próximamente un dia con respecto

al período solar, y las estaciones, como en los griegos, no sucedian en las mismas fechas, recorriendo todo el año civil. Estos dias de retrogradacion completaban un año al cabo de 1460 solares ó 1461 persas, que componian el *gran período zodiaco*, ó *grande año canicular*, despues del cual volvian á repetirse de nuevo las mismas posiciones del sol en los mismos dias del año. El año lo dividian en 12 meses de á 30 dias, agregando despues del último cinco dias *epagómenes* ó complementarios. La semana era de siete dias, á los cuales daban los mismos nombres que nosotros.

Posteriormente adoptaron una intercalacion que aproximaba bastante el año civil al solar, y consistia en hacer de 366 dias los últimos años de ocho períodos consecutivos, de los cuales el último era de cinco años y los siete primeros de cuatro. Resultaba de este modo, que teniendo 12053 dias los 33 años de los ocho períodos, escedian solo en 0,007 de dia á los 33 trópicos.

El *calendario musulman* es puramente lunar, sin la menor relacion con el curso del sol. Su año se compone de 12 meses lunares ó lunaciones alternativamente de 29 y 30 dias. Ascendiendo á 354 dias, le faltan para el completo del año solar 11,2422, por cuya razon su mes principal, el de *Moharran*, recorre todas las estaciones, retrocediendo de la primavera al invierno, de éste al otoño, y por último al estío en poco mas de 33 años. Cuentan sus años desde la hégira ó huida de Mahoma, 622 antes de Jesucristo.

El *año romano* constaba en tiempo de Rómulo de 304 dias, repartidos en 10 meses en el orden siguiente.

Marzo.	Sextilis.
Abril.	Setiembre.
Mayo.	Octubre.
Junio.	Noviembre.
Quintilis.	Diciembre.

Numa reformó el año de Rómulo haciéndolo de 355 dias, distribuidos en 12 meses como sigue.

Enero.	29	Sextilis.	29
Marzo.	31	Setiembre.	29
Abril.	29	Octubre.	31
Mayo.	31	Noviembre.	29
Junio.	29	Diciembre.	29
Quintilis.	31	Febrero.	28

mas de cada dos años hacia uno de 13 meses con 377 y 378 dias alternativamente, de suerte que el periodo de cuatro años resultaba con 1465, y de consiguiente de 366¼ el año medio. Habiendo confiado despues á los Pontífices el cuidado de intercalar los meses *mercedonius*, que debian aproximar el año civil al solar, fue tal el abuso que éstos hicieron de semejante facultad, que llegaron á celebrarse en medio del estío las fiestas de otoño (de Baco), y las de primavera (de Céres), en el rigor del invierno.

Reforma Juliana. Informado Julio Cesar por Sosígenes, astrónomo egipcio, que el año solar constaba de 365¼ dias, hizo los años *comunes*, ó sea los tres primeros de cada cuatro, de 365 dias, agregando uno al cuarto año de dicho período, que constaba por lo tanto de 366, y se llamó *bisiesto*. Este dia que se agregaba á los años bisiestos, se incorporaba al mes de febrero, que se colocó el segundo, resultando distribuido el año en la forma siguiente.

Enero.	31	Quintilis.	31
Febrero. . . .	29 ó 30	Sextilis.	30
Marzo.	31	Setiembre.	30
Abril.	30	Octubre.	31
Mayo.	31	Noviembre.	30
Junio.	30	Diciembre.	31

Con el fin de perpetuar la memoria de los emperadores Julio Cesar y Augusto Cesar, se dieron despues los nombres de Julio y Agosto á los meses séptimo y octavo, que hasta entonces habian llevado los de Quintilis y Sextilis, agregando al último un dia que se quitó á Febrero.

El año quedó por lo tanto arreglado segun se conserva en la actualidad.

Enero.	31	Julio.	31
Febrero. . . .	28 ó 29	Agosto.	31
Marzo.	31	Setiembre.	30
Abril.	30	Octubre.	31
Mayo.	31	Noviembre. . . .	30
Junio.	30	Diciembre.	31

Para correjir los errores acumulados por el desorden con que los Pontífices habian intercalado los meses *mercedonius*, fue preciso hacer el año en que se puso en práctica esta reforma, que lo fue el 44 antes de Jesucristo y el 708 de la fundacion de Roma ó era romana, de 445 dias, llamándose *año de confusion*.

El mes lo dividian en tres partes desiguales, llamando *calendas* al primer dia, *nonas* al quinto en los meses menores y al séptimo en los mayores, é *idus* al décimotercio en los primeros y al décimoquinto en los segundos, distinguiendo los intermedios por los lugares que retrocedian. Asi se decia *pridie calendas* á la víspera de las calendas, *tertio calendas* á la ante-víspera, etc.

Año de los cristianos; correccion Gregoriana. Si comparamos el año Juliano, que viene á ser de 365,25 dias, con el trópico, que lo es de 365,24225936, se verá que aquel tiene 0,00774064 mas que éste. Semejante esceso hace 3,0976256 dias en 400 años. Para correjirlo, estableció el Papa Gregorio XIII que los años seculares ó finales de siglo (comun ó de 100 años) dejasen de ser bisiestos, escepto el último de cada cuatro. Como estos 0,0976256 dias que aún se ponen de mas en cada 400 años, hagan próximamente un dia al cabo de 4000; si se quisiera una mayor aproximacion entre el año civil y el solar, deberian hacerse tambien comunes los seculares múltiplos de 40, y asi sucesivamente. La regla que por lo tanto debe observarse para conocer los años bisiestos, es la siguiente. *Serán bisiestos todos aquellos cuyo número representativo sea divisible por 4, escepto los secu-*

lares en que no lo sea el número de su siglo, á no serlo tambien por 40. Es asimismo fácil calcular el número de dias trascurridos de nuestra era hasta una determinada fecha.

Desde luego se comprende bien que los números de dias 365 y 366, de que se componen los años, no exijian una distribucion en los 12 meses tan desigual y desordenada como se le ha dado. Hubieran podido hacerse éstos alternativamente de 30 y 31 dias en los bisiestos, reduciendo á 30 el de diciembre en los años comunes.

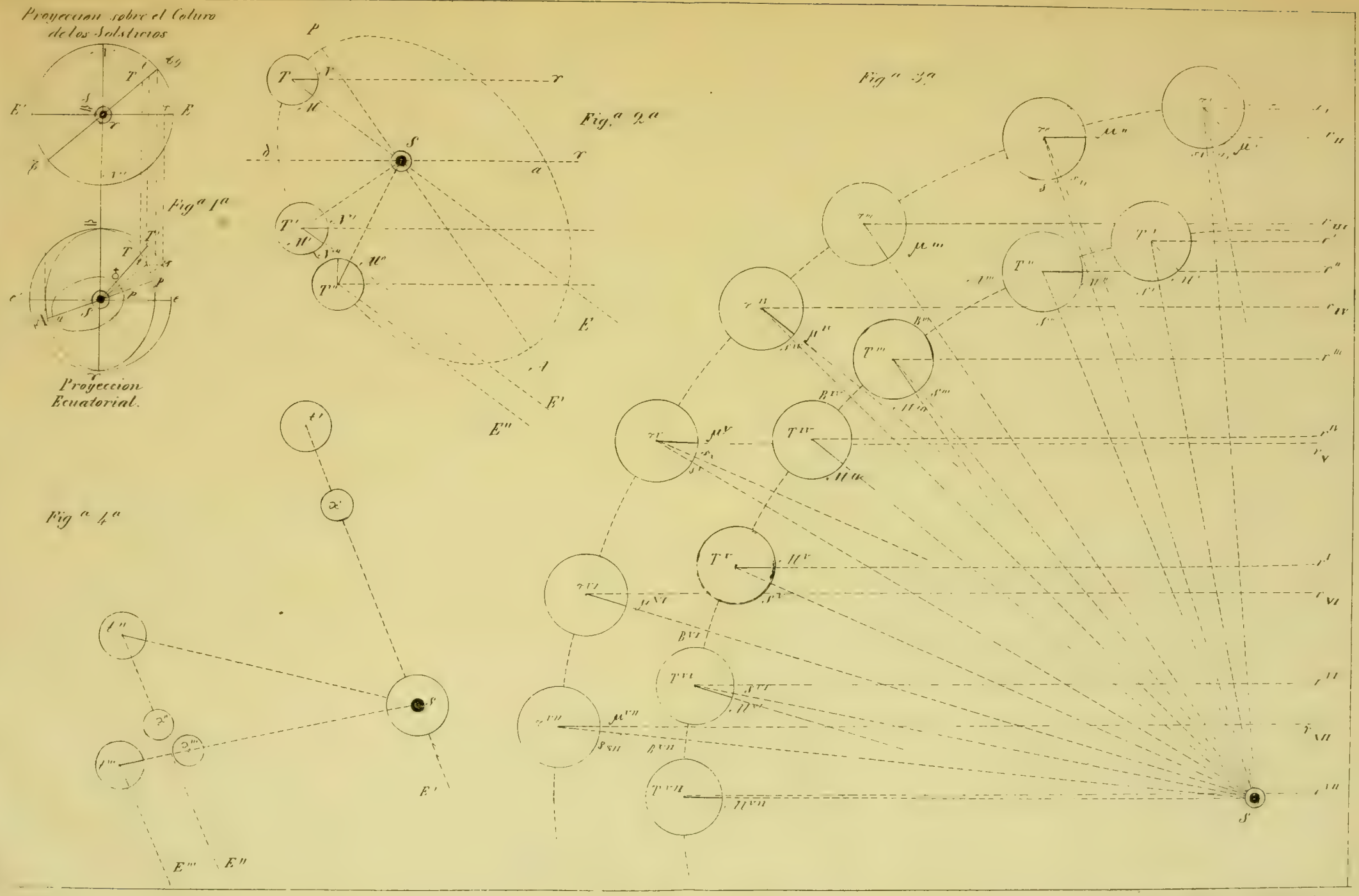
No contento el Papa Gregorio XIII con aproximar los años civiles á los trópicos, para que las estaciones cayesen en las mismas fechas, al poner en práctica su sistema en 1582 quiso correjir además los 9,7545 dias que se habian aumentado desde el 325 en que se celebró el Concilio de Nicea, y que habian traido al 11 de marzo el equinoccio de primavera. Con este objeto se llamó 15 de octubre al 5 de dicho mes y año, como si desde el citado 325 hubiera venido rijiendo la correccion Gregoriana. Como el de 1600 fue bisiesto en ambos calendarios, resulta que solos 12 dias cuenta hoy de mas el calendario Gregoriano, en uso en toda la cristiandad, que el Juliano, que lo está únicamente en Rusia y demás pueblos que siguen el rito griego.

Parece lo mas natural fijar por primer dia del año aquel dentro del cual cayera un determinado equinoccio ó un solsticio: mas esto traeria los graves inconvenientes de que en el meridiano donde comenzase el dia en el mismo instante del equinoccio, no podrian saber cuál de los dos dias, el que empezaba ó el que concluia, habia de considerarse el primero, mayormente cuando habria un error en la determinacion de este meridiano; y que la cuenta de los años bisiestos no estaria sujeta á la sencilla regla que hemos establecido, y se halla al alcance del vulgo, siendo preciso señalarlos por los astrónomos. Semejantes inconvenientes se notaron ya en el calendario republicano adoptado en Francia en 1793, y en el cual se habia fijado por primer dia del año aquel dentro del cual caia el equinoccio de otoño.

Hay tambien calendarios perpétuos, en que solo se espresan las festividades no movibles y á lo mas las posiciones medias del sol. En vez de los dias de la semana á que corresponde cada uno del año, lle-

van las siete primeras letras, *A, B, C, D, E, F, G*, del alfabeto, repetidas periódicamente en el mismo orden desde 1.° de enero hasta el último de diciembre. De esta suerte todos los dias del año designados con una misma letra pertenecerán á uno mismo de la semana, y conocido cuál es de ésta el señalado con una determinada letra, se tendrá igual conocimiento de todos los demás. La letra que en cada año corresponde al domingo se llama *letra dominical;* y estando arreglados estos almanaques para los años comunes, claro es que en los bisiestos habrá dos letras dominicales, una hasta el 29 de febrero y otra desde este dia en adelante, siendo fácil averiguar las que deben rejir en los años siguientes. En cada período de 28 años, si se prescinde de la correccion Gregoriana, se repiten del mismo modo estas siete letras, y á este período se llama *ciclo solar*. Se nombra *ciclo lunar* al período de 19 años en que se repiten próximamente en las mismas fechas las fases de la luna, diciéndose *áureo número* el lugar que cada año ocupa en el ciclo lunar, siendo primero de este período el que precedió al nacimiento del Redentor. Se designa con el nombre de *indiccion* á un período de 15 años; y si se cuenta éste desde 1.° de enero de 1815, se dice *indiccion romana. Edad de la luna* es el número de dias trascurridos despues del último novilunio, y *Epacta* la edad de la luna al principiar el año.

Antonio Cervero.


Proyeccion sobre el Coluro de los Solsticios
Fig.a 1.a
Proyeccion Ecuatorial.
Fig.a 2.a
Fig.a 3.a
Fig.a 4.a
Lit.a de Estado Mayor. Madrid.

ELEMENTOS

DE

CRONOLOGIA ANALITICA,

Ó SEA

Coleccion de fórmulas que representan las circunstancias principales de los dos calendarios cristianos (Juliano y Gregoriano), de la era de Nabonasar, de los calendarios Mahometano y Judáico, y la correspondencia de cada uno de estos dos últimos con los dos primeros.

POR D. JOSÉ SANCHEZ CERQUERO,

Académico de número en la Seccion de Ciencias exactas.

CAPITULO PRIMERO.

Nociones preliminares.

Una espresion de la forma $\left(\frac{m}{n}\right)_e$, en la cual m y n son enteros positivos, indica el cuociente entero que resulta de la division de m por n, desechando el resíduo si lo hubiere.

Una espresion de la forma $\left(\frac{m}{n}\right)_r$, en la cual m y n son enteros positivos, indica el resíduo de la division de m por n, cualquiera que fuese el cuociente. Dicho resíduo se considera siempre positivo, y en el caso de ser m negativo, se supone que se toma como resíduo $\left[n-\left(\frac{m}{n}\right)_r\right]$; esto es, el complemento á n.

Podemos en virtud de estas denominaciones establecer en general,

$$m=n\left(\frac{m}{n}\right)_e+\left(\frac{m}{n}\right)_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es fácil ver que $\left(\frac{m}{n}\right)_r$ no sufre alteracion aunque se añada á m un múltiplo cualquiera de n; esto es, que

$$\left(\frac{m}{n}\right)_r=\left(\frac{m+pn}{n}\right)_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

siendo p un entero cualquiera positivo, ó bien negativo menor que $\frac{m}{n}$, á fin de evitar los resíduos negativos.

Si se supone que m es exactamente divisible por n, y p representa un entero positivo, será siempre

$$\frac{m}{n}=\left(\frac{m+p}{n}\right)_e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

con tal de que p no sea mayor que $(n-1)$.

Tambien es visiblemente cierto que en todos casos

$$\left(\frac{m}{n}\right)_e \pm p=\left(\frac{m\pm np}{n}\right)_e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De la (1) resulta

$$\left(\frac{m}{n}\right)_e=\frac{m-\frac{m}{n}_r}{n},$$

y por tanto

$$m-\left(\frac{m}{n}\right)_e=\frac{m(n-1)+\left(\frac{m}{n}\right)_r}{n}.$$

Como el primer miembro es un entero, será el numerador del segundo exactamente divisible por n. Luego segun la fórmula (3), podremos añadir á dicho numerador la cantidad

$$p=(n-1)-\left(\frac{m}{n}\right)_r<n-1,$$

sin que se altere el cuociente entero, lo cual da

$$m-\left(\frac{m}{n}\right)_e=\left[\frac{(m+1)\,(n-1)}{n}\right]_e\ldots\ldots \quad (5)$$

Las cantidades positivas y enteras $p\left(\frac{m}{n}\right)_r$, $\left(\frac{pm}{n}\right)_r$, ó son iguales entre sí, ó no difieren sino en un múltiplo de n. Porque multiplicando la (1) por p, será

$$p\left(\frac{m}{n}\right)_r=pm-pn\left(\frac{m}{n}\right)_e;$$

y poniendo en la misma pm en vez de m, será

$$\left(\frac{pm}{n}\right)_r=pm-n\left(\frac{pm}{n}\right)_e;$$

de que resulta restando

$$p\left(\frac{m}{n}\right)_r-\left(\frac{pm}{n}\right)_r=n\left[\left(\frac{pm}{n}\right)_e-p\left(\frac{m}{n}\right)_e\right],$$

cuyo segundo miembro es evidentemente un múltiplo de n. De aquí se sigue, segun la (2),

$$\left(\frac{p\left(\frac{m}{n}\right)_r}{n}\right)_r=\left(\frac{\left(\frac{pm}{n}\right)_r}{n}\right)_r=\left(\frac{pm}{n}\right)_r\ldots. \quad (6)$$

La ecuacion

$$pm=pn\left(\frac{m}{n}\right)_e+p\left(\frac{m}{n}\right)_r,$$

que resulta de multiplicar la (1) por p, da, siendo h otro entero,

$$\left(\frac{pm}{h}\right)_r = \left[\frac{pn\left(\frac{m}{n}\right)_e + p\left(\frac{m}{n}\right)_r}{h}\right]_r.$$

Sumando ó restando al numerador del segundo miembro la cantidad $hp\left(\frac{m}{n}\right)_e$, que es un múltiplo de h, subsistirá la igualdad, segun la ecuacion (2); luego

$$\left(\frac{pm}{h}\right)_r = \left[\frac{p\,(n \pm h)\left(\frac{m}{n}\right)_e + p\left(\frac{m}{n}\right)_r}{h}\right]_r;$$

y de aquí

$$\left(\frac{p\,(n \pm h)\left(\frac{m}{n}\right)_e}{h}\right)_r = \left[\frac{\left(\frac{pm}{h}\right)_r - p\left(\frac{m}{n}\right)_r}{h}\right]_r;$$

que por la (6) se reduce á

$$\left(\frac{p\,(n \pm h)\left(\frac{m}{n}\right)_e}{h}\right)_r = \left[\frac{p\left(\frac{m}{h}\right)_r - p\left(\frac{m}{n}\right)_r}{h}\right]_r. \qquad (7)$$

Si en la ecuacion (1) se pone pm en vez de m y pn en vez de n, se convertirá en

$$pm = pn\left(\frac{mp}{np}\right)_e + \left(\frac{mp}{np}\right)_r,$$

y como $\left(\frac{mp}{np}\right)_e$ es evidentemente $= \left(\frac{m}{n}\right)_e$, será tambien

$$pm = pn\left(\frac{m}{n}\right)_e + \left(\frac{mp}{np}\right)_r.$$

Si se multiplica la (1) por p, resulta

$$pm = pn\left(\frac{m}{n}\right)_e + p\left(\frac{m}{n}\right)_r;$$

y de estas dos últimas,

$$\left(\frac{mp}{np}\right)_r = p\left(\frac{m}{n}\right)_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Suponemos al lector enterado de toda la estructura del calendario Juliano y Gregoriano, que puede verse por menor en las obras *Art de verifier les dates; Petan, de doctrina temporum; Lalande, Astronomía,* y otras; por tanto, entraremos solamente en la esplicacion de algunos de los elementos de uno ú otro cuando fuere necesario para la claridad en la demostracion de las fórmulas.

CAPITULO II.

Del calendario Juliano.

§. 1.— *Denominaciones que se seguirán fielmente en todo lo relativo á este calendario.*

T = año dado de la era cristiana, ó vulgar.
k = número de centenas contenidas en T.
h = años que van pasados del siglo á que corresponde T, hasta el mismo T inclusive.
De modo que

$$T = 100\,k + h.$$

v. g. en $1855 = T$, tenemos $k = 18$, $h = 55$.
L = letra dominical del año T, indicada por el número que lleva en la tablita siguiente:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 3,\ D = 4,\ E = 5,\ F = 6,\ G = 0.$$

N = áureo número $= 1 + a$.
E = Epacta.

$S =$ ciclo solar.

$i =$ indiccion romana.

$\varkappa =$ valor de la letra aneja en el calendario perpétuo al décimoquinto de la lunacion pascual, dia que indicaremos por π.

$\Pi =$ dia de Pascua de Resurreccion.

§. 2. — *Sobre la letra Dominical.*

El año primero de la era cristiana tuvo por letra dominical $B=2$; y como en dos años comunes consecutivos la letra del segundo es menor que la del primero en una unidad, al año 0 de la era cristiana correspondió la letra $C=3$. De que se sigue, que á no haber bisiestos, la letra del año T tendria por espresion,

$$L=\left(\frac{3-T}{7}\right)_r.$$

Mas como en el calendario Juliano ha habido en el tiempo T un número de bisiestos $=\left(\frac{T}{4}\right)_e$ hasta el año T inclusive (si éste lo fuere), y cada bisiesto hace retrogradar la letra una unidad mas que si fuese comun, se sigue que la espresion verdadera en el calendario Juliano de la letra dominical L, es

$$L=\left(\frac{3-T-\left(\frac{T}{4}\right)_e}{7}\right)_r \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Esta espresion dará casi siempre un resíduo negativo, y por tanto será preciso restarlo de 7 para obtener la letra. Sería fácil evitar este inconveniente, haciendo segun la (2)

$$L=\left(\frac{3+6T+6\left(\frac{T}{4}\right)_e}{7}\right)_r$$

pero esta tendria otro, á saber, el de operar con números demasiado crecidos. Veamos si es posible obtener fórmulas mas elegantes, y cuyo resultado se calcule con mas sencillez.

Sustituyendo en la (7)

$$m=T,\ p=2,\ n=4,\ h=7,$$

ya se tome el signo superior ó el inferior, se vendrá á un resultado que por la (2) se reduce á

$$\left[\frac{\left(\frac{T}{4}\right)_r}{7}\right]_r=\left(\frac{2\left(\frac{T}{7}\right)_r-2\left(\frac{T}{4}\right)_r}{7}\right)_r \ldots\ldots \quad (10)$$

con lo cual la (9) se convertirá en

$$L=\left(\frac{5+2\left(\frac{T}{4}\right)_r+4\left(\frac{T}{7}\right)_r}{7}\right)_r \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

espresion elegante que se debe al Sr. Ciccolini, analista italiano. Si ponemos en ella $T=100\,k+h$, se convertirá en

$$L=\left[\frac{(k+5)+2\left(\frac{h}{4}\right)_r+4\left(\frac{h}{7}\right)_r}{7}\right]_r \ldots\ldots \quad (12)$$

en cuyo cálculo entran siempre cantidades pequeñas.

Y como k es constante por espacio de un siglo, se presenta cómoda para hallar las letras de varios años que pertenezcan á un mismo valor de k.

Por ejemplo, desde 1700 hasta 1799, ambos inclusive, tendríamos, por ser $k=17$,

$$L=\left[\frac{6+2\left(\frac{h}{4}\right)_r+4\left(\frac{h}{7}\right)_r}{7}\right]_r \ldots\ldots\ldots \quad (12\ bis),$$

y poniendo $k=18$, resultará para desde 1800 hasta 1899,

$$L=\left[\frac{2\left(\frac{h}{4}\right)_r+4\left(\frac{h}{7}\right)_r}{7}\right]_r \ldots\ldots\ldots \quad (12\ ter).$$

En los años bisiestos hay, como se sabe, dos letras. El cálculo anterior da la segunda, esto es, la que marca los domingos en el calendario perpétuo desde marzo en adelante. La primera, que los marca en los meses de enero y febrero, es la que sigue inmediatamente en el orden alfabético á la dada por el cálculo.

Por ejemplo, $T = 1540$,

da $$k = 15,\ h = 40,\ L = \left(\frac{18+20}{7}\right)_r = 3 = C.$$

Serán, pues, D, C las dos letras; la primera servirá desde 1.° de enero hasta fin de febrero, y la segunda en lo restante del año. En términos generales, las dos letras son $(L+1)$ y L.

§. 5.—*Ciclo solar.*

Cuando $T=1$, $s=10$; luego

$$s = 1 + \left(\frac{T+8}{28}\right)_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

y tambien

$$s = 1 + \left(\frac{16k+h+8}{28}\right)_r$$

$$= 1 + \left[\frac{\left(\frac{16k}{28}\right)_r + \left(\frac{h+8}{28}\right)_r}{28}\right],$$

que por la 8 se reduce á

$$s = 1 + \left[\frac{4\left(\frac{4k}{7}\right)_r + \left(\frac{h+8}{28}\right)_r}{28}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

con $k=17$,

$$s = 1 + \left(\frac{h}{28}\right)_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14\ bis).$$

y un $k=18$,

$$s=1+\left(\frac{h+16}{28}\right)_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14\ ter.)$$

En el calendario juliano es constante la relacion entre s y L; y se hallará facilmente que

$$L=\left[\frac{4+2\left(\frac{s+3}{4}\right)_r+4\left(\frac{s+3}{7}\right)_r}{7}\right]_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Tambien puede servir para hallar la letra ó letras dominicales en el calendario juliano, el conocimiento de que se restablecen cada 28 años; esto es, que son las mismas respectivamente para un mismo valor de s.

§. 4. — *Indiccion romana.*

Cuando $T=1$, $i=4$. Luego

$$i=1+\left(\frac{T+2}{15}\right)_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

y tambien

$$i=1+\left[\frac{5\left(\frac{2k}{3}\right)_r+\left(\frac{h+2}{15}\right)_r}{15}\right]_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Desde 1700 hasta 1799..... $i=1+\left(\frac{h+7}{15}\right)_r$,
— 1800 — 1899..... $i=1+\left(\frac{h+2}{15}\right)_r$ } ..... (17 *bis*).

§. 5. — *Del áureo número y epacta.*

Cuando $T=1$, $N=2$; de que se sigue

$$N=1+\left(\frac{T}{19}\right)_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

$$N=1+\left[\frac{\left(\frac{5h}{19}\right)_r+\left(\frac{h}{19}\right)_r}{19}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18\ bis).$$

Desde 1700 hasta 1799 inclusive. . $N=1+\left(\frac{h+9}{19}\right)_r$

— 1809 — 1899 — $N=1+\left(\frac{h+14}{19}\right)_r$ . . (18 *ter*).

Como los valores estremos de esta cantidad son 1 y 19, los de $a=N-1$ serán 0 y 18; de modo que ni N puede ser $=0$, ni $a>18$. Esta advertencia nos será util en adelante.

En el calendario juliano perpétuo, además de las letras dominicales asignadas á cada dia, hay en muchos de estos asignado un áureo número, sin que á primera vista aparezca la ley con que se han colocado. Para entenderla conviene saber que están destinados á indicar los dias de novilunio en el año que tiene aquel áureo número; por ejemplo, el 3 colocado en 1.° de enero indica que hay novilunio eclesiástico en 1.° de enero en el año en que $N=3$.

Además debe tenerse presente: 1.° que el año solar comun es 11 dias mas largo que el lunar comun ó de 354 dias; 2.° que se llama epacta al número de dias que quedan para completar una lunacion de 30 dias al contar 1.° de enero en fecha solar; 3.° que por tanto, si se resta de 30 la epacta del año T, se tendrá un dia ♁ de enero que será novilunio eclesiástico.

Sentado lo dicho, y llamando E á la epacta, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} E=\left(\frac{11\,N-3}{30}\right)_r \\ ♁=30\ de\ enero-E \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Estas dos fórmulas darán el dia δ á que corresponde cada N, y se hallará conforme con las indicaciones del calendario.

Los mismos resultados se verifican en el mes de marzo. Para el de abril, si llamamos δ' al dia del mes en que debe colocarse un áureo número cualquiera N, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} E=\left(\dfrac{11N-3}{30}\right)_r \\ \delta'=29\ de\ abril-E \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\quad (20);$$

fórmulas que tambien satisfacen al calendario perpétuo juliano.

Nos basta la concordia que acabamos de advertir en los meses de enero, marzo y abril para los usos que hemos de hacer de estas advertencias. Réstanos que decir, que si al margen de cada áureo número N se escribe en el calendario perpétuo el valor correspondiente de E, quedará patente y de simple inspeccion el orden que antes no se advertia entre N y δ, ó entre N y δ'; porque se verá que las epactas E disminuyen en una unidad por cada dia que aumentan δ ó δ'.

Tambien se ve que la correspondencia de N y E es constante en el calendario juliano, y tal como sigue.

N = *áureo número.*	*Epacta juliana* = E.
1.	8
2.	19
3.	0 ó 30
4.	11
5.	22
6.	3
7.	14
8.	25
9.	6
10.	17
11.	28
12.	9
13.	20
14.	1
15.	12
16.	23
17.	4
18.	15
19.	26

segun resulta del cálculo de las primeras fórmulas 19 y 20.

§. 5. — *Pascua y demás fiestas movibles julianas.*

Se sabe que el Concilio general de Nicea, estableció que la fiesta de Pascua se celebrase en el primer domingo despues del plenilunio inmediatamente posterior al 20 de marzo; entendiendo por plenilunio el dia décimocuarto contado desde el novilunio eclesiástico inclusive. A este dia décimocuarto se da en la liturgia el nombre de *término pascual.*

De aqui se deduce, que el primer novilunio eclesiástico que se verifique despues del 7 de marzo, es el novilunio pascual.

Luego δ = *marzo* 8 es la mínima fecha posible de dicho novilunio; 21 de marzo es la mínima del plenilunio ó *término pascual;* 22 de marzo el mínimo valor del dia décimoquinto π; y tambien el mínimo del dia de Pascua = Π, que se verifica si $L = \lambda = D = 4$, por ser esta la letra aneja en el calendario perpétuo al dia 22 de marzo.

A este dia corresponde, segun el párrafo anterior

$$N = 16,\ E = 25,\ \lambda = 4.$$

El áureo número 16 vuelve á encontrarse en el calendario perpétuo el dia 6 de abril, y no antes; por tanto el valor $\delta' = 5$ de abril, ó su igual $\delta = 36$ marzo, es la máxima fecha posible del novilunio pascual; 18 de abril = 49 de marzo la máxima del plenilunio; y 19 de abril = 50 de marzo el máximo valor de π.

A este dia corresponde

$$N = 8,\ E = 25,\ \lambda = 4.$$

Se ha dicho que λ es el valor de L correspondiente al dia π, y se ha tomado sin embargo el de la aneja en el calendario al dia del novilunio. No hay en esto error ni contradiccion, pues siendo de dos semanas justas el intérvalo de ambos dias, la letra es una misma para ambos.

Se infiere de la esplicacion anterior, que la cantidad (π — 22 *marzo*) es siempre, ó cero, ó positiva y menor que 30.

Y de lo decretado por el Concilio, que

$$\Pi = \pi + \left(\frac{L - \lambda}{7}\right)_r \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Sentados estos principios, pasemos con los datos del párrafo anterior, y el calendario Juliano perpétuo á la vista, á la formacion de la siguiente tabla, que no sale de los límites que acaban de fijarse.

	δ	N	E		π		λ
MARZO	8	16	25	MARZO	22		4
	9	5	22		23		5
	11	13	20		25		0
	12	2	19		26		1
	14	10	17		28		3
	16	18	15		30		5
	17	7	14		31		6
	19	15	12		33=	ABRIL 2	1
	20	4	11		34=	3	2
	22	12	9		36=	5	4
	23	1	8		37=	6	5
	25	9	6		39=	8	0
	27	17	4		41=	10	2
	28	6	3		42=	11	3
	30	14	1		44=	13	5
	31	3	0, ó 30		45=	14	6
ABRIL.	2	11	28		47=	16	1
	4	19	26		49=	18	3
	5	8	25		50=	19	4

Desde luego se observa entre estas cantidades la ley

$$\pi - 22\ marzo = 23 - E\ ;$$

y por ser el primer miembro una cantidad < 30, será

$$\pi - 22\ marzo = \left(\frac{23-E}{30}\right)_r = \left(\frac{53-E}{30}\right)_r\ ;$$

luego por la (21),

$$\Pi = marzo\ 22 + \left(\frac{53-E}{30}\right)_r + \left(\frac{L-\lambda}{7}\right)_r .$$

Es facil advertir tambien que mientras $E<24$, resulta siempre

$$\left(\frac{E+\lambda}{7}\right)_r=6;$$

y cuando $E>24$,

$$\left(\frac{E+\lambda}{7}\right)_r=1.$$

Luego, finalmente, la espresion de Π será

$$\Pi=marzo\ 22+\left(\frac{55-E}{30}\right)_r+\left(\frac{E+L\pm1}{7}\right)_r\ldots\ldots\ (22),$$

usando del signo $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\\text{inferior}\end{matrix}\right\}$ cuando fuese E $\left\{\begin{matrix}<24\\>24\end{matrix}\right\}$.

La tabla dada en el párrafo anterior de correspondencia entre N y E, manifiesta que esta última cantidad jamás puede ser igual á 24 en el calendario Juliano. De que se sigue, que la fórmula (22) abraza todos los casos posibles. Tambien se debe la misma á Ciccolini, é igualmente ignoro cómo la dedujo.

Como la epacta cero y la 30 son una misma, conviene advertir que si se hace $\left\{\begin{matrix}E=0\\E=30\end{matrix}\right\}$ en la fórmula (22), será preciso usar del signo $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\\text{inferior}\end{matrix}\right\}$. Con este cuidado ambos resultados serán iguales.

Si para abreviar, se hace

$$\left(\frac{55-E}{30}\right)_r=d;\ \left(\frac{E+L\pm1}{7}\right)_r=e,$$

$$d+e=p;$$

será

$$\Pi=marzo\ 22+p.\ldots\ldots\ (22\ bis).$$

Veamos si pueden obtenerse espresiones cómodas de d y e, en las cuales entre tan solamente el año T, ó su valor $(100k+h)$; porque

entonces para hallar el dia de Pascua Π no tendremos necesidad de conocer la epacta E ni la letra L, como es preciso para servirse de la fórmula (22). Hagamos préviamente

$$\left(\frac{T}{4}\right)_r = b; \left(\frac{T}{7}\right)_r = c,$$

y en primer lugar poniendo $\left(\frac{11N-3}{30}\right)_r = \left(\frac{11a+8}{30}\right)_r$ en la espresion de d, tenemos facilmente $d = \left(\frac{15+19a}{30}\right)_r$.

Además

$$E = \left(\frac{11a+8}{30}\right)_r = \left(\frac{53-d}{30}\right)_r = \left(\frac{23-d}{30}\right)_r.$$

Cuando $E < 24$, resulta $\left(\frac{23-d}{30}\right)_r = 23-d = E$,

$$e = \left(\frac{23-d+3+2b+4c+1}{7}\right)_r = \left(\frac{2b+4c+6d+6}{7}\right)_r$$

Cuando $E > 24$, resulta $\left(\frac{53-d}{30}\right)_r = 53-d = E$;

$$e = \left(\frac{53-d+3+2b+4c-1}{7}\right)_r = \left(\frac{2b+4c+6d+6}{7}\right)_r.$$

Luego con el solo conocimiento de $T = 100k+h$, podemos hacer

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{5k+h}{19}\right)_r = a; \left(\frac{h}{4}\right)_r = b; \left(\frac{2k+h}{7}\right)_r = c; \left(\frac{15+19a}{30}\right)_r = d; \\ \left(\frac{2b+4c+6d+6}{7}\right)_r = e; d+e=p; \\ \Pi = marzo\ 22+p. \end{array}\right\} (23).$$

El método contenido en las fórmulas (23) se debe al geómetra aleman Gauss. Contra él se ha objetado que el conocimiento de E y L tienen ademas de la determinacion de la Pascua otros varios usos. Pero no se ha advertido por nadie que yo sepa, que las cantidades de Gauss presentan un medio facilísimo de hallar á E y L. En efecto, para la primera tenemos siempre,

$$E = \left(\frac{11a+8}{30}\right)_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24),$$

ó mas sencillamente

$$E = \left(\frac{55-d}{30}\right)_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24\ bis).$$

Para determinar á L tenemos cuando $E<24$,

$$E = 23 - d.$$

Luego entonces,

$$e = \left(\frac{23-d+L+1}{7}\right)_r = \left(\frac{3-d+L}{7}\right)_r ;$$

y por ser, cuando $E>24$,

$$E = 53 - d,$$

será entonces,

$$e=\left(\frac{55-d+L-1}{7}\right)_r=\left(\frac{5-d+L}{7}\right)_r;$$

luego en general

$$L=\left(\frac{d+e+4}{7}\right)_r=\left(\frac{p+4}{7}\right)_r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25),$$

que son fórmulas mas sencillas aún que las directas.

Obtenida la cantidad p, sea por el método de Ciccolini ó por el de Gauss, se hallan con gran facilidad todas las demás fiestas movibles por medio de las espresiones siguientes:

Septuagésima.....	á 18 de enero	$+p$	
Ceniza.....	á 4 de febrero	$+p$	
Témporas de Cuaresma, á 11, 13	y 14 de febrero	$+p$	
Pascua.....	á 22 de marzo	$+p$	... (25 *bis*).
Ascension.....	á 30 de abril	$+p$	
Pentecostés.....	á 10 de mayo	$+p$	
Corpus.....	á 21 de mayo	$+p$	

En los años bisiestos es preciso añadir una unidad en cada una de las fiestas sobredichas que cayere antes del 29 de febrero, segun el cálculo general.

El domingo 1.° de Adviento es á $\left[27\ de\ noviembre+\left(\frac{L-2}{7}\right)_r\right]$;

y poniendo por L su valor (25),

Domingo 1.° de adviento á $\left[27\ de\ noviembre+\left(\frac{p+2}{7}\right)_r\right]$... (26),

Pues que el último domingo despues de Pentecostés resulta en esta virtud á 20 *de noviembre* $+\left(\frac{p+2}{7}\right)_r$ y Pentecostés es

á 10 *de mayo* $+p$;

el intérvalo será siempre $= 196\ dias - (p+2) + \left(\frac{p+2}{7}\right)_r$.

Por ser esta cantidad un número cabal de semanas, será divisible por 7; verificando la division, y teniendo presente la ecuacion (1), resulta finalmente

Número de Dominicas entre Pentecostés y Adviento..... $\} = 28 - \left(\frac{p+2}{7}\right)_e \ldots (27)$.

La fecha del domingo 1.° despues de Epifanía es

$$7\ de\ enero + \left(\frac{L}{7}\right)_r = 7\ de\ enero + \left(\frac{p+4}{7}\right)_r,$$

debiéndose poner en esta espresion $(p+1)$ en vez de p, si el año fuere bisiesto.

La fecha de la Septuagésima es

$$18\ de\ enero + p,$$

con la misma advertencia para el año bisiesto.

El intérvalo será $= 7\ dias + (p+4) - \left(\frac{p+4}{7}\right)_r$; y de aqui, partiendo por 7,

Número de Dominicas desde Epifanía hasta la de Septuagésima exclusive..... $\} = 1 + \left(\frac{p+4}{7}\right)_e$,

agregando á p la unidad si el año fuese bisiesto.

De modo que la suma total de Dominicas *post Epiphaniam* y *post Pentecostem* será

$$\left.\begin{array}{l}\text{En año comun} = 29 + \left(\dfrac{p+4}{7}\right)_e - \left(\dfrac{p+2}{7}\right)_e, \\ \text{En año bisiesto} = 29 + \left(\dfrac{p+5}{7}\right)_e - \left(\dfrac{p+2}{7}\right)_e\end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (27\ bis),$$

cantidad que no puede ser menor que 29 ni mayor que 30.

Por último es facil ver que

$$\text{LAS TÉMPORAS} \begin{cases} \text{de Pentecostés son á 15, 15 y 16 de mayo...} + p \\ \text{de setiembre. . . . á 15, 17 y 18 de setiembre} + \left(\dfrac{p+1}{7}\right)_r \\ \text{de diciembre. . . . á 14, 16 y 17 de diciembre} + \left(\dfrac{p+2}{7}\right)_r \end{cases} \ldots (28).$$

Mas adelante pondremos un ejemplo, despues de haber tratado de la reforma del calendario; por ahora basta advertir que en el Juliano, como las epactas vuelven á ser perpétuamente las mismas á cada 19 años, y las letras las mismas al cabo de 28 años, no dependiendo la Pascua sino de estos dos elementos, vuelve periódicamente al mismo dia cada $19 \times 28 = 532$ años; periodo que lleva el nombre de *Dionisiano*.

Concluiremos este capítulo, adaptando las fórmulas generales de Gauss (25), (24 *bis*) y (25) á los siglos XVIII y XIX; porque en nuestros tiempos serán los que mas ocasiones presenten de acudir á aquellas, cuando fuere necesario buscar el cómputo juliano.

Desde 1700 hasta 1799, ambos inclusive, esto es, cuando $k = 17$

$$\left(\frac{9+h}{19}\right)_r = a; \left(\frac{h}{4}\right)_r = b; \left(\frac{6+h}{7}\right)_r = c; \left(\frac{15+19\,a}{30}\right)_r = d;$$

$$\left(\frac{6+2b+4c+6d}{7}\right)_r = e;\ d+e = p;$$

Dia de la Pascua Juliana = *marzo* $(22+p)$, fecha juliana.

$$E=\left(\frac{55-d}{30}\right)_r;\quad L=\left(\frac{4+p}{7}\right)_r;\ \text{julianas.}$$

En años bisiestos hay dos letras, que son $(L+1)$ y L.

Desde 1800 hasta 1899, ambos inclusive; esto es, cuando $k=18$,

$$\left(\frac{14+h}{19}\right)_r=a;\ \left(\frac{h}{4}\right)_r=b;\ \left(\frac{1+h}{7}\right)_r=c;\ \left(\frac{15+19a}{30}\right)_r=d;$$

$$\left(\frac{6+2b+4c+6d}{7}\right)_r=e;\ d+e=p,$$

Dia de la Pascua Juliana = *marzo* $(22+p)$, fecha juliana.

$$E=\left(\frac{55-d}{30}\right)_r;\ L=\left(\frac{4+p}{7}\right)_r;\ \text{julianas.}$$

La misma advertencia respecto de los años bisiestos.

CAPITULO III.

Del Calendario reformado ó gregoriano.

§. 1.— *Denominaciones.*

Se designarán las cantidades con las mismas letras respectivamente que en el calendario Juliano, pero distinguiendo con una vírgula en el gregoriano las que no fueren unas mismas en ambos calendarios.

Además:

$\supset$ = reduccion de fechas julianas ó gregorianas, segun la correccion hecha en el nuevo calendario al año solar que suponia el antiguo, siempre aditiva á las fechas julianas, ó sustractiva de las gregorianas.

$\subset$ = correccion á las fechas de los novilunios del antiguo calendario, ó mas exactamente á las epactas que deberian representarlos en el antiguo calendario lunar.

§. 2. *Correccion del año solar.*

Se añadieron diez dias al cómputo comun, que era el juliano, inmediatamente despues del 4 de octubre de 1582; de modo que en aquel año el dia siguiente al 4 de octubre fue denominado el 15 en vez del 5. En este último murió la ilustre española santa Teresa de Jesus; esto es, en el dia que se hubiera llamado el 5 sin la correccion gregoriana, pero que fue el 15 despues de adoptada.

Resulta, pues, que la primera parte de $\odot$ es $= 10$ dias,

En el calendario Juliano, cada 4 años hay uno bisiesto, sin escepcion; de modo que

$$h=0, y\ \left(\frac{h}{4}\right)_r=0$$

dan para T año bisiesto, cualquiera que fuese el valor de k. En el gregoriano se ha suprimido el bisiesto siempre que $\left(\frac{k}{4}\right)_r$ no resulta $=0$, empezando la supresion desde $k=17$; lo cual daria por segunda parte $+(k-16)$ dias si no se hubiese mandado conservar el bisiesto cuando $\left(\frac{k}{4}\right)_r$ volviese á ser $=0$, lo cual da una tercera parte

$$=-\left(\frac{k-16}{4}\right)_e. \text{ Tenemos pues,}$$

$$\odot=10+(k-16)-\left(\frac{k-16}{4}\right)_e,$$

$$\odot=-2+k-\left(\frac{k}{4}\right)_e \ldots\ldots\ldots \quad (29).$$

Esta espresion se trasforma, segun la ecuacion (5), en la

$$\odot=-2+\left(\frac{3(k+1)}{4}\right)_e,$$

ó bien en la

$$\odot = \left(\frac{3k-5}{4}\right)_e \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30).$$

La espresion (29) da tambien,

$$\left(\frac{\odot}{7}\right)_r = \left[\frac{5-\left(\frac{k}{4}\right)_e+\left(\frac{k}{7}\right)_r}{7}\right]_r.$$

Y por otra parte la (7) da

con $m=k$, $p=2$, $n=4$, $h=7$,

$$\left(\frac{\left(\frac{k}{4}\right)_e}{7}\right)_r = \left(\frac{2\left(\frac{k}{7}\right)_r-2\left(\frac{k}{4}\right)_r}{7}\right)_r;$$

luego

$$\left(\frac{\odot}{7}\right)_r = \left(\frac{5+2\left(\frac{k}{4}\right)_r+6\left(\frac{k}{7}\right)_r}{7}\right)_r;$$

y pues que evidentemente $L' = \left(\frac{L+\odot}{7}\right)_r$, será por último, poniendo en vez de L su valor (11),

$$L' = \left[\frac{1+2\left(\frac{T}{4}\right)_r+4\left(\frac{T}{7}\right)_r+2\left(\frac{k}{4}\right)_r+6\left(\frac{k}{7}\right)_r}{7}\right]_r \ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

ó mas sencillamente

$$L' = \left(\frac{1+2\left(\frac{k}{4}\right)_r+2\left(\frac{h}{4}\right)_r+4\left(\frac{h}{7}\right)_r}{7}\right)_r \ldots\ldots\ldots \quad (32),$$

(*) Desde 1700 hasta 1799, $k=17 \ldots L' = \left(\frac{3+2\left(\frac{h}{4}\right)_r+4\left(\frac{h}{7}\right)_r}{7}\right)_r$;

— 1800 — 1899, $k=18 \ldots L' = \left(\frac{5+2\left(\frac{h}{4}\right)_r+4\left(\frac{h}{7}\right)_r}{7}\right)_r$ (32 *bis*).

(*) Conviene recordar que en años bisiestos hay dos letras ($L'+1$) y L'.

Como los rusos y griegos cismáticos siguen todavía el calendario juliano, se ha convenido en indicar la correspondencia de fechas formando un quebrado cuyo $\left\{\begin{matrix}\text{numerador}\\\text{denominador}\end{matrix}\right\}$ es la $\left\{\begin{matrix}\text{juliana}\\\text{gregoriana}\end{matrix}\right\}$.

Ejemplos.

Junio $\frac{4}{15}$ *de* 1795; $\frac{21\ \textit{setiembre}}{5\ \textit{octubre}}$ 1818; $\frac{20\ \textit{diciembre}\ 1840}{1.^{\circ}\ \textit{enero}\ 1841}$; &c.

Mas adelante se hablará de algunas circunstancias que deben tenerse presentes en las fechas antiguas de naciones que despues de algun tiempo admitieron el calendario gregoriano.

§. 3.—*Correccion del año lunar. Epactas.*

El calendario lunisolar juliano supone que al cabo de 19 años de 365,25 dias, vuelven las posiciones relativas medias del sol y luna, en longitud, á ser exactamente las mismas. En esta hipótesis hay un error de 1^h 28′ en cada ciclo, que asciende por tanto á un dia en cada tres siglos próximamente, y que los autores del nuevo calendario fijaron con gran exactitud en 8 dias cada 25 siglos.

Para corregir el resultado del error, ya considerable en la época de la correccion, y evitarlo en lo sucesivo, se dispuso lo primero que continuando el ciclo de los 19 años, no fuese constante la correspondencia entre cada áureo número y su epacta, como lo era antes. Despues se determinó que los novilunios no fuesen indicados ya por los áureos números, y se omitieron estos del todo en el nuevo calendario perpétuo, reemplazándolos, para marcar los dias de novilunio, las epactas escritas al margen de cada uno de los dias del año.

La disposicion de estas es como sigue.

Al lado del 1.° de enero va escrito un asterisco *, indicacion que equivale á la epacta 0 ó 30. Este mismo signo se pone de allí á 30 dias,

esto es, el 31 de enero; se repite de allí á 29 dias; esto es, el 1.° de marzo; de allí á 30 dias, es decir, el 31 de este; y asi hasta fin de año alternando 29 y 30 dias. Corresponderá el último asterisco al 21 de diciembre. Todos estos dias son novilunios eclesiásticos cuando la epacta del año dado es 0 ó 30.

Al lado de cada uno de los dias 5 de febrero, 5 de abril y así en adelante de 59 en 59 dias, se escriben las dos epactas 24 y 25.

Hecho esto, basta ir rellenando los huecos con epactas que vayan disminuyendo un dia por cada uno que adelanta la fecha del mes; con lo cual quedan asignadas epactas fijas á todos los dias del año, las cuales indican los novilunios eclesiásticos, cada una en el dia á cuyo margen va escrita.

Por ejemplo, si la epacta gregoriana de un año dado es 20, como sucedió en 1777, los dias 11 de enero, 9 de febrero, 11 de marzo y demás que en el calendario perpétuo llevan al margen la epacta 20, fueron novilunios eclesiásticos en 1777.

De la disposicion anterior de las epactas, resulta que por lo comun los meses lunares son alternativamente de 30 y de 29 dias. En el ejemplo propuesto se ve que la lunacion que empezó el 11 de enero fué de 29 dias, la siguiente de 30, y asi en adelante.

Para completar la construccion del calendario, conviene advertir que todas las epactas de que se ha hablado hasta ahora, se hallan escritas en todos los misales, breviarios y demás libros de rezo en números romanos y con color rojo; en números romanos y negros en los tratados de cronología; y en este escrito se indicarán con números comunes tales como se necesitan para emplearlos en el cálculo.

Sentado lo dicho falta escribir una epacta 25, negra, y en números comunes, en 12 dias del año; á saber al lado de la epacta roja 25 en los seis meses en que no están escritas en un mismo dia las 24 y 25 rojas, y al lado de la epacta roja 26 en los otros seis meses en que concurren dichas 24 y 25 rojas. Con esto, y despues de haber escrito una epacta negra 19 (*) al lado de la 20 del 31 de diciembre, queda concluido el ca-

(*) De esta epacta 19 negra se esplicará el objeto mas adelante.

lendario perpétuo lunar gregoriano, que se hará lunisolar con solo agregarle las letras dominicales en todos los dias del año.

Se ha dicho que segun la disposicion del nuevo calendario, resultan los meses lunares alternativamente de 29 y 30 dias *por lo comun*. Hay en efecto algunas escepciones.

La primera es cuando hay año bisiesto. Supongamos que á uno de estos corresponde la epacta 25 roja, y tendremos

Novilunios.	*Intérvalos.*
6 de enero.	
5 de febrero.	30 dias,
6 de marzo.	30 dias, por tener febrero 29,
5 de abril.	30 dias,
&c.,	

en cuyo caso se ve que hay tres lunas consecutivas de 30 dias.

Supongamos que siendo el año bisiesto, tiene la epacta 24; tendremos entonces:

Novilunios.	
7 de enero	
	. . . . . 29 dias.
5 de febrero	
	. . . . . 31 dias.
7 de marzo	
	. . . . . 29 dias.
5 de abril	

Para hallar la segunda escepcion, es preciso entrar en algunos pormenores.

Aunque la correspondencia entre los áureos números y las epactas es variable en el calendario reformado, segun ya hemos dicho, con todo permanece constante, por lo menos mientras k no varia; es decir, cuando menos por espacio de un siglo. Asi es que hallada para un va-

lor de k la correspondencia entre los de N y E', se tiene tambien la de $(N+1)$ y $(E'+11)$ y la de $(N+2)$ y $(E'+22)$, restando 30 siempre que de la adicion sucesiva de 11 unidades resulta una epacta mayor que 30. Esto equivale á añadir un mes lunar al cabo de tres años, ó mas exactamente 7 meses en cada ciclo. Pero de estos 7 meses que se llaman *embolísmicos*, son los 6 de 30 dias, y el restante de 29 dias. A veces por la disposicion de las epactas resulta este de 30 dias, pero la adicion de 12 dias en el último año del ciclo compensa este dia, pues que añadirlo á la epacta equivale á anticiparlo en el novilunio.

Se ve, pues, otro motivo de escepcion en la alternativa de meses lunares *plenos* ó de 30 dias, y *cavos* ó de 29 dias.

Otra es, por último, la alteracion de un dia, que se hace, segun las reglas de la correccion gregoriana, en el último año de varios siglos en la correspondencia de N y E'.

Para hacer ver el objeto y necesidad de la epacta 25 negra basta considerar que dentro de un mismo ciclo de 19 años no deben caer los novilunios en unos mismos dias del año, lo cual sucederia si en un mismo ciclo se hallasen las epactas 25 roja y 24; porque en efecto, hallándose estas dos asignadas á unos mismos dias en el calendario perpétuo, el año que tuviese una de ellas tendria por lo menos seis novilunios en los mismos dias que el que tuviese la otra. Pero poniendo la epacta 25 negra al lado de la 26 roja, queda la 24 haciendo su oficio ordinario, y á la 25 negra se asignan los novilunios en vez de hacerse á la 25 ordinaria ó roja; y como esta se desecha en semejantes casos, se han escrito las 25 negra y roja en los seis meses restantes para que con la primera se hallen los novilunios de los mismos, resultando la sola alteracion de convertirse en *cavos* los meses *plenos*, é inversamente. Interesa hallar por medio del cálculo cuándo concurren las epactas 24 y 25 dentro de un mismo ciclo, y hacer ver que entonces no puede tener lugar la 26; porque si asi no fuese, el haber puesto en 6 meses al lado de esta la 25 negra, reproduciria el mismo inconveniente que se trataba de evitar.

Se ha dicho, hace poco, que á dos áureos números consecutivos N y $(N+1)$ corresponden dos epactas E', $(E'+11)$. Inversamente, á dos

epactas consecutivas E', $(E'+1)$ corresponden los áureos números N, $(N+11)$. Para demostrarlo basta que consideremos que cada unidad de aumento en N produce uno de 11 unidades en E'; por consiguiente un aumento de 11 unidades en N producirá en E' uno de $\left(\frac{11^2}{30}\right)_r = 1$.

Luego si á $\left\{\begin{array}{c} N=1 \\ N=2 \\ N=3 \\ \text{\&c.} \end{array}\right\}$ correspondiese $E'=24$, corresponderia

tambien á $\left\{\begin{array}{c} N=12 \\ N=13 \\ N=14 \\ \text{\&c.} \end{array}\right\}$, $E'=25$; mas la última posible de

estas correspondencias sería

$$E'=24 \text{ con } N=8, \text{ y } E'=25 \text{ con } N=19;$$

porque $E'=24$ con $N=9$ daria para $E'=25$, $N=20$, lo cual es absurdo, y lo mismo siendo $E'=24$ con $N=9$. Luego para que las dos epactas 24 y 25 concurran en un mismo ciclo, es preciso y suficiente que á la 25 corresponda un áureo número no menor que 12; esto es, que cuando el cálculo diere $E'=25$, esta epacta será $\left\{\begin{array}{c}\text{roja} \\ \text{negra}\end{array}\right\}$ si fuese $\left\{\begin{array}{c} N<12 \\ N>11 \end{array}\right\}$.

La epacta del año, además de señalar los dias de novilunio, tiene otro uso, que es el de indicar el número de dias que van pasados en 1.° de enero de aquel año de la lunacion corriente. De modo que la epacta E' del año T nos dice que el dia 1.° del mes de enero del año T habian pasado E' dias de la lunacion corriente; ó lo que es lo mismo, que el dia 1.° de enero del año T era el $(E'+1)$ de la lunacion, ó que la *cdad* de la luna era en aquel dia $(E'+1)$; todo segun el cómputo eclesiástico.

Supongamos ahora que con un cierto valor de k corresponde á

$N=19$, $E'=19$, como estuvo sucediendo desde el año de la correccion (1582) hasta 1700 esclusive. El año T á que corresponde N y E' tendria un novilunio en 2 de diciembre, que en el calendario perpétuo lleva la epacta $E'=19$. La epacta del año $(T+1)$ sería $=1$, porque siendo T el último año del ciclo es preciso añadir 12 á E' para tener la epacta siguiente, de que resulta $\left(\frac{19+12}{30}\right)_r=1$; pero en el mes de enero no se halla la epacta 1 hasta el 30 de enero. Luego resultaria en el calendario corregido el defecto de no señalar en este caso luna alguna nueva desde 2 de diciembre del año T hasta 30 de enero del año $(T+1)$.

Para ocurrir á este inconveniente se ha escrito en el calendario una epacta 19 en números comunes y de color negro al lado del 31 de diciembre y de la epacta roja 20. Aquella solo sirve en el caso de que tratamos, y sirve bien; porque en primer lugar el dia 1.° de enero de $(T+1)$, la edad de la luna será $=E'+1=2$, como debe ser por regla general; y la luna que empezó en 2 de diciembre resulta *cava* ó de 29 dias, como debe ser el último mes embolísmico del ciclo (*).

Esplicada ya la estructura del calendario lunar gregoriano, se puede entrar con fruto en el examen de las reglas dadas al publicarlo para la correspondencia de las epactas variables con los áureos números fijos; de que ha resultado la correccion del error que tenia el calendario lunar antiguo, y la adopcion de medios para precaver otro semejante en lo sucesivo.

Y primeramente conviene poner en claro el error del ciclo de 19 años, porque en su cálculo ha habido varias inexactitudes. Como en cada ciclo hay un número diferente de años bisiestos, calcularemos para el intervalo de 4 ciclos $=76$ años, suponiéndolos julianos. Estos tienen $76\times365{,}25$ dias$=27759$ dias.

En este intervalo el calendario antiguo lunar introducia constantemente

(*) No puede ocurrir nunca que se celebren dos novilunios en un mismo ciclo el 31 de diciembre; porque no pueden concurrir en un mismo ciclo las epactas 19 y 20. En efecto, siendo $E'=19$ con $N=79$ segun la hipótesis, sería preciso $N=30$ para tener $E'=20$, y $N'=30$ es un absurdo.

		Dias.
912 = 76×12	lunaciones, mitad plenas y mitad cavas, á 29,5 dias.	26904
24 = 6×4	lunaciones embolísmicas de 30 dias.	720
4 = 1×4	idem de 29 dias.	116
Lunaciones 940	Mas 19 dias correspondientes á otros tantos bisiestos.	19
	Total igual. . . .	27759

Suponiendo, pues, exacto el cómputo juliano en la parte solar, todavía sería preciso que 940 lunaciones medias correspondiesen exactamente á 27759 dias.

El mes sinódico lunar medio es de

$$29.^{d}\ 12.^{h}\ 44'.\ 2'',85.$$

El producto de esta cantidad por 940, es

$$27758^{d}\ 18^{h}\ 4'\ 39''.$$

Luego suponerlo de 27759 dias equivale á retardar los novilunios cada 76 años en $5^{h}\ 55'$; error que asciende á 8^{d} próximamente en 2500 años ó 25 siglos. De modo que el ciclo de 19 años necesita de una correccion de 8 dias en cada 25 siglos con diferencia despreciable, como ya habíamos asegurado.

Esta correccion supone, como se ha dicho, el cómputo juliano en la parte solar; y por consiguiente, despues de calculada y aplicada da las fechas julianas de los novilunios del calendario reformado. Despues se tratará de la otra correccion separadamente, y asi lo hicieron los autores de la reforma.

A mediados del siglo VI de la era cristiana, retardaba los novilunios en un solo dia el cómputo juliano representado por la fórmula

$E=\left(\frac{11\,N-3}{30}\right)_r$. Se dejó subsistir esta diferencia por razones que no son ahora del caso, y se dispuso por tanto que este valor de E fuese correspondiente á $k=5$.

Determinada ya la correccion de 8 dias en 25 siglos, se arregló á 1 dia por cada 3 siglos, ó 7 en 21 siglos, continuando esta sin alteracion hasta el siglo XXIV y omitiéndose la adicion de un dia en el XV. Desde $k=5$ hasta $k=18$ se hicieron correcciones del modo siguiente:

1 dia para $k=8$,
2 . . . . . $k=11$,
3 . . . . . $k=14$,
4 . . . . . $k=18$,

retardando el aumento de un dia cuando $k=17$, y para lo sucesivo cuando $k=17+25\,n$ (siendo n un entero cualquiera positivo) hasta $k=18$, y $k=18+25\,n$.

Estas correcciones, que indicaremos en general por $\mathbb{C}$, se dirijen á destruir el retardo de los novilunios; y como para anticiparlos es preciso aumentar las epactas, segun la disposicion dada á estas en el calendario perpétuo, lo es tambien que $\mathbb{C}$ sea siempre aditiva á E.

La espresion $\left(\frac{k-5}{5}\right)_e$ daria exactamente la correccion $\mathbb{C}$ desde el origen $k=5$ hasta $k=17$ esclusive, en que hay la primera supresion. Es preciso, pues, restar al numerador una cantidad $\left(\frac{k+\mu}{25}\right)_e$, que dé $\left(\frac{k+\mu}{25}\right)=>0$, cuando $k=17$; lo cual equivale á

$$17+\mu>24;\ \mu>7.$$

Hasta $k=42$ no hay supresion. Es necesario, pues, que á $k=41$

corresponda $\left(\frac{h+\mu}{25}\right)_e < 2$; lo cual equivale á

$$41+\mu<50\,;\ \mu<9\,;$$

y de aqui $\mu=8$; por consiguiente

$$\mathbb{C}=\left[\frac{k-5-\left(\frac{k+8}{25}\right)_e}{3}\right]_e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

Esta ecuacion, que es del analista italiano Iznardi, puede trasformarse como sigue:

$$3\,\mathbb{C}=-13+(k+8)-\left(\frac{k+8}{25}\right)_e,$$

que por la (5) se convierte en

$$3\mathbb{C}=-13+\left(\frac{24k+216}{25}\right)_e$$

$$=-6+\left(\frac{24k+41}{25}\right)_e.$$

Partiendo por 3 y tomando el cuociente entero, se halla finalmente la espresion sencilla y elegante:

$$\mathbb{C}=\left(\frac{8k-57}{25}\right)_c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34),$$

que se debe á Ciccolini.

El mismo Iznardi, autor de la espresion (33), halló por una consideracion muy sencilla la siguiente:

$$\mathbb{C}=3+\left(\frac{8(k-14)}{25}\right)_c,$$

que se reduce con mucha facilidad á la (34) de Ciccolini.

En efecto, la espresion

$$z=\left(\frac{8}{25}q\right)_e$$

exije para que sea $z>0$, que no sea $q<4$; mas despues de poner $q=4$, aumenta en una unidad por cada 5 en que aumenta q, esceptuando los casos en que q es un múltiplo de 25, que aumenta z una unidad por las primeras 4 en que aumente q.

Suponiendo, pues, que el periodo de 25 siglos empieza en $k=14$, y siendo cierto que el primer salto de 4 unidades en vez de 5 se halla por las reglas gregorianas desde $k=14$ hasta $k=18$, se ve que

$$z=\left[\frac{8}{25}(k-14)\right]_e;$$

y como anteriormente habia habido ya tres intercalaciones, á saber, con $k=8$, $k=11$, $k=14$, se sigue que

$$\mathfrak{C}=5+z$$

$$=5+\left(\frac{8k-112}{25}\right)_e$$

$$=\left(\frac{8k-37}{25}\right)_e.$$

Otros autores han llegado á otras varias espresiones, mas no parece que hayan advertido que todas las posibles de esta clase se deducen de la (34), porque esta se trasforma por la (2) en

$$1+\left(\frac{8k-62}{25}\right)_e,$$

$$2+\left(\frac{8k-87}{25}\right)_e.$$

$$5+\left(\frac{8k-112}{25}\right)_e,$$

&c.,

sin mas límite que la condicion de que no sea negativa la cantidad comprendida por el signo $(\ )_e$. Tambien se tiene sin limitacion alguna:

$$-2+\left(\frac{8k+15}{25}\right)_e,$$

$$-3+\left(\frac{8k+38}{25}\right)_e,$$

$$-4+\left(\frac{8k+36}{25}\right)_e,$$

&c.,

sobre lo cual es ocioso detenerse por mas tiempo.

La (53) puede trasformarse en

$$\mathbb{C}=\left(\frac{k-6-\left(\frac{k-17}{25}\right)_e}{3}\right)_e$$

$$=-2+\left[\frac{k-\left(\frac{k-17}{25}\right)_e}{3}\right]_e;$$

esta es la forma en que la presenta Delambre; mas para servirse de ella es preciso que sea $k>15$.

La cantidad $(E+\mathbb{C})$, buscada en el calendario perpétuo, daria los dias de novilunio libres del error del ciclo lunar, si el mismo calendario no hubiese de haber sufrido correccion como solar. Hallaríamos, pues, la fecha juliana del novilunio, y sería preciso añadir á esta la cantidad $\odot$ para tener la correspondiente gregoriana. En vez de esta

doble operacion, basta restar la misma ⊙ de $(E + \mathbb{C})$ para obtener con el resíduo buscado en el calendario perpétuo los novilunios en fecha gregoriana y ya corregidos.

Es, pues, la espresion de la epacta gregoriana,

$$E' = \left(\frac{E + \mathbb{C} - \odot}{30}\right)_r \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55);$$

y sustituyendo los valores de E, $\mathbb{C}$ y ⊙, entre los varios resultados que pueden obtenerse prefiero los siguientes:

$$E' = \left[\frac{11\,N + \left(\frac{8k-112}{25}\right)_e - \left(\frac{3k-3}{4}\right)_e}{30}\right]_r \ldots\ldots\ldots \quad (56),$$

$$E' = \left[\frac{11a + \left(\frac{8k-37}{25}\right)_e - \left(\frac{3k-37}{4}\right)_e}{30}\right]_r \ldots\ldots\ldots \quad (57).$$

Estas fórmulas pueden mirarse como generales, porque si bien el mínimo valor de k es $k=5$ para hallar la espresion de $\mathbb{C}$, el mínimo valor de la misma para hallar á E' es $k=15$, valor de esta cantidad en la época de la reforma del calendario; y con $k=15$ ó $k>15$, no resulta negativa ninguna de las cantidades que se hallan dentro del signo $(\,)_e$. Las dos espresiones (56) y (57) son tambien de Ciccolini. Una y otra dan un mismo resultado poniendo $k=17$ ó $k=18$: esto es, que desde 1700 hasta 1899, ambos inclusive,

$$E' = \left(\frac{11.\,N-1}{30}\right)_r = \left(\frac{11\,a}{30}\right)_r \ldots\ldots\ldots \quad (57\,bis).$$

Aunque por medio de N y k es muy sencillo el cálculo de E', lo es mas la formacion de una tabla de correspondencia entre N y E' para cada valor de k. La tabla estensa de las epactas dada en la correccion gregoriana, presenta todas las correspondencias posibles entre estas cantidades; pero si no se tiene á mano, se forma muy facilmente y de una vez para siempre la del siglo en que se vive. Por ejemplo, hemos visto que desde el último año inclusive del siglo XVII hasta el penúltimo inclusive del XIX, esto es, desde 1700 hasta 1899, ambos

inclusive, se tiene una misma correspondencia entre N y E. Luego en todo este intérvalo

Con		*E'*		
$a = 0$,	$N = 1$	» 0		
$= 1$,	$= 2$	» 11		
$= 2$,	$= 3$	» 22		
$= 3$,	$= 4$	» 3		
$= 4$,	$= 5$	» 14		
$= 5$,	$= 6$	» 25	*roja*	
$= 6$,	$= 7$	» 6		(38).
$= 7$,	$= 8$	» 17		
$= 8$,	$= 9$	» 28		
$= 9$,	$= 10$	» 9		
$= 10$,	$= 11$	» 20		
$= 11$,	$= 12$	» 1		
$= 12$,	$= 13$	» 12		
$= 13$,	$= 14$	» 23		
$= 14$,	$= 15$	» 4		
$= 15$,	$= 16$	» 15		
$= 16$,	$= 17$	» 26		
$= 17$,	$= 18$	» 7		
$= 18$,	$= 19$	» 18		

La 25 es roja, porque en este ciclo no entra la 24; y aun sin haber hecho el facil cálculo de todas las epactas del ciclo, basta que $E' = 25$ resulte de $N = 6 < 12$ para deducir la misma consecuencia.

Si ponemos $k = 19$, $k = 20$, $k = 21$, veremos que siempre resulta

$$E' = \left(\frac{11N - 12}{30}\right)_r = \left(\frac{11a - 1}{30}\right)_r :$$

Luego desde 1900 hasta 2199, ambos inclusive,

Con		*E'*		
$a=0$,	$N=1$	» 29		
$=1$,	$=2$	» 10		
$=2$,	$=3$	» 21		
$=3$,	$=4$	» 2		
$=4$,	$=5$	» 13		
$=5$,	$=6$	» 24		
$=6$,	$=7$	» 5	}	(38 *bis*)
$=7$,	$=8$	» 16		
$=8$,	$=9$	» 27		
$=9$,	$=10$	» 8		
$=10$,	$=11$	» 19		
$=11$,	$=12$	» 0		
$=12$,	$=13$	» 11		
$=13$,	$=14$	» 22		
$=14$,	$=15$	» 3		
$=15$,	$=16$	» 14		
$=16$,	$=17$	» 25	*negra*	
$=17$,	$=18$	» 6		
$=18$,	$=19$	» 17		

La 25 es negra, ya se atienda á que concurre en el mismo ciclo con la 24, ó á que corresponde á $N=17>11$.

Aunque lo que vamos ahora á esponer sea del todo inútil cuando se usa de las fórmulas, con todo, para no omitir la representacion analítica de ningun precepto del calendario gregoriano, sustituyamos $(k-1)$ en vez de k en el valor (29) de $\odot$, y restemos de este el resultado, llamando $\triangle\odot$ á la diferencia. Tendremos

$$\triangle\odot=1+\left(\frac{k-1}{4}\right)_e-\left(\frac{k}{4}\right)_e \ldots\ldots\ldots\ldots (39).$$

Cuando k no es divisible por 4, los dos términos en k son iguales, y resulta $\triangle\odot=+1$. Pero si k es un múltiplo de 4, se tiene eviden-

temente $\left(\frac{k}{4}\right)_e = 1 + \left(\frac{k-1}{4}\right)_e$. Luego $\triangle\odot$ no puede tener sino uno de dos valores, á saber

$$\left.\begin{matrix}\triangle\odot = 0\\ \triangle\odot = +1\end{matrix}\right\} \text{ cuando } \left(\frac{k}{4}\right)_r \text{ es } \left\{\begin{matrix}=0\\ >0\end{matrix}\right\}.$$

Haciendo la misma operacion en la fórmula

$$\mathbb{C} = -2 + \left(\frac{8k+15}{25}\right)_e,$$

tendremos por resultado

$$\triangle\mathbb{C} = \left(\frac{8k+15}{25}\right)_e - \left(\frac{8k+5}{25}\right)_e \ldots\ldots\ldots \quad (40).$$

Los dos términos del segundo miembro manifiestan que es preciso y suficiente añadir al dividendo del segundo 8 unidades para obtener el del primero. De que se infiere, que si $\left(\frac{8k+5}{25}\right)_r < 17$, los dos términos serán iguales y $\triangle\mathbb{C} = 0$. Mas si $\left(\frac{8k+5}{25}\right)_r > 16$, el primer término escederá al segundo en la unidad. Luego $\triangle\mathbb{C}$ es susceptible de dos solos valores, á saber,

$$\left.\begin{matrix}\triangle\mathbb{C} = 0\\ \triangle\mathbb{C} = +1\end{matrix}\right\} \text{ cuando } \left(\frac{8k+5}{25}\right)_r \text{ es } \left\{\begin{matrix}<17\\ >16\end{matrix}\right\}.$$

Pues que en la ecuacion (35), E es constante, la correccion $\triangle E'$ que necesita la epacta E' correspondiente á $(k-1)$ para reducirla á la que corresponde en k al mismo valor de N ó de a, será

$$\triangle E' = \triangle\mathbb{C} - \triangle\odot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41).$$

Los autores de la reforma llamaron $\left\{\begin{matrix}\text{proemptosis}\\\text{metemptosis}\end{matrix}\right\}$, ó ecuacion $\left\{\begin{matrix}\text{lunar}\\\text{solar}\end{matrix}\right\}$ á la cantidad $\left\{\begin{matrix}\triangle\mathbb{C}\\\triangle\odot\end{matrix}\right\}$. Como cada una de las dos es susceptible de dos únicos valores, serán cuatro todos los casos posibles; estos son:

1.° Con $\triangle\mathbb{C}=0$, $\triangle\odot=0$ . . . $\triangle E'=0$; *Ejemplo* $k=16$.
2.° Con $\triangle\mathbb{C}=1$, $\triangle\odot=1$ . . . $\triangle E'=0$; —— $k=18$.
3.° Con $\triangle\mathbb{C}=1$, $\triangle\odot=0$ . . . $\triangle E'=+1$; —— $k=24$.
4.° Con $\triangle\mathbb{C}=0$, $\triangle\odot=1$ . . . $\triangle E'=-1$; —— $k=19$.

En los dos primeros casos sirve para el valor de k la misma serie que para $(k-1)$; y así desde $\left\{\begin{matrix}1600\\1800\end{matrix}\right\}$ hasta $\left\{\begin{matrix}1699\\1899\end{matrix}\right\}$ inclusive, corresponden respectivamente á los áureos números las mismas epactas que hasta $\left\{\begin{matrix}1599\\1799\end{matrix}\right\}$ inclusive.

En el $\left\{\begin{matrix}\text{tercer}\\\text{cuarto}\end{matrix}\right\}$ caso, todas las epactas que han de servir para el valor k son una unidad $\left\{\begin{matrix}\text{mayores}\\\text{menores}\end{matrix}\right\}$ que las que corresponden al valor $(k-1)$ con los mismos áureos números; y así desde $\left\{\begin{matrix}2400\\1900\end{matrix}\right\}$ hasta $\left\{\begin{matrix}2499\\1999\end{matrix}\right\}$ inclusive, las epactas son una unidad $\left\{\begin{matrix}\text{mayores}\\\text{menores}\end{matrix}\right\}$ que las que corresponden á iguales áureos números hasta $\left\{\begin{matrix}2399\\1899\end{matrix}\right\}$ inclusive.

Mas á nada de esto hay que atender, segun ya queda indicado, cuando se calculan las epactas por las fórmulas (36) y (37), ó bien por las peculiares á un valor dado de k y deducidas de las generales, como la (37 *bis*); y sí solo á la determinacion del color de la epacta hallada, cuando resultare $=25$. Lo que se ha dicho sobre la proemptosis y metemptosis, no tiene otro objeto que esplicar analíticamente la formacion de una tabla que acompaña al calendario reformado, con el título de "Tabla de ecuaciones de las epactas", á la cual es preciso

acudir en los métodos ordinarios para hallar en la "Tabla estensa de las epactas" las que corresponden á un áureo número dado, segun los diversos siglos.

§. 4. *Pascua y demás fiestas movibles gregorianas.*

Si prescindimos por un momento de las epactas gregorianas 24 y 25 negra, que son imposibles en el calendario juliano, nos hallaremos en el caso de aplicar al gregoriano los mismos raciocinios que se hicieron para deducir la fórmula (22), con la única diferencia de poner respectivamente E' y L' en vez de E y L. De que resulta

$$\Pi' = marzo\ 22 + \left(\frac{55 - E'}{30}\right)_r + \left(\frac{E' + L' \pm 1}{7}\right)_r \ldots\ldots \quad (42);$$

el signo $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{matrix}\right\}$ cuando fuese $E' \left\{\begin{matrix}<24\\ >24\end{matrix}\right\}$. Y el problema está resuelto mientras no fuese $E' = 24$, ó $E' = 25$ negra.

Pero la epacta 24, que puede indicar novilunio pascual, está escrita al lado de la 25 roja, que entra en la regla general, y la 25 negra lo está al lado de la 26, que se halla en el mismo caso. Luego la fórmula (42) se hace general agregándole el precepto siguiente.

Cuando $E' \left\{\begin{matrix}=24\\ =25\ \text{negra}\end{matrix}\right\}$ póngase en la (42) $E' \left\{\begin{matrix}=25\\ =26\end{matrix}\right\}$ y se obtendrá el valor correcto de Π', lo mismo que para otro cualquiera valor de E'.

Haciendo $\left(\frac{55 - E'}{30}\right)_r = d'$,

tenemos dos espresiones de d'. La primera se halla poniendo por E' su valor $= \left(\frac{11a + 8 + (\mathbb{C} - \odot)}{30}\right)_r$, de que resulta

$$d' = \left(\frac{15-(\mathbb{C}-\odot)+19a}{30}\right)_r ;$$

y haciendo $15-(\mathbb{C}-\odot)=M$,

$$d' = \left(\frac{M+19a}{30}\right)_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43).$$

La otra es

$$\left.\begin{array}{l} d' = 23 - E' \\ d = 53 - E' \end{array}\right\} \text{ cuando } E \text{ es } \left\{\begin{array}{l} <24 \\ >24 \end{array}\right\} \ldots \quad (44).$$

Haciendo

$$\left(\frac{E'+L'\pm 1}{7}\right)_r = e',$$

resulta cuando $E'<24$, por deber usarse del signo superior,

$$e' = \left(\frac{23-d'+L'+1}{7}\right)_r$$

$$= \left(\frac{3+6d'+L+(L'-L)}{7}\right)_r$$

$$= \left(\frac{3+6d'+3+2b+4c+(L'-L)}{7}\right)_r ;$$

y haciendo $6+(L'-L)=n$,

$$e' = \left(\frac{2b+4c+6d'+n}{7}\right)_r .$$

Cuando $E'>24$, resulta por deber usarse del signo inferior,

$$e' = \left(\frac{53-d'+L'-1}{7}\right)_r$$

$$= \left(\frac{3+6d'+L+(L'-L)}{7}\right)_r ,$$

es decir, lo mismo en ambos casos.

Luego tambien tiene lugar el método de Gauss en la investigacion de la Pascua gregoriana, y el cálculo es como sigue:

$$\left.\begin{gathered}\left(\frac{T}{19}\right)_r=\left(\frac{5k+h}{19}\right)_r=a;\left(\frac{T}{4}\right)_r=\left(\frac{h}{4}\right)_r=b;\left(\frac{T}{7}\right)_r=\left(\frac{2k+h}{7}\right)=c;\\ \left(\frac{M+19a}{30}\right)_r=d';\left(\frac{2b+4c+6d'+n}{7}\right)_r=e';\\ \Pi'=(marzo\ 22)+(d'+e')\end{gathered}\right\}(45).$$

Antes de proceder á la determinacion de las cantidades auxiliares M y n, que dependen solamente de k, conviene advertir que este valor de Π' no es seguro cuando la epacta del año es 24 ó 25 negra; y como en este método no se calcula la epacta, es preciso indagar: 1.° de qué manera se conocerán las escepciones; 2.° cómo se determinará en tales casos el valor de Π'.

Para el efecto volvamos á considerar la fórmula (42), de la cual se ha deducido la (45), y veamos qué inexactitudes resultarian de hacer $E'=24$ y $E'=25$ en aquella fórmula en vez de $E'=25$ y $E'=26$, que dan respectivamente los verdaderos valores de Π' cuando las epactas son 24 y 25 negras. Para distinguir estos valores dudosos, los indicaremos por (Π).

Esto supuesto, cuando $E'=24$, tendremos

$$(\Pi)=22\ marzo+29+\left(\frac{L'+2}{7}\right)_r,$$

$$\Pi'=22\ marzo+28+\left(\frac{L'+3}{7}\right)_r,$$

$$(\Pi)-\Pi'=1+\left(\frac{L'+2}{7}\right)_r-\left(\frac{L'+3}{7}\right)_r,$$

valor que resulta nulo, siempre que no sea $L'=4=D$, pero que es de 7 dias en este último caso.

Cuando $E'=25$ negra, será

$$(\Pi)=marzo\,22+28+\left(\frac{L'+5}{7}\right)_r,$$

$$\Pi'=marzo\,22+27+\left(\frac{L'+4}{7}\right)_r,$$

$$(\Pi)-\Pi'=1+\left(\frac{L'+5}{7}\right)_r-\left(\frac{L'+4}{7}\right)_r,$$

valor que resulta nulo, siempre que no sea $L'=5=C$, pero que es de 7 dias en este último caso.

La fórmula (45) supone

$$(\Pi)=22\ marzo+d'+\left(\frac{E'+L'\pm 1}{7}\right)_r,$$

el signo $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{matrix}\right\}$ cuando E' $\left\{\begin{matrix}<24\\ >25\end{matrix}\right\}$. Pero segun acabamos de ver, esta tiene dos solos casos de escepcion. Luego los mismos y no mas tiene la (45), deducida de ella.

El primer caso es cuando se tiene á un tiempo $E'=24$, $L'=4$, que equivale á tener á un tiempo $d'=29$, $e'=6$.

El segundo es cuando se tiene á un tiempo $E'=25$ negra, $L'=5$, que equivale á tener á un tiempo $d'=28$, $e'=6$, $a>10$.

De aquí se sigue

Regla para determinar la cantidad que debe añadirse al 22 de marzo para obtener el dia Π' de la Pascua gregoriana.

Suponiendo ya calculadas las cantidades

$$a,\ b,\ c,\ d',\ e',$$

que entran en la fórmula (45),

hágase $$(d'+e'-7)=p'$$

1.° Cuando se tuviese á un tiempo $d'=29$, $e'=6$.

2.° Cuando se tuviese á un tiempo $d'=28$, $e'=6$, $a>10$.

En todos los demás casos, hágase $(d'+e')=p'$; y se tendrá siempre

$$\Pi'=22 \text{ de marzo} + p' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46).$$

Además tendremos con toda generalidad,

$$E'=\left(\frac{55-d'}{30}\right)_r ; \; L'=\left(\frac{p'+4}{7}\right)_r ;$$

y todo cuanto abrazan las fórmulas (24 *bis*) á 28, poniendo en ellas p' en vez de p. Si $E'=25$, bastará para determinar si es $\left\{\begin{matrix}\text{roja}\\\text{negra}\end{matrix}\right\}$ ver si a es $\left\{\begin{matrix}<11\\>10\end{matrix}\right\}$.

Pasemos ahora á determinar las cantidades auxiliares M y n, cuyos valores generales son

$$M=15-(\mathbb{C}-\odot); \text{ ó bien } M=\left(\frac{15-(\mathbb{C}-\odot)}{30}\right)_r$$

$$=15-(E'-E); \quad \text{———} \quad =\left(\frac{15-(E'-E)}{30}\right)_r,$$

$$n=6+(L'-L); \text{ ó bien } n=\left[\frac{6+(L'-L)}{7}\right]_r,$$

La primera es susceptible de una infinidad de espresiones, entre las cuales parecen las mas cómodas,

$$\left.\begin{matrix} M=\left[\frac{15+\left(\frac{3k+3}{4}\right)_e-\left(\frac{8k+13}{25}\right)_e}{30}\right]_r, \\ M=\left[\frac{23+\left(\frac{3k-37}{4}\right)_e-\left(\frac{8k-37}{25}\right)_e}{30}\right]_r \end{matrix}\right\} \ldots\ldots \quad (47),$$

que se hallan sustituyendo los valores de E' y E. La primera de estas dos fué dada la primera vez por Ciccolini.

Para hallar á n, basta sustituir la espresion de L' tomada de la (52), y por L su valor (12). El resultado será

$$n=\left[\frac{4+2\left(\frac{k}{4}\right)_r+6\left(\frac{k}{7}\right)_r}{7}\right]_r \ldots\ldots\ldots \quad (48).$$

Por estas fórmulas se han calculado los valores de M y n desde $k=15$ hasta $k=50$; es decir, desde la época de la correccion hasta el año 5099 de la era Cristiana inclusive.

k	M	n	k	M	n	k	M	n
15	22	2	27	27	4	39	2	6
16	22	2	28	27	4	40	2	6
17	23	3	29	28	5	41	3	0
18	23	4	30	28	6	42	4	1
19	24	5	31	29	0	43	4	2
20	24	5	32	29	0	44	4	2
21	24	6	33	29	1	45	5	3
22	25	0	34	0	2	46	5	4
23	26	1	35	1	3	47	6	5
24	25	1	36	0	3	48	6	5
25	26	2	37	1	4	49	6	6
26	27	3	38	2	5	50	7	0

Apenas hay una de estas tablas sin equivocaciones en las varias obras en que se encuentran. Conviene por tanto no servirse de sus resultados sin haberse asegurado á lo menos de la exactitud de los que van á emplearse.

Gauss, al dar la segunda de las dos escepciones de su método, pone como condiciones, $d'=28$, $e'=6$, y $\left(\frac{11M+11}{30}\right)_r<19$.

Interesa hacer ver que esta última equivale exactamente á la sencillísima $a>10$, que hemos puesto en su lugar.

En efecto, pues que por la hipótesis es $d' = 28$, tendremos

$$\left(\frac{M+19a}{30}\right)_r = 28;$$

por consiguiente

$$\left(\frac{M+1}{30}\right)_r = \left(\frac{29-19a}{30}\right)_r = \left(\frac{11a+29}{30}\right)_r.$$

La igualdad de los resíduos no se altera, multiplicando los dos dividendos por 11, que no es submúltiplo de 30; luego

$$\left(\frac{11M+11}{30}\right)_r = \left(\frac{121a+319}{30}\right)_r;$$

y por último

$$\left(\frac{11M+11}{30}\right)_r = \left(\frac{a+19}{30}\right)_r;$$

resultado en que se ve que siempre que, y solamente cuando $a > 10$, será $\left(\frac{11M+11}{30}\right)_r < 19$ (*)

Conviene aclarar toda la doctrina dada con varios ejemplos, y calcular cada uno de ellos por ambos métodos, para que se perciba mejor la relacion de estos entre sí.

Primero. $T = 1734$; $k = 17$; $h = 34$.

La ecuacion (18) da $N = 1 + \left(\frac{9+15}{19}\right)_r = 6$.

La (37 *bis*) ó la correspondencia (38), da $E' = 25$ roja.

(*) Algunos años despues de escrito esto, ha llegado á mis manos la *Calendarografía* de Littrow, Viena (1828), en la cual se ve (pág. 55) que aquel sábio habia hallado esta misma simplificacion de la regla de Gauss. Mas hay un yerro de imprenta en poner $d = 18$ en vez de $d = 28$.

Se tiene tambien, $a=5$; $b=2$.

La (52 *bis*) da $L'=3=C$.

Luego $$\Pi'=marzo\left(22+\left[\frac{55-25}{30}\right]_r+\left(\frac{3+25-1}{7}\right)_r\right)$$

$$=marzo\,(22+28+6),$$

y por último

$$\Pi'=abril\ 25;$$

resultado verdadero, pues que $E'=25$ roja entra en la fórmula general (42).

El método de Gauss da

$$a=5;\ b=2;\ c=5;\ M=25;\ d'=\left(\frac{25+19\times5}{30}\right)_r=28;$$

$$n=5;\ e'=\left(\frac{2\times2+4\times5+6\times28+3}{7}\right)_r=6.$$

Se verifican dos de las tres condiciones de la segunda escepcion, á saber, $d'=28$, $e'=6$; pero no la tercera, pues que a no es >10. Luego

$$p'=34;$$

$$\Pi'=marzo\,(22+24),$$

$\Pi'=abril\ 25$, como dió la fórmula (42).

Despues se hallará

$$E'=\left(\frac{55-28}{30}\right)_r=25 \text{ roja, porque } a<11,$$

$$L'=\left(\frac{34+4}{7}\right)_r=5=c;\ \&c.$$

Segundo. $T=1943$; $k=19$; $h=43$.

La ecuacion (18) da $N=6$; $a=5$; además $b=3$.

Las (36) y (37) ó la tabla (38 *bis*) dan $E'=24$.

La (32) $L'=5=c$.

Por ser $E'=24$ debe ponerse $E'=25$ en la fórmula (42); de que resulta

$$\pi'=22\ marzo+\left(\frac{55-25}{30}\right)_r+\left(\frac{25+5-1}{7}\right)_r$$

$$=marzo\ (22+28+6);$$

y por último

$$\pi'=abril\ 25.$$

El método de Gauss da

$$a=5;\ b=3;\ c=4;\ M=24;\ d'=29;$$
$$n=5;\ e'=5.$$

No tiene lugar ninguna de las dos escepciones; por tanto

$$p'=34,$$
$$\pi'=marzo\ (22+34)$$
$$=abril\ 25.$$

Despues se hallará

$$E'=\left(\frac{55-29}{30}\right)_r=24;\ L'=\left(\frac{34+4}{7}\right)_r=5=c.$$

Tercero. $T=1954;\ k=19;\ h=54.$

$$N=17;\ a=16;\ b=2;\ E'=25,\text{ negra porque } a>10,$$
$$L'=5=C.$$

Por ser negra la 25 debe ponerse en la espresion (42) $E'=26$. Luego

$$\pi'=marzo\ 22+\left(\frac{55-26}{30}\right)_r+\left(\frac{3+26-1}{7}\right)_r$$

$$= marzo\ (22+27+0)$$
$$= abril\ 18.$$

Para el método de Gauss, tenemos

$$a=16;\ b=2;\ c=1;\ M=24;\ d'=28;$$
$$n=5;\quad e'=6.$$

Concurren las tres circunstancias de la segunda escepcion de la regla de Gauss, á saber,

$$d'=28;\ e'=6;\ a>10;$$

luego

$$p'=d'+e'-7$$
$$=27,$$
$$\Pi'=marzo\ (22+27)$$
$$=abril\ 18.$$

Despues se hallará

$$E'=\left(\frac{55-28}{30}\right)_r=25 \text{ negra por ser } a>10,$$

$$L'=\left(\frac{27+4}{7}\right)_r=3=c.$$

Cuarto. $T=1981;\ k=19;\ h=81.$

$$N=6;\ a=5;\ b=1;\ E'=24;\ L'=4=D.$$

Debe ponerse en la (42) $E'=25$; y resulta

$$\Pi'=22\,marzo+\left(\frac{55-25}{30}\right)_r+\left(\frac{25+4-1}{7}\right)_r$$

$$=marzo\ (22+28+0),$$
$$\Pi'=19\ abril.$$

:

Para el método de Gauss tenemos

$$a=5;\ b=1;\ c=0;\ M=24;\ d'=29.$$
$$n=5;\quad e'=6$$

Es el caso de la primera escepcion; luego

$$p'=29+6-7=28,$$
$$\Pi'=19\ abril.$$

Despues se halla

$$E'=\left(\frac{53-29}{30}\right)_r=24;\ L'=\left(\frac{28+4}{7}\right)_r=4=D.$$

Quinto. 1888. $k=18$; $h=88$.

De este hallaremos la pascua Π en cada uno de los dos calendarios juliano y gregoriano; para poner algun ejemplo del primero:

Juliano.

$$N=8;\ a=7;\ b=0.$$

La ecuacion (12 *ter*) da..... $L=2=B.$
La primera (19) ..... $E=25$

$$\Pi=22\ marzo+\left(\frac{53-25}{30}\right)_r+\left(\frac{25+2-1}{7}\right)_r \ldots \text{ ecuacion (22).}$$

$$=marzo\ (22+28+5)=abril\ 24.$$

Luego,

Pascua juliana en 1888 á $\frac{24\ abril}{6\ mayo}$ (1888).

Por las fórmulas de Gauss, sería (*ecuac.* (25)),

$$a=7;\ b=0;\ c=5;\ d=28;\ e=5;\ p=33;\ \Pi=24\ abril$$

Pascua juliana á $\frac{24\ abril}{6\ mayo}$ (1888).

Gregoriano.

$N=8,\ a=7,\ b=0.$

La correspondencia (58) da. . . . . $E'=17.$
Las fórmulas (52 *bis*). . . . . $L'=0=G.$

$$\pi'=marzo\ 22+\left(\frac{53-17}{30}\right)_r+\left(\frac{18}{7}\right)_r$$

$$=marzo\ (22+6+4).$$

Luego Pascua gregoriana $\frac{20\ marzo}{1.^{\circ}\ abril}$ (1888).

Hay, pues, siete semanas de diferencia en dicho año entre los dos calendarios en la celebracion de la Pascua.

Por las fórmulas de Gauss

$$a=7,\ b=0,\ c=5,\ M=23,\ d'=6;\ n=4;\ e'=4.$$

No pertenece á ninguna de las dos escepciones. Por tanto

$$p'=10.$$

Pascua gregoriana á $\frac{20\ de\ marzo}{1.^{\circ}\ de\ abril}$ (1888).

Para inteligencia de las fechas conviene tener presente:

1.° Que en España, Portugal y casi toda la Italia, empezó la correccion gregoriana en el mismo dia que en Roma; por tanto las fechas de estos paises $\left\{\begin{matrix}\text{anteriores al } 5\\ \text{posteriores al } 14\end{matrix}\right\}$ de octubre de 1582 son $\left\{\begin{matrix}\text{julianas}\\ \text{gregorianas}\end{matrix}\right\}$.

2.° Que en Francia no comenzó el nuevo Calendario hasta diciem-

bre de aquel mismo año; y por consiguiente las fechas francesas {anteriores al 11 / posteriores al 19} de diciembre de 1582 son {julianas / gregorianas}.

3.° Que en Inglaterra no se adoptó la correccion hasta mediados del siglo XVIII. Además, si bien el Calendario era juliano en cuanto á los meses y dias, no lo era totalmente en cuanto á los años, porque en Inglaterra no finalizaba el año T hasta el 24 de marzo de $(T-1)$ fecha juliana. Coincidia, pues, la cuenta de los años desde 25 de marzo de uno cualquiera de ellos hasta 31 de diciembre del mismo, ambos dias inclusive; pero habia un año de menos en el cómputo inglés desde 1.° de enero (fecha juliana) hasta 24 de marzo.

Se empezó, pues, por hacer concordar del todo el cómputo inglés con el juliano desde 1.° de enero de 1752, y con el gregoriano desde 14 inclusive de setiembre del mismo año.

Por tanto

Fechas inglesas.		Idem julianas correspondientes.	Idem gregorianas.
15 julio 1642 (Old Style)	=	15 julio 1642	25 julio 1642
25 enero 1643 (O. S.)			
= 25 enero 1643—1644	=	25 enero 1644...	4 febrero 1644

Tránsito de 1750 *á* 1752.

31 diciembre 1750 (O. S.)	=	31 diciembre 1750.	11 enero 1751
1 enero 1750—1751	=	1 enero 1751. . .	12 enero 1751
1 agosto 1751 (O. S.)	=	1 agosto 1751. .	12 agosto 1751
31 diciembre 1751 (O. S.)	=	31 diciembre 1751.	11 enero 1752
(1) 1.° enero 1752	=	1 enero 1752. . .	12 enero 1752
(1) 2 setiembre 1752	=	2 setiemb. 1752.	13 setiemb. 1752
(2) 14 idem 1752	=	3 idem 1752. . . .	14 idem 1752

El primer cambio (1) fue para reducir el año inglés á juliano, y el (2) para ajustarse al cómputo gregoriano.

Resta que pongamos un ejemplo de todas las fiestas movibles de un año cualquiera, v. g. el de 1888 en uno y otro calendario, segun se prometió al fin del capítulo II.

Los elementos que forman el cómputo eclesiástico, comunes á ambos calendarios, son

$$N = \textit{áureo número} = 8;$$
$$s = \textit{ciclo solar} = 21;$$
$$i = \textit{indiccion} = 1.$$

Acabamos de hallar además para dicho año,

$$p = 55; \qquad p' = 10.$$

Sustituyendo cada uno de estos dos valores en vez de p en las fórmulas desde (25 *bis*) hasta (28), se obtendrán los resultados siguientes en fechas del calendario respectivo.

$T = 1888$. *Bisiesto.*

	Calendario juliano.	*Calendario gregoriano.*
Letras.....	C. B.	A. G.
Septuagésima.....	21 febrero.....	29 enero.
Ceniza.....	9 marzo.....	15 febrero.
Pascua.....	24 abril.....	1 abril.
Ascension.....	2 junio.....	10 mayo.
Pentecostés.....	12.....	20
Corpus.....	23.....	31
Domingo 1.° Adviento.	27 noviembre.....	2 diciembre.
Dominicas entre Pentecostés y Adviento.	25.....	27
Entre Epifanía y Septuagésima.....	6.....	5

Témporas.	*Témporas.*
16, 18, 19 marzo.	22, 24, 25 febrero.
15, 17, 18 junio.	23, 25, 26 mayo.
21, 23, 24 setiembre.	19, 21, 22 setiembre.
14, 16, 17 diciembre.	19, 21, 22 diciembre.

Cuando las dos fechas de una de estas festividades se han reducido á un mismo cómputo, la diferencia debe ser de un número justo de semanas; lo cual puede servir para evitar equivocaciones y para comprobacion de los resultados.

Por ejemplo, el dia de Ascension juliano es $\frac{2}{14}$ *junio*

gregoriano $\frac{28\ abril}{10\ mayo}$.

El intervalo entre 28 de abril y 2 de junio, ó bien entre 10 de mayo y 14 de junio, es de 35 dias ó 5 semanas cabales.

El 21 de setiembre, témpora juliana, es $= \frac{21\ setiembre}{3\ octubre}$;

El 19 gregoriana $= \frac{7}{19}$ *setiembre.*

Del 7 al 21 de setiembre, ó desde 19 de setiembre á 3 de octubre, el intervalo es de 14 dias ó dos semanas justas.

El domingo 1.° de Adviento juliano es $\frac{27\ noviembre}{9\ diciembre}$

gregoriano $\frac{20\ noviembre}{2\ diciembre}$.

Del 2 al 9 de diciembre, ó del 20 al 27 de noviembre, hay 7 dias ó una semana cabal.

Parece innecesario detenerse mas en estas esplicaciones.

Y asi concluiremos este párrafo, adaptando á los siglos XVIII y XIX las fórmulas generales de Gauss, para obtener el cómputo gregoriano, por el mismo motivo que nos indujo á hacerlo respecto del juliano al fin del capítulo 2.°, y que aqui es aplicable con harta mayor razon, pues que el calendario reformado ó gregoriano es el que rije en todas las naciones cristianas, es decir civilizadas, sean católicas ó no católicas, con la sola escepcion de la Rusia, y de algunos pocos paises en que se hallan establecidas las diversas ramificaciones del cisma griego.

Desde 1700 hasta 1799, ambos inclusive, esto es, cuando $k=17$,

$$\left(\frac{9+h}{19}\right)_r = a\,;\left(\frac{h}{4}\right)_r = b\,;\left(\frac{6+h}{7}\right) = c\,;$$

$$\left(\frac{23+19a}{30}\right)_r = d'\,;\left(\frac{3+2b+4c+6d'}{7}\right)_r = e.$$

$p' = d' + e'$, sin escepcion alguna.

Dia de la Pascua gregoriana $=$ *marzo* $(22+p')$, fecha gregoriana.

$$E' = \left(\frac{55-d'}{30}\right)_r\,;\; L' = \left(\frac{4+p'}{7}\right)_r\,;\text{ gregorianas.}$$

En años bisiestos las dos letras son $(L'+1)$ y L'.

Desde 1800 hasta 1899, ambos inclusive, esto es, cuando $k=18$,

$$\left(\frac{14+h}{19}\right)_r = a\,;\left(\frac{h}{4}\right)_r = b\,;\left(\frac{1+h}{7}\right)_r = c\,;$$

$$\left(\frac{23+19a}{30}\right)_r = d'\,;\left(\frac{4+2b+4c+6d'}{7}\right)_r = e',$$

$p' = d' + e'$, sin escepcion alguna.

Dia de la Pascua gregoriana $=$ *marzo* $(22+p')$, fecha gregoriana.

$$E'=\left(\frac{55-d'}{30}\right)_r;\ L'=\left(\frac{4+p'}{7}\right)_r;\ \text{gregorianas.}$$

La misma advertencia para los años bisiestos.

Estas últimas fórmulas, y su traduccion en lenguaje comun, se han publicado, aunque sin demostracion, en varios volúmenes del Almanaque náutico español, al tratar de la formacion y uso de los artículos contenidos en aquellas efemérides.

CAPITULO IV.

Periodo juliano y lema general que ha de servir en los capítulos siguientes.

Se llama así á un periodo igual al producto de los tres ciclos, solar, lunar, é indiccion; esto es, un periodo de $18\times19\times15=7980$ años. En casi todos los tratados de álgebra se halla demostrado que

$$I=\left(\frac{4845\,s-3780\,N-1064\,i}{7980}\right)_r,$$

espresion en la cual s, N, i, son las mismas cantidades que hemos indicado hasta aqui por estas letras, é I el año del periodo juliano á que corresponden.

Puede libertarse dicha espresion de cantidades negativas, añadiendo al dividendo $(7980\,N+7980\,i)$, lo cual la convertirá en

$$I=\left(\frac{4845\,s+4200\,N+6916\,i}{7980}\right)_r.$$

De esta fórmula basta hacer uso una sola vez para hallar la correspondencia entre T é I; esto es, para determinar el lugar que ocupa en el periodo juliano un año cualquiera T de la era cristiana.

En efecto, sabemos que á $T=0$ correspondieron

$$s=9;\ N=1;\ i=3;$$

luego para este año, el valor de I sería 4713. Luego $I=T+4713$; esto es, que el año T de la era cristiana es el $(4713+T)$ del periodo juliano; de que resulta tambien

$$T=I-4713.$$

T es negativa cuando $I<4713$, y es $=0$ cuando $I=4713$. Sin embargo, los cronologistas llaman al año 4713 del periodo juliano, primero antes de J. C. Los astrónomos llaman á este mismo año *cero de J. C.* ó cero de la era cristiana, como es preciso para conservar la regularidad en los cálculos, y principalmente en la formacion y uso de las tablas astronómicas; de que resulta entre estos dos modos de contar la diferencia de un año en todos los anteriores al primero de la era cristiana. En favor del de los astrónomos está la razon; mas el uso constante y general está en favor del de los cronologistas, lo cual hace indispensable tener presente los dos.

Para indicar, pues, en un año dado T anterior á $(T=1)$, segun ambos cómputos, puede escribirse tal cual resultare de la última ecuacion, que dará la cuenta de los astrónomos; y á continuacion del mismo año T aumentado su valor absoluto en una unidad, omitiendo el signo negativo, y añadiendo las espresiones antes de J. C. ó bien las iniciales A. C. *(Ante Christum)*, con lo cual resultará segun la cuenta de los cronologistas.

Ejemplo 1.° El año 3993 del periodo juliano, da

$$\begin{array}{l} I=3993 \\ -\ 4713 \\ \hline \end{array}$$

$T=-720$ segun los astrónomos,
$T=\ 721$ segun los cronologistas A. C. (antes de J. C.).

Ejemplo 2.° El año 3330 del periodo juliano es el -1383, segun los astrónomos, y el 1384 A. C., segun los cronologistas.

Aunque el calendario juliano tuvo principio en tiempo de Julio Cesar, como sus intercalaciones son tan regulares y sencillas, reducidas todas á la de un bisiesto cada cuatro años, se usa y con razon por los astrónomos y cronologistas para espresar las fechas antiguas, aun cuando sean muy anteriores á Julio Cesar; y el periodo juliano que las abraza todas, se supone compuesto de años todos julianos, á pesar de la discordancia entre sus intercalaciones y las que debieran hacerse para que coincidiesen en el movimiento trópico del sol.

El primer año del periodo juliano fue bisiesto. Por tanto I lo será siempre que $\left(\frac{I+3}{4}\right)_r = 0$, y en los demás casos comun. La cantidad $\left(\frac{I+3}{4}\right)_e$ será igual al número de intercalaciones hechas, ó lo que es lo mismo, el número de bisiestos trascurridos desde el principio del periodo juliano hasta el año I inclusive.

Para la correspondencia entre las fechas no cristianas y las nuestras, supondremos que estas son siempre *julianas*, por la mayor sencillez que proporcionan para las fórmulas; siendo facilísimo por lo que queda dicho en los párrafos anteriores la reduccion mútua entre julianas y gregorianas, cuando fuese necesaria.

Para varias aplicaciones que se presentarán en lo sucesivo, conviene tener demostrado lo siguiente.

Lema.

—

Sea t un número cualquiera de dias que principia en 1.° de enero de un año cualquiera juliano y bisiesto; $\left(\frac{t}{365{,}25}\right)_e$ será el número de años completos contenidos en t, segun la intercalacion juliana;

y $\left(\frac{t}{365,25}\right)_r$ será el número de dias contados desde 1.° de enero del año que sigue al último completo, hasta el último dia de t inclusive.

Demostracion.

El número t puede designarse por la suma de un cierto número de dias que formen uno cabal de cuatrienios julianos, y del sobrante que no llegue á cuatrienio. Este consta de $(366+3\times365)$ dias $=1461$ dias $=4\times365,25$ dias. Partiendo, pues, á t por 1461, el resíduo que indicaremos por r dará el número de dias contados desde 1.° de enero del año bisiesto con que principia el cuatrienio no completo.

Si se hace $r'=\frac{r}{365,25}$, y se comparan los valores de esta cantidad con los que debe tener segun la intercalacion juliana, espresándolos todos en años y dias, resulta

	DIAS.	Valor que debe tener el resíduo.			Valor de r'.	
		Años.		*Dias.*	*Años.*	*Dias.*
Cuando	$r=\quad 0+n$	0	+	n	$0+(n+0,0\ )$	
———	$r=366+n$	1	+	n	$1+(n+0,75)$	
———	$r=731+n$	2	+	n	$2+(n+0,50)$	
———	$r=1096+n$	3	+	n	$3+(n+0,25)$	

Se ve que omitiendo los decimales de r' resultan los valores verdaderos. Y como el resíduo r' no se altera aunque se agreguen al dividendo r todos los dias á que ascienden los cuatrienios contenidos en t, porque estos forman como se ha dicho y demostrado un múltiplo del divisor 365,25, se sigue que la cantidad t de dias equivale á $\left(\frac{t}{365,25}\right)_e$ años julianos

$+\left(\frac{t}{365,25}\right)_r$ dias; con tal de que se omitan los decimales de este último resíduo. Que es lo que se habia de demostrar.

Lo mismo podria decirse de t si contuviese un decimal$=\left\{\begin{matrix}0,75\\0,50\\0,25\end{matrix}\right\}$ y que estuviese contado desde 1.° de enero de un año juliano que fue-se $\left\{\begin{matrix}\text{primero}\\\text{segundo}\\\text{tercero}\end{matrix}\right\}$ despues de bisiesto.

Además de este lema, nos serán muy útiles en adelante las tablas siguientes.

TABLA (1).

Hasta fin de	Dias que se cuentan del año	
	Comun.	*Bisiesto.*
Enero	31	31
Febrero	59	60
Marzo	90	91
Abril	120	121
Mayo	151	152
Junio	181	182
Julio	212	213
Agosto	243	244
Setiembre	273	274
Octubre	304	305
Noviembre	334	335
Diciembre	365	366

TABLA (2).

Múltiplos de 365.	
1.....	365
2.....	730
3.....	1095
4.....	1460
5.....	1825
6.....	2190
7.....	2555
8.....	2920
9.....	3285
10.....	3650

TABLA (3).

Múltiplos de 365,25.	
1....	365,25
2....	730,50
3....	1095,75
4....	1461,00
5....	1826,25
6....	2191,50
7....	2556,75
8....	2922,00
9....	3287,25
10....	3652,50

CAPITULO V.

De la era de Nabonasár.

El principio del reinado de Nabonasár en Babilonia es una época interesante en la astronomía, porque á ella se refieren todas las observaciones de los caldeos insertas en el Almagesto de Ptoleméo (*).

No queda la menor duda en que el dia primero de esta época fué, el 26 de febrero del año 3967 del periodo juliano,

ó —746 de la era vulgar,

ó —747 antes de J. C.

Además, los años de los caldeos eran todos, sin escepcion alguna, de 365 dias, á lo menos desde aquella época.

Estos se dividian en 12 meses de á 30 dias, y 5 mas despues del mes duodécimo, llamados *epagómenas* ó dias intercalares. Los nombres de los meses eran como sigue segun Petan (*de doctrina temporum*).

TABLA (4).

Hasta fin de	Dias que se cuentan del año.
Thoth.	30
Paophi.	60
Athyr.	90
Choiac.	120
Tybi.	150
Mechir.	180
Phamenoth.	210
Pharmuthi.	240
Pachon.	270
Payni.	300
Epiphi.	330
Mesori.	360
Epagómenas.	365

(*) Tal es el nombre de este célebre astrónomo, y no Ptolomeo, como erradamente dicen y escriben muchos.

Dias.

Sentado lo dicho, la tabla I da:

Dias pasados desde 1.° de enero del año 3967 del periodo juliano hasta fin del mismo mes.....	31
Id. hasta 26 de febrero esclusive.....	25
Los 3966 años pasados del periodo juliano serian, si se ponen á 365 dias cada uno.....	1.447.590
Pero en ellos hay bisiestos un número $=\left(\frac{3966+3}{4}\right)_e=$	992
Suma.... $=b=$	1.448.638

Esta cantidad b es evidentemente el número de dias que habian pasado desde el principio del periodo juliano, cuando empezó la era de Nabonasár en 26 de febrero de 3967.

El número de dias pasados desde esta época hasta el dia m inclusive de un año cualquiera N' de la misma era, es visiblemente

$$a'=365\ (N'-1)+m.$$

Habiendo sido bisiesto como queda dicho el primer año del periodo juliano, se sigue de lo demostrado en el lema del último capítulo, que el número de años trascurridos del mismo periodo hasta el dia m del año N de Nabonasár, es

$$\left(\frac{a'+b}{365,25}\right)_e;$$

y que el dia correspondiente al m será en fecha juliana el $\left(\frac{a'+b'}{365,25}\right)_r$ del

año del periodo juliano $=1+\left(\frac{a'+b'}{365,25}\right)_e$.

Para no tener necesidad de añadir la unidad, bastaria considerar que si se añadiese al numerador $(a'+b')$ la cantidad 365,25, el cuociente aumentaria en una unidad, y el resíduo no sufriria alteracion. Mas es preferible para no operar con números tan crecidos, restar dentro del signo ( ), el producto $5959\times365,25$, compensando esta sustraccion con añadir fuera del mismo signo 5959 unidades mas; con lo cual se formará una constante, de 5960 años. Y el nuevo numerador ó dividendo, al cual llamaremos k', será

$$k'=365N'-365+m+1.448.638-5959\times365,25$$
$$=2248,25+365\ N'+m.$$

De que resulta finalmente la siguiente regla para reducir una fecha cualquiera de la era de Nabonasár á fecha del periodo juliano.

Regla.

—

1.° Llámese $\left\{\begin{matrix} m \text{ al dia} \\ N' \text{ al año} \end{matrix}\right\}$ dado de la era de Nabonasár.

Sean $\left\{\begin{matrix} d \text{ el dia} \\ I \text{ el año} \end{matrix}\right\}$ correspondiente del periodo juliano.

2.° Hágase

$$k'=2248,25+365\ N'+m.$$

3.° Se tendrá

$I=5960+\left(\frac{k'}{365,25}\right)_e$; $d=\left(\frac{k'}{365,25}\right)_r$, desechando el decimal que pudiere contener d.

4.° Se tendrá presente que I es bisiesto si $\left(\frac{I+3}{4}\right)_r=0$, y comun en los demás casos. Este conocimiento es preciso para hallar el dia del mes á que corresponde el valor de d por medio de la tabla (1) que se dió al fin del capítulo anterior.

5.° Si resultare $d<1$, la fecha que se busca será el 31 de diciembre del año $(I—1)$.

Parece supérfluo advertir que d da siempre fecha juliana y no gregoriana.

Ejemplo 1.°

El 9 de Athyr del año 887 de Nabonasár, dará

TABLA (2).		TABLA (3).	
365		Hasta fin de Paophi.	60
887		9 Athyr.	9
2555		$m=$	69
2920			
2920		Constante. . . 2248,25	
325755	=	m. 69	
		365 N'. . . . 325755	
		k'. . . . 326072,25	

Partiendo á k' por 365,25, lo cual se hace con grandísima facilidad por medio de la tabla (3), resulta

Cuociente = 892 *años*. . . . Resíduo = d = 269,25

Constante = 3960 —

$I=$ 4852 — Omitiendo el decimal, d=269 *dias*.

Constante = —4713 — La tabla (1) da hasta fin de agosto

$T=+$ 139 — (año comun). 243

Luego d corresponde á 26 *set.re*

Luego la fecha dada de Nabonasár corresponde al 26 de setiembre del año 4852 del periodo juliano, ó 139 de la era cristiana.

Ejemplo 2.°

El 1.° de Thoth del año 2000 de Nabonasár, dará el 15 de octubre del año { 5964 del periodo juliano / 1251 de la era cristiana }.

Ejemplo 3.°

El 29 de Thoth del año 27 de Nabonasár, dará el 19 de marzo del año bisiesto { 5993 del periodo juliano / — 720 de la era cristiana, segun los astrónomos / 721 antes de J. C. segun los cronologistas }.

Es muy facil de conocer la ventaja de este metodo en punto á brevedad sobre cuanto trae Delambre en su astronomía, y sobre el método del aleman Ideler, inserto en la correspondencia de Zach.

CAPITULO VI.

Del calendario Mahometano.

§. 1.— *Estructura de este calendario.*

Es puramente lunar, y no lunisolar como el calendario cristiano. Consta de 12 meses, que son alternativamente de 30 y 29 dias, á escepcion del último mes que tiene { 30 dias / 29 dias } en los años { embolísmicos / comunes }. Por tanto los años { embolísmicos / comunes } constan de { 355 / 354 } dias. Cada 30 años componen un *ciclo*, y de los 30 hay { 19 / 11 } que son { comunes / embolísmicos }.

Los años *comunes* de cada *ciclo* son los
1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 27, 28 y 30;
y los embolísmicos son los restantes, á saber, los
2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26 y 29.

De lo dicho se sigue que cada ciclo mahometano consta de un número de dias $= 11\times355+19\times354 = 10631$ *dias;* y que este calendario supone que á dicho intérvalo corresponden exactamente $360 = 12\times30$ revoluciones sinódicas medias de la luna. Como estas duran $10631^{d}.0^{h}17',1$, resulta adelantado el cómputo mahometano en $(3^{h},7)$ cada 20 ciclos ó cada 600 años lunares.

El primer año mahometano empezó el 16 de julio del año 622 de la era cristiana. A esta época llaman *Hegira.*

Los meses van dados en la tabla siguiente, y los nombres de cada uno se han tomado de Petan *(de doctrina temporum).*

TABLA (5).

Hasta fin de	*Dias que se cuentan del año.*
Muharran.	30
Saphar.	59
Rabie I.	89
Rabie II.	118
Giumadi I.	148
Giumadi II.	177
Regiab.	207
Sahaven.	236
Ramadán.	266
Schewal.	295
Dulkaidath.	325
Dulkagiath, ó Dilhaga ó Dilithshe	354 ó 355

TABLA (6).

Múltiplos de 354.	*Múltiplos de* 355.	*Múltiplos de* 10.631.
1. 354	1. 355	1. . . . . 10.631
2. 708	2. 710	2. . . . . 21.262
3. 1062	3. 1065	3. . . . . 31.893
4. 1416	4. 1420	4. . . . . 42.524
5. 1770	5. 1775	5. . . . . 53.155
6. 2124	6. 2130	6. . . . . 63.786
7. 2478	7. 2485	7. . . . . 74.417
8. 2832	8. 2840	8. . . . . 85.048
9. 3186	9. 3195	9. . . . . 95.679
10. 3540	10. 3550	10. . . . . 106.310

§. 2.— *Reduccion á espresiones analíticas.*

Empecemos por esplicar la formacion de la tabla siguiente.

TABLA (7).

	n,	y,	z,	$\left(\frac{11n}{30}\right)_e$,	$\left(\frac{11n}{30}\right)_r$,	$\left(\frac{19n}{30}\right)_e$,	$\left(\frac{19n}{30}\right)_r$,	$\left(\frac{11n+5}{30}\right)_e$,	$\left(\frac{11n+5}{30}\right)_r$,	$\left(\frac{19n-4}{30}\right)_e$,	$\left(\frac{19n-4}{30}\right)_r$.
	1	0	0	0	11	0	19	0	14	0	15
(*e*)	2	0	1	0	22	1	8	0	25	1	4
	3	1	1	1	3	1	27	1	6	1	25
	4	1	2	1	14	2	16	1	17	2	12
(*e*)	5	1	3	1	25	3	5	1	28	3	1
	6	2	3	2	6	3	24	2	9	3	20
(*e*)	7	2	4	2	17	4	13	2	20	4	9
	8	3	4	2	28	5	2	3	1	4	28
	9	3	5	3	9	5	21	3	12	5	17
(*e*)	10	3	6	3	20	6	10	3	25	6	6
	11	4	6	4	1	6	29	4	4	6	25
	12	4	7	4	12	7	18	4	15	7	14
(*e*)	13	4	8	4	23	8	7	4	26	8	3
	14	5	8	5	4	8	26	5	7	8	22
	15	5	9	5	15	9	15	5	18	9	11

(*e*)16	5	10	5	26	10	4	5	29	10	0
17	6	10	6	7	10	23	6	10	10	19
(*e*)18	6	11	6	18	11	12	6	21	11	8
19	7	11	6	29	12	1	7	2	11	27
20	7	12	7	10	12	20	7	13	12	16
(*e*)21	7	13	7	21	13	9	7	24	13	5
22	8	13	8	2	13	28	8	5	13	24
23	8	14	8	13	14	17	8	16	14	13
(*e*)24	8	15	8	24	15	6	8	27	15	2
25	9	15	9	5	15	25	9	8	15	21
(*e*)26	9	16	9	16	16	14	9	19	16	10
27	10	16	9	27	17	3	10	0	16	29
28	10	17	10	8	17	22	10	11	17	18
(*e*)29	10	18	10	19	18	11	10	22	18	7
30	11	18	11	00	19	0	11	3	18	26

Sea M un año cualquiera de la era ó calendario mahometano, n el lugar que ocupa en el ciclo de 30 años; será $n=\left(\frac{M}{30}\right)_r$. La primera columna da todos los valores posibles de n, y los que dan años embolísmicos llevan la señal (*e*). Los demás son correspondientes á años comunes.

La $\left\{\begin{matrix}\text{segunda}\\\text{tercera}\end{matrix}\right\}$ columna contiene los valores de $\left\{\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\right\}$, cantidad que representa el número de años $\left\{\begin{matrix}\text{embolísmicos}\\\text{comunes}\end{matrix}\right\}$ que van pasados del ciclo á principios del año n del mismo, ó hasta finalizar el año $(n-1)$. Resulta de la ley de intercalacion del cómputo mahometano, espuesta en el párrafo anterior. Sirve de comprobacion $y+z=n-1$.

Para obtener, si es posible, una funcion de n que dé el valor de y en todos casos, empezaremos por considerar que siendo 11 el número de embolísmicos que debe haber en 30 años, la espresion $\left(\frac{11n}{30}\right)_e$ deberá dar, por lo menos con cierta aproximacion, el valor de y. Los resultados de esta y de la $\left(\frac{11n}{30}\right)_r$, forman las columnas cuarta y quinta.

Si fuese exacta la espresion $\left(\frac{11n}{30}\right)_e$, deberian ser iguales todos los valores de la columna cuarta á sus correspondientes de y. Se ve que esta igualdad no es constante, pero que falta solamente cuando $n=8$, $n=19$, $n=27$; y que si se añaden 3 unidades á cada uno de los resíduos correspondientes de la columna quinta, se destruirá la desigualdad, sin que la misma adicion á los demás resíduos altere la que antes existia entre los cuocientes y los valores de y. Luego la funcion ó espresion general que buscábamos es

$$y=\left(\frac{11n+3}{30}\right)_e,$$

como se ve cotejando la columna octava con la segunda.

La columna novena da los valores de $\left(\frac{11n+3}{30}\right)_r$. Es notable en ella que da un resultado $\left\{\begin{matrix}>18\\<19\end{matrix}\right\}$ cuando n es $\left\{\begin{matrix}\text{embolísmico}\\\text{comun}\end{matrix}\right\}$.

Del mismo modo, para obtener un valor general de z en funcion de n, probaremos con $\left(\frac{19n}{30}\right)_e$; obtenida por su medio la columna sesta,

y con $\left(\frac{19n}{30}\right)_r$ la séptima, veremos que los resultados de la tercera y sesta son iguales, menos en los cuatro casos $n=8$, $n=19$, $n=27$, $n=30$; y que restando 4 unidades á cada resíduo $\left(\frac{19n}{30}\right)_r$, se destruye la desigualdad, sin que la misma sustraccion en los resíduos restantes produzca alteracion en la igualdad anterior.

Luego

$$z=\left(\frac{19n-4}{30}\right)_e,$$

como se comprueba cotejando la columna décima con la tercera.

La columna undécima y última da los valores de $\left(\frac{19n-4}{30}\right)_r$. Se advierte en ella que da un resultado $\left\{\begin{matrix}>10\\<11\end{matrix}\right\}$ cuando n es $\left\{\begin{matrix}\text{comun}\\\text{embolísmico}\end{matrix}\right\}$.

Sentado lo dicho, procedamos á considerar que

$$M=30\lambda+n,$$

representando λ el número de ciclos completos contenidos en M. Tendremos, en consecuencia, llamando Y al número de años embolísmicos que han pasado hasta $(M-1)$ inclusive,

$$Y=11\lambda+\left(\frac{11n+5}{30}\right)_e$$

$$=\left[\frac{11(30\lambda+n)+5}{30}\right]_e,$$

y por último

$$Y=\left(\frac{11M+5}{30}\right)_e.$$

Ademas, como $\left(\frac{11n+5}{30}\right)_r$ no sufre alteracion por la adicion de $30\times 11\lambda$ en su numerador, tendremos que

$$M \text{ será } \left\{\begin{matrix}\text{embolísmico}\\ \text{comun}\end{matrix}\right\} \text{ si } \left(\frac{11M+5}{30}\right)_r \text{ es } \left\{\begin{matrix}>18\\ <19\end{matrix}\right\}.$$

Por las mismas consideraciones resultará, si indicamos por z el número de años comunes que han pasado hasta $(M-1)$ inclusive,

$$z=19\lambda+\left(\frac{19n-4}{30}\right)_e$$

$$=\left[\frac{19(30\lambda+n)-4}{30}\right]_e;$$

y por último

$$z=\left(\frac{19M-4}{30}\right)_e.$$

$$M \text{ será } \left\{\begin{matrix}\text{comun}\\ \text{embolísmico}\end{matrix}\right\} \text{ si } \left(\frac{19M-4}{30}\right)_r \text{ es } \left\{\begin{matrix}>10\\ <11\end{matrix}\right\}.$$

De todo lo espuesto se sigue, que el número de dias que median entre el primero de Muharram del año primero de la Hegira, y el dia primero del mismo mes del año M, estará representado por una de las dos espresiones siguientes, que deben dar un mismo resultado numérico:

$$\left.\begin{array}{l} 354\,(M-1)+\left(\dfrac{11M+3}{30}\right)_e; \\ 355\,(M-1)-\left(\dfrac{19M-4}{30}\right)_e \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49).$$

Y como el primer dia de la Hegira corresponde al 16 de julio del año 622 de la era cristiana, fecha que corresponde á 620 años $+(366+365+197)$ dias de esta última era, es claro que en el dia primero de Muharram del año mahometano M, se contará un número cabal de dias, á partir del 1.° de enero de 620, que tendrá por espresiones

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Primera.}\ldots\ldots\ldots & g=928+354\,(M-1)+\left(\dfrac{11M+3}{30}\right)_e \\ & =574+354\,M+\left(\dfrac{11M+3}{30}\right)_e. \\ \text{Segunda.}\ldots\ldots\ldots & g=928+355\,(M-1)-\left(\dfrac{19M-4}{30}\right)_e \\ & =573+355\,M-\left(\dfrac{19M-4}{30}\right)_e \end{array}\right\} \quad (50).$$

Los mahometanos llaman *ferias* á los dias de la semana; nuestro domingo corresponde á la primera feria, y por consiguiente el sábado á la séptima ó cero. Además llaman *caracter* del año á la feria por la cual da principio ó que corresponde al dia 1.° de Muharram del mismo año.

Como el dia 16 de julio de 622 de *J. C.* era viernes ó feria 6, y desde dicho dia hasta el 1.° del año M media un número de dias

$$=354M-354+\left(\frac{11M+3}{30}\right)_e$$

$$=355M-355-\left(\frac{19M-4}{30}\right)_e;$$

si agregamos 6 unidades y partimos el resultado por 7, se hallará un resíduo que será el valor de la feria f, caracter del año M, y que podrá tener una cualquiera de las dos formas:

$$\left.\begin{aligned} f&=\left[\frac{2+354M+\left(\frac{11M+3}{30}\right)_e}{7}\right]_r;\\ f&=\left[\frac{1+355M-\left(\frac{19M-4}{30}\right)_e}{7}\right]_r.\end{aligned}\right\}\quad(51).$$

§. 5. *Reduccion de fechas mahometanas á fechas cristiano-julianas.*

Como el año 620 de la era cristiana fue bisiesto, se sigue del lema demostrado en el capítulo anterior, que partiendo la cantidad g por 365,25, el cuociente dará el número de años trascurridos desde 1.° de enero de 620 hasta el 1.° de Muharram del año M, que serán años julianos; y bastará sumar á dicho cuociente la cantidad constante 620 para obtener el año juliano T de la era cristiana á que corresponde el dia 1.° del año M. Tambien se sigue del lema, que el resíduo de la division dará los dias que se cuentan del año T en el 1.° del año M.

Si del valor de g se restan 365,25 dias antes de verificar la particion, el cuociente resultará menor en una unidad justa, y el resíduo no sufrirá alteracion. Por consiguiente estará compensado el efecto de la sustraccion con añadir una unidad á la constante 621.

Luego haciendo

$$h=g-365,25=354M+\left(\frac{11M+3}{30}\right)_e+208,75,$$

ó bien $h = g - 565{,}25 = 355M - \left(\frac{19M-4}{30}\right)_e + 207{,}75$,

tendremos por espresion de la fecha cristiana (juliana) que corresponde al 1.° de Muharram del año mahometano M.

Año $T = \left(\frac{h}{365{,}25}\right)_e$; dia $= \left(\frac{h}{365{,}25}\right)_r$, desechando el decimal que contuviere este último.

De estas consideraciones resulta la siguiente regla para operar en la práctica.

Regla *para reducir á fecha cristiana (juliana) el dia en que principia un año cualquiera de la Hegira.*

Precepto 1.° Llámese $\left\{\begin{matrix} d \\ T \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} \text{el dia} \\ \text{el año} \end{matrix}\right\}$ de la era cristiana (fecha juliana) correspondiente al dia 1.° del año M de la Hegira.

2.° *Hágase*:

$(a) = 354M$,

$(b) = \left(\frac{11M+3}{30}\right)_e$,

$(c) = 208{,}75$,

$h = (a) + (b) + (c)$,

El año M será $\left\{\begin{matrix} \text{comun} \\ \text{embolísmico} \end{matrix}\right\}$ si $\left(\frac{11M+3}{30}\right)_r \left\{\begin{matrix} <19 \\ >18 \end{matrix}\right\}$

ó bien:

$(a') = 355M$,

$(b') = \left(\frac{19M-4}{30}\right)_e$,

$(c') = 207{,}75$,

$h = (a') - (b') + (c')$.

El año M será $\left\{\begin{matrix} \text{comun} \\ \text{embolísmico} \end{matrix}\right\}$ si $\left(\frac{19M-4}{30}\right)_r \left\{\begin{matrix} >10 \\ <11 \end{matrix}\right\}$

3.° De uno ú otro modo se tendrá á h, y despues

$$T=621+\left(\frac{h}{365{,}25}\right)_e,$$

$$d=\left(\frac{h}{365{,}25}\right)_r, \text{ omitiendo el decimal.}$$

4.° Para hallar el dia y mes juliano á que corresponde d, es preciso saber si el año T es comun ó bisiesto. Mas en el calendario juliano T es bisiesto siempre que y solamente cuando $\left(\frac{T}{4}\right)_r=0$. Nada mas facil de averiguar.

5.° Si resultase $d<1$, la fecha que se busca será el 31 de diciembre del año $(T-1)$.

6.° Para hallar el dia de la semana ó feria, caracter del año M, se tiene

$$f=\left(\frac{(a)+(b)+2}{7}\right)_r \text{ ; ó bien } f=\left(\frac{(a')-(b')+1}{7}\right)_r,$$

domingo si $f=2$. . . . . sábado si $f=0$.

Ejemplo.

Se pide el principio del año 1216 de la Hegira en fecha cristiana.

$(a)=450464$. . . Tabla (6). . . . . $(a')=431680$. . . Tabla (6).

$(b)=$ 445 Resíduo 29718 Luego 1216 embol. $\Big\}$ $-(b')=-770$ Resíduo $=0<11$ Luego 1216 embol.

$(c)=$. 208,75	$(c')=$ 207,75
$h=431.117,75$	$h=431.117,75$

Partiendo á h por 365,25, lo cual se hace con mucha espedicion por medio de la tabla (5), resulta

Cuociente = 1180. . . . . Resíduo = 122,75
Constante = 621 d = 122

T = 1801 Hasta fin de abril, tabla I. . . 120

Luego d corresponde á 2 de mayo.

Cálculo de la feria.

(a) = 430464	(a') = 431680
(b) = 445	$-(b')$ = — 770
Constante 2	Constante = 1
Suma. . . = 430.911	*Suma*. 430.911

Que partida por 7 da f = 5 = jueves.

Luego el año 1216 de la Hegira principió el $\frac{2}{14}$ de mayo de 1801 (jueves); y dicho año fue embolísmico, ó de 355 dias.

Si en vez de la fecha juliana correspondiente al dia 1.° del año M de la Hegira, se quisiese hallar la que corresponde á cualquiera otro dia m' del mismo año, se hallará el valor de m' por la tabla V, se añadirán al de h, $(m'-1)$ dias, y despues se operará con $(h+m'-1)$ como con h en el caso anterior.

Ejemplo 1.°

El dia 15 del mes de Rabié I del año 1155 de la Hegira, se ratificó un tratado de paz entre el Emperador de Alemania y la Puerta Otomana. Se pide la fecha cristiana correspondiente.

Hallaremos en primer lugar

$$h = 408792{,}75$$
$$(m'-1) = \quad 73{,}00 \qquad \text{Tabla (5)}$$
$$h' = 408.865{,}75$$

Partiendo á h' por 365,25, tabla (3), resulta

Cuociente = 1119 — Resíduo $d = 151$
Constante = 621 — Hasta fin de abril 121 Tabla (1)

$T = 1740$ — $d = 30$ de mayo.

Luego la fecha mahometana propuesta corresponde

$$\text{al } \frac{30 \textit{ de mayo}}{10 \textit{ de junio}} \text{ de } 1740.$$

Ejemplo 2.°

Se pide el principio del Ramadan del año mahometano 1255 en fecha cristiana.

$$(a) = 456482$$
$$(b) = \quad 452$$
$$(c) = \quad 208{,}75$$
$$m'-1 = \quad 236 \qquad \text{Tabla (5)}$$
$$h' = 457.378{,}75$$

$\left(\frac{h'}{365{,}25}\right)_e = 1197.\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\left(\frac{h'}{365{,}25}\right)_e = \quad 174{,}45$

$+ \ 621$ — $d = 174$

$T = 1818$ — Hasta fin de mayo. . . 151 Tabla (1)

$d = 23$ junio.

Luego el principio del Ramadan del año 1233 coincidió con el $\frac{25\ de\ junio}{5\ de\ julio}$ de 1818.

Desde fines del siglo XVIII puede operarse con números mas pequeños, y por consiguiente con mayor facilidad, por medio de una simplificacion fundada en las consideraciones siguientes.

El dia 1.° de Muharram del año 1201 correspondió al 15 de octubre de 1786, fecha juliana; y desde 1.° de enero de 1784 (principio de bisiesto) hasta 15 de octubre de 1786 pasaron $366+365+286=1017$ dias.

La fecha mahometana que acabamos de citar, es tambien principio de ciclo. Hagamos

$$M-1201=\varphi.$$

El valor de φ en dias será $354\varphi+\psi$, siendo ψ el de años embolísmicos trascurridos desde el principio de 1201 hasta φ inclusive. El de los mismos hasta φ esclusive es, segun hemos visto $=\left(\frac{11\varphi+5}{30}\right)_e$; luego agregando en esta espresion una unidad á φ, tendremos por valor del número de dias trascurridos desde el principio de 1201 hasta el de M,

$$354\varphi\left(\frac{11\varphi+14}{30}\right)_e;$$

y los dias (h) trascurridos desde 1.° de enero de 1784 (fecha juliana) hasta 1.° de Muharram del año M, serán dados por la espresion general

$$(h)=1017+354\varphi+\left(\frac{11\varphi+14}{30}\right)_e.$$

De paso advertiremos que M será $\left\{\begin{matrix}\text{comun}\\ \text{embolísmico}\end{matrix}\right\}$ si fuese

$$\left(\frac{11\varphi+14}{30}\right)_r \left\{ \begin{matrix} <19 \\ >18 \end{matrix} \right\}.$$

La fecha cristiana juliana será en consecuencia,

$$T=\left[1784+\left(\frac{(h)}{365{,}25}\right)_e\right];$$

$$d=+\left(\frac{(h)}{365{,}25}\right)_r,$$

desechando el decimal que contuviere esta última cantidad.

Para hallar la feria caracter, basta saber que el año 1201 empezó por un martes ó feria 3; de que se sigue:

$$f=\left(\frac{(h)-1017+3}{7}\right)_r$$

$$=\left[\frac{(h)+1}{7}\right]_r,$$

Sirva de ejemplo 1.° el que se propuso segun el método general, á saber: hallar el principio de 1216 en fecha cristiana.

$$M= \quad 1216$$
$$\text{Constante} = -1201$$
$$\varphi = \quad 15$$

$$(h)=1017+354\times 15+\left(\frac{11\times 15+14}{30}\right)_e=6332,$$

$\left(\frac{11\times 15+14}{30}\right)_r=29>18$. Luego M embolísmico.

$\left(\frac{(h)}{365{,}25}\right)_e=17;$ $\qquad$ $\left(\frac{(h)}{365{,}25}\right)_r=122{,}75.$

Luego $T = 1784 + 17 = 1801$,

$$d = 122 = \frac{2}{14} \text{ de mayo,}$$

$f = 5$, jueves,

como hallamos anteriormente.

Sea 2.° ejemplo $M = 1253$, que da $\varphi = 52$. Tendremos

$$(h) = 1017 + 52 \times 354 + \left(\frac{11 \times 52 + 14}{30}\right)_e = 19444,$$

$$\left(\frac{11 \times 52 + 14}{30}\right)_r = 16;\ M \text{ comun.}$$

$$\left(\frac{(h)}{365{,}25}\right)_e = 53;\quad \left(\frac{(h)}{365{,}25}\right)_r = 85{,}75.$$

Luego $T = 1784 + 53 = 1837$,

$$d = 85 = \frac{26\ marzo}{7\ abril},$$

$f = 6$, viernes.

Esto es, que el año 1253 de la Hegira principió el viernes $\frac{26 \text{ de marzo}}{7 \text{ de abril}}$ de 1837, y que fue comun, ó de 354 dias.

§. 4. *Reduccion de fechas cristianas á mahometanas.*

Las cristianas se suponen todas julianas.

Si todos los años julianos fuesen comunes, ó de 365 dias, la cantidad $\left[365\,(T - 622) + 1\right]$ sería el número de dias trascurrido desde 1.° de enero de 622 hasta igual dia inclusive del año T. Pero el nú-

mero de bisiestos que ha habido en el intermedio es evidentemente $= \left(\frac{T-621}{4}\right)_e$; luego el número de dias que se cuentan en 1.° de enero del año T, partiendo de igual dia del año 622, será

$$365\,(T-622)+\left(\frac{T-621}{4}\right)_e+1\,;$$

y como en 16 de julio de 622, principio de la Hegira, habian pasado 196 dias de aquel año, si se resta esta cantidad de la anterior, resulta que el número p de dias que se cuentan de la Hegira en 1.° de enero del año T, tiene por espresion

$$p=365\,(T-622)+\left(\frac{T-621}{4}\right)_e-195.$$

Se ha dicho que el ciclo de 30 años mahometanos consta de 10631 dias, cuyos múltiplos van dados en la tabla (6). Haciendo, pues,

$$\lambda=10631;$$

se hallan facilísimamente los valores de

$$\left(\frac{p}{\lambda}\right)_c=a';\ \left(\frac{p}{\lambda}\right)_r=R\,;$$

y a' representará el número de ciclos completos contenidos en p.

Para hallar la parte restante, hagamos

$$\left(\frac{R}{354}\right)_c=b'\,;\ \left(\frac{R}{354}\right)_r=r'\,;$$

sería r', si todos los años contenidos en R fuesen comunes, el número de dias que se cuentan del año de la Hegira $M=(1+30\,a'+b')$ en 1.° de enero del año T (fecha juliana). Pero la fecha mahometana así hallada tendria un error de dias por esceso igual al número de años embolísmicos contenidos en R hasta el b' inclusive; este error tiene por espresion, segun queda demostrado en el párrafo anterior,

$$y' = \left(\frac{11b'+14}{30}\right)_e.$$

Luego la verdadera fecha mahometana que se busca será

$$\text{dia } (r'-y') \text{ del año } \left[M=1+30\,a'+b'\right]$$

Puede ocurrir: 1.° que sea $r'=y'$; 2.° que sea $r'<y'$.

En el primer caso, la fecha mahometana que se busca será el último dia del año $\left[M=30\,a'+b'\right]$, esto es, el 29 ó el 30 del mes de Dulkagiath, segun que el último de los años contenidos en b' fuese comun ó embolísmico; esto es, segun que $\left(\frac{11b'+5}{30}\right)_r$ fuese <19 ó >18.

En el segundo caso, el año juliano T principiará en el dia $(354+y'-r')$ del año $\left[M=30\,a'+b'\right]$, ó bien el dia $(355+y'-r')$ del mismo año, segun que el último de los años contenidos en b' fuese comun ó embolísmico; esto es, segun fuese, como queda dicho,

$$\left(\frac{11b'+5}{30}\right)_r <19 \text{ ó } >18;$$

ó lo que es equivalente á lo mismo,

$$\left(\frac{11b'+14}{30}\right)_r >10 \text{ ó } <11.$$

Puede operarse tambien de otro modo cuando $(r'-y')$ no es una cantidad positiva, y es el siguiente:

Hagamos

$$\left(\frac{R}{355}\right)_e = b''; \left(\frac{R}{355}\right) = r''.$$

Sería r'', si todos los años contenidos en R fuesen embolísmicos, el número de dias que se cuentan del año de la Hegira

$$\left[M=1+30\,a'+b''\right]$$

en 1.° de enero del año T, fecha juliana. Pero la fecha mahometana asi hallada tendria un error por defecto en dias, igual al número de años comunes contenidos en R hasta el b'' inclusive, error que tiene por espresion

$$z''=\left(\frac{19b''+15}{30}\right)_e.$$

Luego la verdadera fecha mahometana que se busca, será

$$\text{dia } (r''+z'') \text{ del año } \left[M=1+30\,a'+b''\right];$$

espresion mas cómoda, siempre que no sea $(r'-y')$ una cantidad positiva.

De lo dicho resulta la siguiente

Regla para hallar la fecha mahometana que corresponde al 1.° de enero del año T (fecha juliana).

Llámese $\left\{\begin{matrix} m \\ M \end{matrix}\right\}$ al $\left\{\begin{matrix} \text{dia} \\ \text{año} \end{matrix}\right\}$ que se busca de la Hegira.

Calcúlese por la tabla (2) la cantidad

$$p=365\,(T-622)+\left(\frac{T-621}{4}\right)_e-195.$$

y por la (6), poniendo $\lambda=10631$, las

$$\left(\frac{p}{\lambda}\right)_e=a';\ \left(\frac{p}{\lambda}\right)_r=R.$$

Hecho esto, calcúlese por la tabla (6),

$$\left(\frac{R}{354}\right)_e=b';\ \left(\frac{R}{354}\right)_r=r';$$

$$y' = \left(\frac{11b' + 14}{30}\right)_e;$$

y se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} M = 1 + 30\,a' + b', \\ m = r' - y' \end{array}\right\} \text{solucion.}$$

Si $(r' - y')$ resultare negativa ó nula, calcúlese por la misma tabla (6)

$$\left(\frac{R}{355}\right) = b''; \left(\frac{R}{355}\right)_r = r'';$$

$$z'' = \left(\frac{19b'' + 15}{30}\right)_e;$$

y se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} M = 1 + 30\,a' + b'', \\ m = r'' + z'' \end{array}\right\} \text{solucion.}$$

Ejemplo 1.°

Se pide la fecha mahometana que corresponde al 1.° de enero de 1582.

$T = 1582$

$- \quad 622$

1.ª parte de $p = 960 \times 365 = 350400$ Tabla (2)

2.ª parte $\left(\frac{961}{4}\right)_e = 240$

Constante $= - \quad 195$

$p = 350445;$ $\lambda = 10631;$

$$\left(\frac{p}{\lambda}\right)_e = a' = 32; \left(\frac{p}{\lambda}\right)_r = R = 10253.$$

$$\left(\frac{R}{354}\right)_e = b' = 28; \left(\frac{R}{354}\right)_r = r' = 341; y' = \left(\frac{11\times 28+14}{30}\right)_e = 10.$$

Luego $m = r' - y' = 331,$
$M = 30\,a' + b' + 1 = 989.$

La tabla (5) da hasta fin del mes Dulkaidath... 325 *dias*.

$m = 331$

m corresponde al — 6 *de Dilhaga*.

Luego el principio del año 1582 de la era vulgar corresponde al 6 de Dilhaga del año 989 de la Hegira.

Ejemplo 2.°

Fecha cristiana = 1.° de enero de 1226.
Hallaremos $p = 220460 + 151 - 195 = 220416;$

$a' = 20;\ R = 7796;\ b' = 22;\ r' = 8;\ y' = 8;\ m = 0.$
$b'' = 21;\ r'' = 341;\ z'' = 15;\ m = 345.$

Puede hacerse $m = 0,$ $M = 30\,a' + b'$ } último dia de $M = 622;$
y como el año 622 es comun, tendremos el 29 de Dilhaga de 622.

Tambien puede hacerse
$m = 345,$ $M = 30\,a' + b'' + 1$ } dia 345 del año 622.
Y como 622 es comun, se tiene el mismo resultado.

Ejemplo 3.°

Fecha cristiana = 1.° de enero 1779 (juliano);

$p = 422399;\ a' = 59;\ R = 7790;\ b' = 22;\ r' = 2;\ y' = 8;\ m = -6,$
$b'' = 21;\ r'' = 335;\ z'' = 15;\ m = +348.$

Puede hacerse $m=-6$, $M=30\,a'+b'+1$ } dia —6 del año 1193;

y como el año 1192 era comun, resulta la fecha que se busca

$m=354-6=348$ del año 1192 de la Hegira.

Tambien puede hacerse

$m=+348$, $M=30\,a'+b''+1$ } dia 348 del año 1192.

El dia 348 corresponde al 23 de Dilhaga, tabla (5).

Si se quisiese hallar en general la fecha mahometana que corresponde á un dia cualquiera d del año T de la era cristiana (fecha juliana), se hallará primeramente por la tabla (1) el valor de d; se añadirán $(d-1)$ dias á la cantidad p correspondiente al 1.° de enero de T, y llamando p' á la suma se operará con p' del mismo modo que se ha prescrito para p.

Ejemplo.

Se quiere obtener la fecha mahometana que corresponde al $\frac{30\ de\ mayo}{10\ de\ junio}$ de 1740. Tendremos,

$p=408154$

$d-1=\quad 150$ Tabla (1)

$p'=408304;$

$a'=58;\ R=4526;\ b'=12;\ r'=78;\ y'=4.$ Luego

$m=78-4=74$, $M=30\,a'+b'+1=1155$ } dia 15 de Rabié I, tabla (5).

Luego el 30 de mayo de 1740 (fecha juliana) equivale al 15 de Rabié I del año 1155 de la Hegira, como antes hemos hallado resolviendo el problema inverso.

CAPITULO VII.

Del Calendario judáico actual.

Advertencias preliminares.

Varios autores se han dedicado á espresar en fórmulas analíticas las circunstancias de este calendario, el mas complicado de todos, pero tambien el mas ingenioso. Entre dichos autores se hallan los respetables nombres de Zach, Ciccolini, Cresy, y el respetabilísimo de Gauss.

Este último, en su Correspondencia astronómica alemana, dió fórmulas para hallar el dia de la Pascua judáica en fecha cristiana. Yo no he visto dicha Correspondencia, pero sí la traduccion de sus escritos sobre esta materia en la Correspondencia francesa de Zach. Y aunque hay en ellos varias trasformaciones y resultados propios de la sagacidad de tan grande analista, con todo, la fórmula final para el dia de la Pascua judáica, ciertamente no es sencilla. Además, presentándose con coeficientes aproximados hasta un cierto número de decimales, es difícil asegurarse de la exactitud general de los resultados, sin escepcion.

El baron de Zach, mas bien se dedicó á esplicar la estructura del calendario judáico á las personas poco versadas en cronología, que á la deduccion de fórmulas analíticas que lo representasen. Y además de algunas equivocaciones, carece de ciertos pormenores y claridad, singularmente al esplicar los dias de *desecho* ó *ilícitos* (en francés *jours de rebut*).

El Sr. Ciccolini ha dado tablas por cuyo medio las operaciones se reducen á un grado de sencillez que tal vez es imposible superar; mas las espresiones que indica para la formacion de las tablas están equivocadas, y además sin demostracion. Pero lo mas notable es una equivocacion grave de concepto en que cayó, unidamente con el Sr. Cresy, acerca de las condiciones de la escepcion llamada por los judíos *Gatrad;* y lo mas singular, que habiendo designado Gauss de un modo

sencillo y magistral las verdaderas condiciones, los dos geómetras italianos las alterasen, creyendo yerro de imprenta lo que era en realidad un pensamiento ingenioso y exacto del analista aleman.

La necesidad de detenerse cuando se trata de poner en claro errores que andan impresos, es tanto mayor cuanto mayor es la justa celebridad de los autores que han incurrido en ellos: consideracion que espero haga perdonable, cuando menos, la difusion que pueda hallarse en algunas partes de este capítulo; y asimismo alguna equivocacion que pueda yo haber cometido, á pesar del sumo cuidado que he puesto en evitarlas.

§. 1. — *Estructura de este calendario.*

El año judáico es lunisolar. En un periodo de 19 años se cuentan 12 años comunes, que son los 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18; y 7 embolísmicos..... 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19.

Los años $\left\{\begin{matrix}\text{comunes}\\ \text{embolísmicos}\end{matrix}\right\}$ constan de $\left\{\begin{matrix}12\\ 13\end{matrix}\right\}$ meses.

El dia se supone dividido en 24 horas, y cada una de estas en 1080 partes, llamadas *helakims* (*). Para el arreglo de los años y meses, suponen que estos últimos son lunares, y cada uno de ellos de 29 dias, 12 horas y 793 *helakims*. Por consiguiente

Año comun astronómico $= 354^d\ 8^h\ 876^{hel.}$

Año embolísmico..... $= 383\ 21\ 589.$

El *helakim* equivale visiblemente á $\frac{60'}{1080} = \frac{3600''}{1080}$; esto es, á $(3+\frac{1}{3})''$ sexagesimales.

(*) Petan dice que estas partes se llaman *scrupula horaria*, y que el *helakim* es $= \frac{1}{76}$ del escrúpulo horario. Nada influye esta divergencia de opiniones (que es de nombre) en los cómputos.

Multiplicando por 7 la duracion del año astronómico embolísmico, y por 12 la del comun, la suma de productos será la duracion de un ciclo completo de 19 años.

Esta cantidad resulta de

$$6939^d\ 16^h\ 595^{hel.} = 6939^d\ 16^h\ 33'\ 3''\tfrac{1}{3}. \ldots\ldots\ (52).$$

Partiéndola por 19 veremos que el año judáico astronómico supone la duracion del año trópico de $365^d\ 5^h\ 55'\ 25''$, y por tanto que es mas exacto que el juliano de $365^d\ 6^h$.

Por lo que hace al mes sinódico lunar $= 29^d\ 12^h\ 793^{hel.} = 29^d\ 12^h\ 44'\ 3''\tfrac{1}{3}$, puede mirarse como exacto.

El origen de estos años ó Era judáica, segun el calendario actual, es la Neomenia ó novilunio que suponen se verificó el 7 de octubre del año 953 del periodo juliano, á $5^h\ 204^{hel.}$ despues de las 6^h de la tarde, tiempo verdadero del meridiano de Jerusalen. A este origen de su era llaman los judíos *Molad Tobu.*

Como el año primero de la Era cristiana principió con el año de 4714 del periodo juliano, se sigue de lo que acabamos de decir, que un año judáico cualquiera A debe empezar en el año de la era cristiana $(A—\overline{4714—953})$; y representando por T el año de esta en que principia el judáico $(A+1)$, tendremos

$$T = A - 3760. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (53).$$

El año astronómico juliano es de $365^d\ 6^h$. Por consiguiente el exceso de este sobre el judáico $\left\{\begin{matrix}\text{comun}\\ \text{embolísmico}\end{matrix}\right\}$ es de

$$\left\{\begin{matrix}+\ 10^d\ 21^h\ 204^{hel.}\\ -\ 18\quad 15\quad 589\end{matrix}\right\}.$$

Para que no quede la menor duda acerca del resultado (53), conviene advertir que la diferencia entre la duracion del ciclo judáico (52) y la de 19 años astronómicos julianos, es $= 1^h\ 485^{hel.}$; cantidad en que va adelantándose el judáico cada 19 años. Para que este adelanto sea

de 280 dias que se cuentan en 7 de octubre, son precisos mas de 4657 ciclos, de los cuales van pasados solos 292 en el año de 1800; por consiguiente quedan aún 4545 ciclos, que hacen unos 80.000 años; y mientras no pasen, será cierta la ecuacion (53).

Aunque las intercalaciones de este calendario son, como las de todos, de dias justos, las reglas para hacerlas dependen no solamente de los dias, sino tambien de las horas y aun de los *helakims* del cómputo astronómico; razon por la cual reservamos su esplicacion para despues del análisis de lo que llevamos hasta aqui espuesto.

§. 2. — *Espresiones analíticas.*

Si el lector se toma el trabajo de formar una tabla por principios semejantes en un todo á los que sirvieron de base para la (7), hallará facilmente:

1.° Que el número $\left\{ \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right\}$ de años $\left\{ \begin{matrix} \text{embolísmicos} \\ \text{comunes} \end{matrix} \right\}$ trascurridos desde el principio de la era judáica hasta el año A inclusive de la misma, tiene por espresion

$$\left\{ \begin{matrix} y = \left(\dfrac{7A+1}{19} \right)_e \\ z = \left(\dfrac{12A+17}{19} \right)_e \end{matrix} \right\}.$$

2.° Que la espresion $\left(\dfrac{7A+1}{19} \right)_r$ da un resultado $\left\{ \begin{matrix} <7 \\ >6 \end{matrix} \right\}$ cuando A es $\left\{ \begin{matrix} \text{embolísmico} \\ \text{comun} \end{matrix} \right\}$.

3.° que la $\left(\dfrac{12A+17}{19} \right)_r$ da un resultado $\left\{ \begin{matrix} >11 \\ <12 \end{matrix} \right\}$ cuando A es $\left\{ \begin{matrix} \text{embolísmico} \\ \text{comun} \end{matrix} \right\}$.

4.° Que lo mismo que se ha probado de las espresiones anteriores, se puede decir de las $\left(\frac{7p+1}{19}\right)_r$, $\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r$, en las cuales $p=\left(\frac{A}{19}\right)_r$, y que son respectivamente iguales á aquellas.

5.° Y si llamamos $\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\}$ al número de años $\left\{\begin{matrix} \text{embolísmicos} \\ \text{comunes} \end{matrix}\right\}$ contenidos en $p=\left(\frac{A}{19}\right)_r$ hasta el último p inclusive, tendremos

$$y=\left(\frac{7p+1}{19}\right)_e;\ z=\left(\frac{12p+17}{19}\right)_e \ldots\ldots\ldots \quad \{(54)\}$$

Sentado lo dicho, empezaremos por considerar el calendario juliano con su única intercalacion de un dia en cada cuatro años, y el cómputo astronómico que supone el año de $365^d\ 6^h$; si parten ambos del 7 de octubre de 955, como este año fue bisiesto y ya habia pasado la intercalacion de febrero, resultará siempre adelantada la fecha juliana respecto del cómputo astronómico de que hablamos, en $\left(\frac{I-953}{4}\right)_r 6^h$, representando I como hasta aqui el año del periodo juliano correspondiente al judáico A. El coeficiente de 6^h en esta espresion puede trasformarse en $\left(\frac{T+4713-953}{4}\right)_r$, y tambien en $\left(\frac{A-3760}{4}\right)_r$, que se reducen á $\left(\frac{T}{4}\right)_r=\left(\frac{A}{4}\right)_r$.

Por otra parte, en un número de años $\left(\frac{A}{19}\right)_e$, el cómputo judáico

se adelanta al astronómico de $365^d\ 6^h$ en una cantidad $= \left(\frac{A}{19}\right)_e \times$ $(1^h\ 485^{hel.})$; y en $\left(\frac{A}{19}\right)_r$ años, en otra cantidad $= mz - ny$, siendo $\left\{\begin{matrix} m = 10^d, 21^h, 204^{hel} \\ n = 18\ ,\ 15\ ,\ 589 \end{matrix}\right\}$, todo segun la doctrina del párrafo anterior. Luego para reducir al cómputo de $365^d\ 6^h$, es preciso restar al judáico al cabo de A años

$$mz - ny + \left(\frac{A}{19}\right)_e . (1^h\ 485^{hel.});$$

y para reducir al calendario juliano, será preciso aplicar al dicho cómputo judáico la correccion total

$$\left(\frac{A}{4}\right)_r . 6^h + (ny - mz) - \left(\frac{A}{19}\right)_e . (1^h\ 485^{hel.});$$

De aqui se sigue que la fecha juliana correspondiente al dia primero del año judáico astronómico $(A+1)$, tiene por espresion

$$Año = T = A - 5760,$$

ó bien

$$Año = I = A + 955,$$

$$Dia = \downarrow = (octubre\ 7^d\ 11^h\ 204^{hel.}) + \left(\frac{A}{4}\right)_r 6^h$$

$$+ (ny - mz) - \left(\frac{A}{19}\right)_e (1^h\ 485^{hel.}) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55),$$

ó bien, indicando por q la suma de los tres últimos términos,

$$Dia = \downarrow = (marzo\ 221^d, 11^h, 204^{hel.}) + q; \ldots\ldots\ldots \quad (55\ bis);$$

considerando siempre el principio del dia á 0^h, tiempo astronómico.

§. 3. — *Pascua; fiesta del cordero; dias lícitos ó* Kebias; *ilícitos; principio del año civil; del religioso,* &c.

Los judíos celebran la Pascua ó fiesta de los Azimos del año *A*, 165 dias antes del dia primero del año civil (*A*+1). En esto no hay escepcion, como ni tampoco en celebrar la cena del cordero el dia inmediato anterior al de la Pascua.

En el dia de esta cena cuentan siempre 14 dias del mes de Nisan, y este mes es el primero del año legal ó religioso. En ambas prácticas se arreglan á los testos: *Mensis iste vobis principium mensium, primus erit in mensibus anni.* (Exod. 12, 2.) *Et servabitis eum (agnum) usque ad quartam decimam diem mensis hujus; immolabitque eum universa multitudo filiorum Israel ad vesperam.* (Ibidem, 12, 6.) Es facilísimo, pues, cuando se ha determinado el primer dia del año civil (*A*+1), retroceder á buscar la Pascua, la cena del cordero y el principio del año legal, é inversamente.

La complicacion de este calendario está, pues, en la determinacion del principio del año civil. Ya hemos dicho en qué difiere éste del legal ó eclesiástico. Resta que indiquemos por ahora que difiere del astronómico: 1.° en constar de un número de dias cabales; 2.° en la prohibicion que han establecido de principiar el año civil en ciertos dias de la semana; 3.° en la traslacion que hacen, aun sin este motivo, del principio del mismo año, retardándolo un dia.

Ante todo, la esplicacion de estas circunstancias conviene advertir que los judíos distinguen como los mahometanos los dias de la semana por *ferias*, empezando por el domingo, que es feria 1, y acabando por la feria 7, que es el sábado.

Como, cualquiera que sea el principio de un año civil (*A* + 1), la Pascua del año *A* le ha de preceder en 165 dias, conoceremos la duracion de *A* si determinamos su dia de Pascua y el del año (*A*+1),

pues que el intérvalo de estas dos Pascuas es exactamente igual al de los principios de A y $(A+1)$ (*).

De lo dicho, y de la fórmula (55 *bis*), se sigue que llamando ϖ al dia juliano (año T) de la Pascua del año A, y ciñéndonos al cálculo astronómico judáico, será

$$\left.\begin{aligned}\varpi = \psi - 163^d = (marzo\ 58^d\ 11^h\ 204^{hel.}) + \left(\frac{A}{4}\right)_r 6^h + (ny - mz) \\ -(1^h\ 485^{hel.})\left(\frac{A}{19}\right)_e\end{aligned}\right\} \quad (56).$$

Llamemos M' al número de dias cabales contenidos en ϖ; m' á la fraccion de dia restante; y M al dia en que segun las reglas del calendario judáico debe celebrarse la Pascua.

Antes de dar medios para calcular el valor de ϖ con gran facilidad, consideraremos que la ecuacion (56) puede trasformarse en otra que dé á ϖ en espresion del año cristiano B correspondiente á A. Porque tenemos

$$A = B + 3760;$$

y de aqui resulta

$$\left(\frac{A}{4}\right)_r = \left(\frac{B}{4}\right)_r; \left(\frac{A}{19}\right)_r = \left(\frac{B+17}{19}\right)_r = p'; \left(\frac{A}{19}\right)_e = 197 + \left(\frac{B+17}{19}\right)_e;$$

lo cual da por último, si se advierte que $p' = p$,

$$\varpi = \psi - 163 = (marzo\ 46^d\ 13^h\ 779^{hel.}) + \left(\frac{B}{4}\right)_r 6^h + (ny - mz)$$

$$-(1_h\ 485^{hel.})\left(\frac{B+17}{19}\right)_e \ldots \quad (56\ bis).$$

(*) Es cierto que algunos cronologistas dan reglas para conocer la duracion del año A, sin necesidad de esta doble operacion; mas tambien lo es que dichas reglas son complicadas; y que determinándose la Pascua judáica con grandísima facilidad por medio de dos tablas que se van á dar, es preferible hallar la diferencia de dos Pascuas consecutivas.

Los medios que hemos indicado para el cálculo facil de ϖ, son las tablas siguientes.

TABLA (8).

Arg. $\left(\frac{A}{19}\right)_r = p$	Argumento $\left(\frac{A}{4}\right)_r$											
	0.			1.			2.			3.		
	Dias.	Horas.	Hel.	Dias	Horas.	Hel.	Dias.	Horas.	Hel.	Dias.	Horas.	Hel.
0	58	11	204	58	17	204	58	23	204	59	5	204
1	47	14	000	47	20	000	48	2	000	48	8	000
2	36	16	876	36	22	876	37	4	876	37	10	876
3	55	8	385	55	14	385	55	20	385	56	2	385
4	44	11	181	44	17	181	44	23	181	45	5	181
5	33	13	1057	33	19	1057	34	1	1057	34	7	1057
6	52	5	566	52	11	566	52	17	566	52	23	566
7	41	8	362	41	14	362	41	20	362	42	2	362
8	59	23	951	60	5	951	60	11	951	60	17	951
9	49	2	747	49	8	747	49	14	747	49	20	747
10	38	5	543	38	11	543	38	17	543	38	23	543
11	56	21	52	57	3	52	57	9	52	57	15	52
12	45	23	928	46	5	928	46	11	928	46	17	928
13	35	2	724	35	8	724	35	14	724	35	20	724
14	53	18	233	54	0	233	54	6	233	54	12	233
15	42	21	29	43	3	29	43	9	29	43	15	29
16	31	23	905	32	5	905	32	11	905	32	17	905
17	50	15	414	50	21	414	51	3	414	51	9	414
18	39	18	210	40	0	210	40	6	210	40	12	210

Esta tabla se ha formado del modo siguiente.

El valor que debe dar es

$$\varepsilon = \varpi + \left(\frac{A}{19}\right)_e (1^h\,485^{hel.}) = marzo\left[58^t\,11^h\,204^{hel.} + \left(\frac{A}{4}\right)_r 6^t + ny - mz\right]$$

$$= marzo\left[b+\left(\frac{A}{4}\right)_r 6^h + n\left(\frac{7p+1}{19}\right)_e - m\left(\frac{12p+17}{19}\right)_e\right].$$

Esto supuesto, se ha empezado por formar los cuatro valores

$$b,\ b+6^h,\ b+12^h,\ b+18^h,$$

que son la suma de los dos primeros términos de φ cuando $p=\left(\frac{A}{19}\right)_r=0$,

y la cantidad $\left(\frac{A}{4}\right)_r$ tiene respectivamente los valores

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

con lo cual se ha obtenido la primera línea horizontal de valores de φ.

Para $p=1$, que da $y=0$, $z=1$, basta restar el valor de $m=10^d\ 21^h\ 20^{4hel.}$ de cada resultado de la primera línea horizontal para obtener la segunda.

Para $p=2$, que da $y=0$, $z=2$, restando m de los resultados de la segunda línea, se obtendrá la tercera.

Para $p=3$, que da $y=1$, $z=2$, se sumará el valor de $n=18^d\ 15^h\ 58^{9hel.}$ á los resultados de la tercera línea, y se obtendrán los de la cuarta.

Continuando el procedimiento de $\left\{\begin{matrix}\text{restar}\\\text{sumar}\end{matrix}\right\}$ un valor de $\left\{\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}$ cuando p diere año $\left\{\begin{matrix}\text{comun}\\\text{embolismico}\end{matrix}\right\}$, quedará formada la tabla en cosa de media hora, y dará el valor de φ inmediatamente con los argumentos $\left(\frac{A}{4}\right)_r$ y $\left(\frac{A}{19}\right)_r=p$.

Resta que calcular el término $\left(\frac{A}{19}\right)_e$. $(1^h\ 485^{hel.})$, y restarlo de ρ

:

para obtener á ϖ. La tabla siguiente de múltiplos de ($1^h\ 485^{hel.}$) ahorra este trabajo.

Factor.	*Producto.*	*Factor.*	*Producto.*	*Factor.*	*Producto.*
1	$1^h\ 485^{hel.}$	10	$0^d\ 14^h\ 530^{hel.}$	100	$6^d\ 0^h\ 980^{hel.}$
2	2 970	20	1 4 1060	200	12 1 880
3	4 375	30	1 19 510	300	18 2 780
4	5 860	40	2 9 1040	400	24 3 680
5	7 265	50	3 0 490	500	30 4 580
6	8 750	60	3 14 1020	600	36 5 480
7	10 155	70	4 5 470	700	42 6 380
8	11 640	80	4 19 1000	800	48 7 280
9	13 45	90	5 10 450	900	54 8 180

Factores y productos para el siglo XIX cristiano.

Factor $\left(\frac{A}{19}\right)_e$	*Producto.*	*Factor* $\left(\frac{B+17}{19}\right)_e$	*Producto.*
292	$17^d\ 15^h\ 140^{hel.}$	95	$5^d\ 17^h\ 715^{hel.}$
293	17 16 625	96	5 19 120
294	17 18 30	97	5 20 605
295	17 19 515	98	5 22 10
296	17 20 1000	99	5 23 495

Cuando se conoce solamente á B con $\left(\frac{B+17}{19}\right)_e$, la tabla (9) dará un resultado al cual se sumará la constante $11^d\ 21^h\ 505^{hel.}$, llamando φ' á la suma. Despues se entrará en la tabla (8) con

$$\left(\frac{B+17}{19}\right)_r \text{ en vez de } \left(\frac{A}{19}\right)_r, \text{ y } \left(\frac{B}{4}\right)_r \text{ en vez de } \left(\frac{A}{4}\right)_r,$$

y se hallará otro resultado φ''. Por último, $\varpi = \varphi'' - \varphi'$.

Sería lo mas facil, conociendo á B, hallar á A haciendo $A = B +$

5760. Pero es mejor para comprobacion servirse de ambos métodos en cada caso, una vez que las operaciones resultan tan sencillas. Aplicaremos ambos á un mismo ejemplo, á saber.

Se pide el valor de ϖ para el año judáico $5562 = A$, que equivale al 1802 de nuestra era.

$$\left(\frac{B+17}{19}\right)_e = 95, \qquad \left(\frac{A}{19}\right)_e = 292:$$

$$\left(\frac{B+17}{19}\right)_r = 14, \qquad \left(\frac{A}{19}\right)_r = 14;$$ luego A es embolísmico;

$$\left(\frac{B}{4}\right)_r = 2, \qquad \left(\frac{A}{19}\right)_r = 2.$$

Con la primera de estas tres cantidades la tabla (9) da... $5^d\,17^h\,715^{hel.}$
Constante.. 11 21 505
Suma..... 17 15 140$= \varphi'$
Con las otras dos la tabla (8) da 54 6 233$= \varphi''$
$\varpi =$ (*marzo*..... $36^d\,15^h\,95^{hel.}$)

Con $\left(\frac{A}{19}\right)_e$ tabla (9)... $17^d\,15^h\,140^{hel.}$
Con las otras dos cantidades, tabla (8).. 54 6 233
$\varpi =$ (*marzo*..... $36^d\,15^h\,93^{hel.}$)
$M' =$ *marzo* $36^d =$ *abril* 5^d
$m' = 15^h\,93^{hel.}$

Es preciso hallar la feria f á que corresponde la fecha M'. Para ello sirve el conocimiento de que la letra afecta al 1.° de marzo es $D = 4$. Luego llamando L á la letra juliana del año T á que corresponde la Pascua ϖ del año A, tendremos por espresion de la feria que en el mismo año corresponde al 1.° de marzo,

$$\left(\frac{5-L}{7}\right)_r;$$

y añadiendo $(M'-1)$ dias que median entre el 1.° de marzo y el dia M', resultará

$$f=\left(\frac{4+M'-L}{7}\right)_r.$$

La fórmula (11) da, poniendo por T su valor $A-3760$,

$$L=\left(\frac{5+2\left(\frac{A}{4}\right)_r+4\left(\frac{A+6}{7}\right)_r}{7}\right)_r$$

$$=\left(\frac{2\left(\frac{A}{4}\right)_r+4A+6}{7}\right)_r;$$

de que se sigue por último

$$f=\left[\frac{5+5\left(\frac{A}{4}\right)_r+3\left(\frac{A}{7}\right)_r+\left(\frac{M'}{7}\right)_r}{7}\right]_r \ldots\ldots\ldots \quad (57);$$

ó en espresion de B,

$$f=\left[\frac{1+5\left(\frac{B}{4}\right)_r+3\left(\frac{B}{7}\right)_r+\left(\frac{M'}{7}\right)_r}{7}\right]_r \ldots\ldots \quad (57\ bis).$$

En el ejemplo propuesto

$5\left(\frac{B}{4}\right)_r = 10,$	$5\left(\frac{A}{4}\right)_r = 10,$
$3\left(\frac{B}{7}\right)_r = 9,$	$3\left(\frac{A}{7}\right)_r = 12,$
$\left(\frac{M'}{7}\right)_r = 1$	$\left(\frac{M'}{7}\right)_r = 1,$
Constante $= 1$	Constante $= 5$
$\left(\frac{Suma}{7}\right)_r = 0\ldots$ Sábado	$\left(\frac{Suma}{7}\right)_r = 0\ldots$ Sábado.

El dia M' que resulta de las reglas anteriores es en algunos casos el verdadero de la celebracion de la Pascua judáica, pero esta regla

está sujeta, como ya se ha anunciado, á varias escepciones que vamos á esplicar.

Primera.

Cuando el dia de la Neomenia ó luna nueva con que principia el año judáico astronómico $(A+1)$ contiene un quebrado de dia que llegue á 18^h ó esceda de esta cantidad, se traslada al dia inmediato siguiente el principio del año civil $(A+1)$, y por consiguiente sufre la misma alteracion la festividad de la Pascua de A, que ha de celebrarse invariablemente 163^d antes del dia primero de $(A+1)$.

Ya hemos dicho que los judíos ponen el principio del dia á las 6^h de la tarde, y vimos en el párrafo primero que esta hora es el momento de partida de la era judáica, ó *Molad Tobu*. Nosotros le añadimos 6^h para contar desde el mediodía, por ser mas apropiado á nuestro uso, y por la circunstancia de que en este último coinciden los judíos con nosotros, pues que la época de las Neomenias es tambien para ellos el mediodía; de modo que se encuentran con ella cuando han contado 18^h del dia que principió á las 6^h de la tarde del dia anterior.

A este caso de escepcion llaman *Jah*, y necesitan tenerlo presente, mas no nosotros, que habiendo añadido 6^h á la constante, naturalmente añadimos un dia cuando los judíos completan 18^h, porque en nuestro cálculo resultan 24^h. Por tanto, nuestro valor m' satisfará por sí solo á esta necesidad del calendario judáico, sin necesidad de atender á ella.

Segunda.

Los judíos tienen por ilícito principiar un año cualquiera $(A+1)$ por una de las ferias 1, 4, 6; esto es, en domingo, miércoles ó viernes. A las restantes 2, 3, 5, y 7 ó 0 llaman *Kebias* ó dias lícitos. Por consiguiente, la Pascua del año A no puede celebrarse en feria 2, 4 ni 6 (*), y es preciso trasladarla como el principio del año $(A+1)$ á la

(*) Ni la cena del cordero, por tanto, en domingo, martes ni jueves.

feria inmediata siguiente. A este caso llaman *Adu*. Luego cuando f tuviere uno de los tres valores 2, 4, 6, el dia de Pascua del año A será $= M' + 1$, y su feria $\varphi = \left(\frac{f+1}{7}\right)_r$. Es facil ver que, segun la cuenta judáica, podrán verificarse en un mismo año el *Jah* y el *Adu;* en la nuestra no se echará de ver el *Jah;* mas con solo llevar en cuenta el *Adu*, resultará el verdadero dia de Pascua M.

Tercera.

Cuando la Neomenia con que principia el año judáico astronómico $(A+1)$ cae en feria 2, si dicho año $(A+1)$ es primero despues de embolismico, y el quebrado de dia $>15^h\ 588^{hel.}$, se traslada el principio de $(A+1)$ al dia siguiente, y por tanto sufre una traslacion igual el dia de Pascua del año A. A este caso llaman los judíos *Batu thakpat.*

Para espresar estas condiciones segun el análisis que hemos adoptado, consideraremos que la segunda equivale á tener $f=0$, y la tercera á $m' > 21^h\ 588^{hel.}$ Además se ve, que siendo A embolismico, tendremos $\left(\frac{12A+17}{19}\right)_r > 11$, segun lo demostrado en el párrafo 2.°; y como esta espresion no varía de valor poniendo en ella $p = \left(\frac{A}{19}\right)_r$ en vez de A, la tercera condicion quedará espresada por $\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r > 11$; ó bien por $\left(\frac{7p+17}{19}\right)_r < 7$; segun el mismo párrafo.

Los resultados son en el caso de las tres condiciones,

$$\varphi = 1;\ M = M' + 1.$$

Cuarta.

—

Cuando el dia de la Neomenia con que principia el año astronómico judáico $(A+1)$ cae en feria 3, si dicho año fuese comun y el quebrado de dia $>9^h\ 203^{hel.}$ segun el cómputo judáico, se retarda tambien el principio del año civil; y como este retardo no puede ser de un dia solo, porque entonces se daria con la feria 4, que es de las ilícitas, segun se ha dicho al tratar de la escepcion segunda, retardan dos dias el principio del año civil para buscar la feria 5, que es *Kebia*. Por consiguiente se retarda tambien 2 dias la Pascua del año A respecto del resultado que da el cálculo astronómico. A este caso llaman los judíos *Gatrad*.

Para espresar estas condiciones segun nuestro análisis, se ve que la segunda y la última equivale á tener

$$f=1,\ m'>15^h\ 203^{hel}$$

Además de la distribucion de los años embolísmicos y comunes en cada período de 19 años, resulta claramente que para que el año

$(A+1)$ sea $\left\{\begin{array}{l}\text{comun}\\ \text{embolismico}\end{array}\right\}$ es preciso que $\left(\frac{A}{19}\right)_r=p$ sea uno de los números

$$\left\{\begin{array}{l}1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 17\ \text{y}\ 19;\\ 2,\ 5,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16\ \text{y}\ 18\end{array}\right\}.$$

Sustituyendo cualquiera de los $\left\{\begin{array}{l}\text{primeros}\\ \text{segundos}\end{array}\right\}$ en la espresion

$$\left(\frac{7p+1}{19}\right)_r=\left(\frac{7A+1}{19}\right)_r,$$

se hallará un resultado $\left\{\begin{matrix}<12\\>11\end{matrix}\right\}$; y haciendo la sustitucion en la es-

presion $\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r = \left(\frac{12A+17}{19}\right)_r$, se hallará un resultado $\left\{\begin{matrix}>6\\<7\end{matrix}\right\}$.

Luego para que el año $(A+1)$ sea comun, es preciso que sea $\left(\frac{7p+1}{19}\right)_r < 12$; ó lo que es lo mismo, que sea $\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r > 6$.

Cualquiera de estas dos pruebas es legítima. Gauss emplea la última.

Luego en definitiva, las condiciones del *Gatrad* son $f=1$;

$m' > 15^h\ 205^{hcl.}$; $\left(\frac{7p+1}{19}\right)_r < 12$, ó bien $\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r > 6$.

Los resultados, en el caso de verificarse las tres condiciones, son

$$\varphi = 3;\ M = M' + 2.$$

Fuera de estos casos de escepcion se tiene siempre

$$\varphi = f;\ M = M'.$$

Las escepciones hacen variable el número de dias del año civil judáico, y resultan de todas las combinaciones posibles seis duraciones de año, que son

Año comun.....	Deficiente, de 353	dias	= 50 semanas	+ 3 dias
	Ordinario. . . 354		= 50	+ 4
	Abundante. . . 355		= 50	+ 5
Año embolismico..	Deficiente, de 383		= 54	+ 5
	Ordinario. . . 384		= 54	+ 6
	Abundante. . . 385		= 55	+ 0

Para hallar la duracion de un año cualquiera, hemos hecho ver que lo mas facil es: 1.° hallar la Pascua del año $(A-1)$, y su fe-

ria φ'; 2.° hallar la del año A y su feria φ. El intérvalo ó diferencia será la duracion del año A.

Para hallar este intérvalo basta el valor de

$$d = \left(\frac{\varphi - \varphi'}{7}\right)_r = \left(\frac{\varphi + 6\varphi'}{7}\right)_r,$$

y buscar el resultado en la tabla siguiente:

Si A *es comun.*	*Si* A *es embolismico.*
Con $d=5\ldots$ $A=355$ dias	Con $d=5\ldots$ $A=385$ dias.
$d=4\ldots$ $A=354$	$d=6\ldots$ $A=384$
$d=5\ldots$ $A=355$	$d=0\ldots$ $A=385$

El dia primero del año A = dia de Pascua de $(A-1)+165$ dias
último = dia de Pascua de $A+162$ dias.

Los nombres de los meses, y los dias de que constan en el año *comun ordinario,* son como sigue:

			177
Thisri.....	30 dias	Nisan.....	30 dias
Marcheswan..	29	Jiar.....	29
Casleu.....	30	Siwan.....	30
Tebeth.....	29	Tamuz.....	29
Schebat.....	30	Ab.....	30
Adar.....	29	El ul.....	29
	177	*Total...*	354

Para obtener la division del año *embolismico ordinario* basta añadir un dia al mes de *Adar*, que con esto resultará de 30 dias, é intercalar entre este mes y el de *Nisan* otro á que llaman *Ve-Adar* ó segundo *Adar*, de 29 dias.

Para los deficientes y abundantes tienen una regla que es la misma para comunes y embolísmicos, á saber; en el *deficiente* quitar un dia al mes *Casleu*, con lo cual resulta de 29 dias; y en el *abundante* aumentarlo al mes *Marcheswan*, haciéndolo de 30.

Todos los casos resultan á la vista en la tabla siguiente:

	AÑO COMUN.			AÑO EMBOLÍSMICO.		
	Deficiente.	Ordinario.	Abundante.	Deficiente.	Ordinar.	Abund.
Thisri.	30 dias	30	30	30	30	30
Marcheswan.	29	29	30	29	29	30
Casleu.	29	30	30	29	30	30
Tebeth.	29	29	29	29	29	29
Schebat.	30	30	30	30	30	30
Adar.	29	29	29	30	30	30
Ve-Adar.	»	»	»	29	29	29
Nisan.	30	30	30	30	30	30
Jiar.	29	29	29	29	29	29
Siwan.	30	30	30	30	30	30
Tamuz.	29	29	29	29	29	29
Ab.	30	30	30	30	30	30
El ul.	29	29	29	29	29	29
Núm. de dias.	353	354	355	383	384	385

Las tres principales solemnidades (*) son:

Pascua ó fiesta de los *Acimos*. . . . . el 15 de *Nisan*.
Pentecostés ó fiesta de las *Hebdomadas*. el 6 de *Siwan*.
Scenopegia ó fiesta de los Tabernáculos. el 15 de *Thisri* (*dura 7 dias*).

(*) *Tribus vicibus per annum apparebit omne masculinum tuum in conspectu Domini tui, in loco quem elegerit; in solemnitate Azymorum, in solemnitate Hebdomadarum, et in solemnitate Tabernaculorum.* (Deuter. cap. 16, v. 16.)

§. 4. *Reglas prácticas, problemas y ejemplos.*

PROBLEMA 1.°

Hallar el dia de la celebracion de la Pascua judáica del año A en fecha cristiana.

1.° Primeramente, el año de esta será $B = A - 5760$.

2.° Hállense las cantidades

$$\left(\frac{A}{4}\right)_r ; \left(\frac{A}{19}\right)_e ; \left(\frac{A}{19}\right)_r = p ; \left(\frac{12p+17}{19}\right)_r , \text{ ó bien } \left(\frac{7p+1}{19}\right)_r .$$

El año A será $\left\{\begin{matrix}\text{embolísmico}\\ \text{comun}\end{matrix}\right\}$ si $\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r \left\{\begin{matrix}>11\\ <12\end{matrix}\right\}$; ó bien si

$$\left(\frac{7p+1}{19}\right)_r \left\{\begin{matrix}<7\\ >6\end{matrix}\right\}.$$

El año $(A+1)$ será $\left\{\begin{matrix}\text{embolísmico}\\ \text{comun}\end{matrix}\right\}$ si $\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r \left\{\begin{matrix}<7\\ >6\end{matrix}\right\}$; ó bien si $\left(\frac{7p+1}{19}\right)_r \left\{\begin{matrix}>11\\ <12\end{matrix}\right\}$.

3.° Con las cantidades $\left(\frac{A}{4}\right)_r$ y $\left(\frac{A}{19}\right)_r = p$, éntrese en la tabla (8) y estráigase el resultado. Con $\left(\frac{A}{19}\right)_e$ como factor, hállese el producto que da la tabla (9). A la diferencia de estos dos resultados llámese ϖ, que contendrá un número de dias M' y un quebrado de dia $= m'$.

4.° Calcúlese la cantidad

$$f=\left(\frac{5+\left(\frac{M'}{7}\right)_r+3\left(\frac{A}{7}\right)_r+5\left(\frac{A}{4}\right)_r}{7}\right)_r.$$

5.° El dia de Pascua del año A será $=M'$, contado desde 1.° de marzo del año B en fecha juliana y la feria $=f$ á escepcion de los casos siguientes.

Primera escepcion.

Si $f=2$, $f=4$ ó $f=6$, el dia de Pascua será $=M'+1$, y la feria $\phi=\left(\frac{f+1}{7}\right)_r$ por causa del *Adu*.

Segunda escepcion.

Si concurriesen las tres circunstancias

$$f=0;\ m'>21^h\ 588^{hel.};\ \left(\frac{12p+17}{19}\right)_r>11,\ \text{ó bien}\ \left(\frac{7p+1}{19}\right)_r<7,$$

el dia de Pascua será $=M'+1$ y la feria $\varphi=1$, por causa del *Bathu thakpat*.

Tercera escepcion.

Si concurriesen las tres circunstancias

$$f=1;\ m'>15^h\ 205^{hel.};\ \left(\frac{12p+17}{19}\right)_r>6,\ \text{ó bien}\ \left(\frac{7p+1}{19}\right)_r<12,$$

el dia de Pascua será $=M'+2$, y la feria $\varphi=3$ por causa del *Gatrad*.

En el párrafo anterior se ha dicho ya el modo de obtener las cantidades M' y m' por medio del año cristiano B, lo cual puede servir de comprobacion. Es inutil por tanto presentar los dobles cálculos en los ejemplos siguientes. Se presentarán usando de A, y el lector puede ejercitarse en repetirlos, usando de B si lo creyere útil.

Ejemplo 1.°

Se pide la fecha cristiana á que corresponde la Pascua celebrada por los judíos en el año cristiano 1802.

Tenemos $B=1802$; $A=1802$; $+5760=5562$; $p=14$.

Hemos hallado en el párrafo anterior para este ejemplo,

$$\varpi=(marzo\ 36^d\ 15^h\ 93^{hel.});$$

$$M'=marzo\ 36^d;\ f=0;\ m'=15^h\ 93^{hel.}\left\{\begin{matrix}A\text{ embolísmico y}\\(A+1)\text{ comun}\end{matrix}\right\}.$$

No pertenece á ninguna de las tres escepciones. Luego, ya que marzo 36^d=abril 5^d, el resultado será que:

La Pascua judáica del año 5562 coincidió con el $\frac{5}{17}$ de abril de 1802, feria $\varphi=f=0=$ sábado.

Ejemplo 2.°

Se pide el dia de la Pascua judáica del año 5600 en fecha cristiana.

$$\left(\frac{A}{4}\right)_r=0;\ \left(\frac{A}{19}\right)_c=294;\ \left(\frac{A}{19}\right)_r=14=p;$$

$$\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r=14;\ \left(\frac{7p+1}{19}\right)_r=4.$$

Luego el año judáico $\left\{\begin{matrix}5600\\5601\end{matrix}\right\}$ es $\left\{\begin{matrix}\text{embolísmico}\\\text{comun}\end{matrix}\right\}$.

	5600
	3760
La tabla (8) da $53^d\ 18^h\ 233^{hel.}$	$B=$ 1840
La (9) 17 18 30	

$$\left(\frac{M}{7}\right)_r = \overset{\text{Feria}}{1},$$

$$3\left(\frac{A}{7}\right)_r = 0,$$

$$5\left(\frac{A}{4}\right)_r = 0,$$

$$\text{Constante} = 5$$

$$f = 6$$

$\varpi = 36^d\ 00^h\ 203^{hel.}$ $M' = marzo\ \ 36_d$

$m' = \ \ 0^h\ 203^{hel.}$

Está en el caso de la primera escepcion ó *Adu*.

Luego $M = M' + 1 = 37$ de marzo,

$$\varsigma = \left(\frac{f+1}{7}\right)_r = 0 = \text{sábado};$$

y finalmente, la Pascua del año judáico 5600 coincidió con el sábado $\frac{6}{18}$ de abril de 1840.

Ejemplo 3.°

Se pide el dia cristiano de la Pascua judáica de 5687.

$$\left(\frac{A}{4}\right)_r = 3; \left(\frac{A}{19}\right)_e = 299; \left(\frac{A}{19}\right)_r = p = 6;$$

$$\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r = 13; \left(\frac{7p+1}{19}\right)_r = 5.$$

Luego $\left\{\begin{matrix}5687\\5688\end{matrix}\right\}$ es $\left\{\begin{matrix}\text{embolísmico}\\\text{comun}\end{matrix}\right\}$ 5687

3760

Tabla (8) $52^d\ 23^h\ 566^{hel.}$ $B = 1927$

Tabla (9) $18^d\ 1^h\ 295^{hel.}$

$\varpi = 54\ 22\ 271;$ $\quad M' = 54^d$

$m' = 22^h\ 271^{hel.}$

$\left(\frac{M'}{7}\right)_r = \frac{\text{Feria}}{6,}$ Concurren las tres circunstancias de la segun-

$5\left(\frac{A}{7}\right)_r = 9,$ da escepcion; á saber:

$5\left(\frac{A}{4}\right)_r = 15,$ $\quad f=0;\ m' > 21^h\ 588^{hel.};\ \left(\frac{12p+17}{19}\right)_r > 11,$ ó bien

Constante$= 5,$ $\quad \left(\frac{7p+1}{19}\right)_r < 6.$

Suma. . . $= 35.\ f=0$ Luego hay *Bathu thakpat;* y por consiguiente

$$M = M' + 1 = \textit{marzo}\ 35^d;\ \varphi = 1;$$

esto es, que la Pascua del año judáico 5687 coincidirá con el domingo $\frac{4}{17}$ de abril de 1927.

Ejemplo 4.° y último.

Se pide el dia cristiano de la Pascua judáica de 5568

3760

$B = 1808$

$$\left(\frac{A}{4}\right)_r = 0;\ \left(\frac{A}{19}\right)_e = 295;\ \left(\frac{A}{19}\right)_r = p = 1;$$

$$\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r = 10;\ \left(\frac{7p+1}{19}\right)_r = 8;$$

El año 5568 es comun; y tambien lo es el 5569, por lo demostrado en el párrafo anterior al tratar de la escepcion cuarta.

Tabla (8) $47^d\,14^h\,000^{hel.}$

Tabla (9) 17 16 625

$\left(\frac{M'}{7}\right)_r = \overset{\text{Feria.}}{1},$

$\varpi = 29^d\,21^h\,455^{hel.}$; $M' = 29^d$,

$m' = 21^h\,455^{hel.}$

$3\left(\frac{A}{7}\right)_r = 9,$

$5\left(\frac{A}{4}\right)_r = 0,$ Concurren las tres circunstancias de la tercera escepcion. Luego hay *Gatrad*, y por consiguiente

Constante$= 5,$

Suma$\ldots = 15$; $f = 1$ $\quad M = M' + 2 = \frac{31\ de\ marzo}{12\ de\ abril}$ de 1808,

$\varphi = 3 =$ *martes*.

Problema 2.°

Hallar el dia cristiano en que principia el año judáico A.

1.° Tendremos $B = (A-1) - 3760 = A - 3761$.

2.° Hállese por el problema anterior el dia en que se celebra la Pascua judáica del año $(A-1)$.

3.° Añádanse á dicho dia 165 unidades, y se tendrá el principio de A en fecha juliana contado desde 1.° de marzo de $A-1$.

4.° La feria con que principia el año A se obtendrá por medio de la espresion

$$\left(\frac{\varphi + 2}{7}\right)_r,$$

indicando por φ la feria á que corresponde la Pascua de $(A-1)$.

Ejemplo 1.°

Se pide el principio de 5563 en fecha cristiana.

La Pascua de 5562 = *marzo* 36^d..... $\varphi = 0$

$$B = \frac{3760}{1802} \quad \frac{+163}{marzo\ 199}..... \quad \left(\frac{\varphi+2}{7}\right)_r = 2$$

Luego el dia primero del año judáico 5563 coincidió con el lunes $\frac{15}{27}$ de setiembre de 1802.

Del mismo modo se hallará.

Ejemplos 2.°, 3.° *y* 4.° *para que sirvan de ejercicio.*

El primer dia de 5601 coincide con el lunes $\frac{16}{28}$ de setiembre de 1840; el primer dia de 5688 con el martes $\frac{14}{27}$ de setiembre de 1927; y el primer dia de 5569 con el jueves $\frac{10}{22}$ de setiembre de 1808.

Problema 3.°

Hallar la duracion del año judáico *A*.

1.° Hállese el dia de Pascua del año *A* por el problema 1.°

2.° Hállese $(A-1)$

3.° El intervalo será la duracion que se pide.

4.° Para hallar este intervalo no hay necesidad de contar los dias; basta hallar el valor de la cantidad $\left(\frac{\varphi+6\varphi'}{7}\right)_r = d$, en la cual $\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \varphi'\end{matrix}\right\}$ representa la feria que corresponde á la Pascua de $\left\{\begin{matrix}A\\ A-1\end{matrix}\right\}$. Y despues

Si A *es embolísmico.*		*Si* A *es comun.*	
Con $d=5$ será A de	383 dias	Con $d=3$ será A de	353 dias
$=6$	384	$=4$	354
$=0$	385	$=5$	355

Ejemplo.

Sea $A=5562$; luego $(A-1)=5561$. Hallada la Pascua de este último por las reglas anteriores, resulta á $\frac{17}{29}$ de marzo de 1801; $\varphi'=1$.

Antes hallamos la Pascua de 5562 á $\frac{5}{17}$ de abril de 1802; $\varphi=0$.

Contando los dias que median entre ambas fechas, se veria que el intervalo es de 384 dias, duracion de 5562; pero conservando solamente los valores de φ y φ', se halla

$$d=\left(\frac{0+6}{7}\right)_r=6;$$

y como 5562 es embolísmico, la tablita anterior dará 384 dias, lo cual es sin comparacion mas breve y elegante.

§. 5. — *Equivocaciones de autores célebres acerca de este calendario.*

Interesa, para mayor claridad en esta discusion, tener á la vista los siguientes resultados, cuya prueba se dió anteriormente en los párrafos respectivos.

$$\text{Sea } \left(\frac{7p+1}{19}\right)_r = \left(\frac{7A+1}{19}\right)_r = r'; \left(\frac{12p+17}{19}\right)_r = \left(\frac{12A+17}{19}\right)_r = r''.$$

Tendremos

$$\text{Si} \begin{cases} r' < 7 \ldots\ldots\ldots & A \text{ embolísmico, y } (A+1) \text{ comun;} \\ r' > 6 \text{ y } < 12 \ldots\ldots & A \text{ comun, y } (A+1) \text{ comun;} \\ r' > 11 \ldots\ldots\ldots & A \text{ comun, y } (A+1) \text{ embolísmico;} \end{cases}$$

$$\text{Si} \begin{cases} r'' < 7 \ldots\ldots\ldots & A \text{ comun, y } (A+1) \text{ embolísmico;} \\ r'' > 6 \text{ y } < 12 \ldots\ldots & A \text{ comun, y } (A+1) \text{ comun;} \\ r'' > 11 \ldots\ldots\ldots & A \text{ embolísmico, y } (A+1) \text{ comun;} \end{cases}$$

Supuesto lo dicho, el Sr. Cresy en el tomo 1.° (segunda edicion) de la Correspondencia astronómica de Zach, se propone demostrar el método dado por Gauss para hallar el dia de la Pascua judáica; y al tratar de la escepcion llamada *Gatrad*, pone como condiciones para que se verifique,

$$m' \gtreqless 15^h\ 204^{hel.},$$

$$x = 1,$$

$$A \text{ comun, ó } \left[\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r = r''\right] < 12, \text{ que es lo mismo.}$$

La primera condicion equivale á la que hemos establecido de $m' > 15^h\ 205^{hel.}$; la segunda á $f=1$, pues Cresy llama x á la misma cantidad que yo he designado por f. Solamente diferimos en la tercera condicion, que es segun Cresy A comun, y segun lo dicho anteriormente es la de $(A+1)$ comun.

Conmigo estan conformes, primeramente Petan, quien ademas espone las razones en que están fundadas todas las escepciones *(de doctrina temporum);* en segundo lugar Zach, que pone la misma condicion que yo, á saber, la de ser comun el año que *empieza;* en tercer lugar Gauss, que pone como tercera condicion $a > 6$, llamando a á la cantidad que yo he designado por r'', lo cual equivale, como se ha demostrado, á $(A+1)$ comun; en cuarto el israelita anónimo que celebró en general el artículo de Zach, advirtiendo y corrigiendo los defectos que halló en este, sin hablar una sola palabra del *Gatrad.*

Ademas de adoptar la tercera condicion de Cresy, resultaria en algunos casos, como probaremos, un año judáico de 382 dias, lo cual es imposible.

Por último, llama la atencion, que siendo el objeto del escrito de Cresy demostrar en todas sus partes el método y fórmulas de Gauss, y hallándose en este la condicion $a>6$ en vez de la de $a<12$ adoptada por Cresy, no discuta este analista la materia para poner en claro la verdad.

Por otra parte el Sr. Ciccolini en el tomo XI de la misma obra de Zach, página 326 y siguiente, inserta el testo de Gauss, traducido de la Correspondencia astronómica alemana de Zach, y en una nota puesta al pie de la página 327, nos descubre el misterio. Insertando Ciccolini el testo de Gauss, puso al tratar del Gatrad $a<12$, y en la nota dice: *Está impreso* $a>6$; *es un yerro de imprenta, que hemos corregido.* Aqui advertimos dos cosas: primera, que Gauss puso $a>6$ como una de las condiciones del *Gatrad;* segunda, que Ciccolini incurrió en la distraccion de tomar como yerro de imprenta la ocurrencia ingeniosa y sencilla del geómetra aleman para espresar analíticamente la circunstancia de ser comun el año $(A+1)$.

El silencio notable de Cresy sobre $a>6$, y el haber adoptado $a<12$, inducen á sospechar vehementemente que tambien creyó, como Ciccolini, en el pretendido yerro de imprenta. Mas lo que interesa sobre todo es dejar fuera de duda que se equivocaron ambos, y que la verdad está en lo que dicen Petan, Gauss, Zach y yo con ellos (*).

(*) Puede añadirse el Sr. Litrovo en su *Calendarografía* ya citada (página 114).

Para el efecto calculemos la Pascua de 1801, y obtendremos los siguientes resultados.

$$A=5561;\ p=15;\ \left(\frac{12p+17}{19}\right)_r=2;\ M'=17^d;\ m'=17^h\ 584^{hel.};\ f=1.$$

En este caso se verifican dos de las tres condiciones del *Gatrad;* pero siendo $p=15$, el año $(A+1)=5562$ será embolísmico, y por consiguiente no habrá *Gatrad*, segun Petan y Zach. Tampoco lo habrá segun Gauss, pues no resulta $\left[r''=\left(\frac{12p+17}{19}\right)_r\right]>6$. Pero lo habrá segun Cresy, porque es comun el año A, y tambien lo habrá segun Cresy y Ciccolini, porque $r''<12$.

Luego los primeros darán la Pascua judáica á

$\frac{17}{29}$ de marzo de 1801, feria 1, ó domingo. . . . . (α).

y los segundos á

$\frac{19}{31}$ de marzo de 1801, feria 3, ó martes. . . . . (β).

El año civil 5562 principiará segun los primeros á

$\frac{27\ de\ agosto}{8\ de\ setiembre}$ de 1801, feria 3, ó martes. . . . . (γ).

y segun Cresy y Ciccolini á

$\frac{29\ de\ agosto}{10\ de\ setiembre}$ de 1801, feria 5, ó jueves. . . . . (δ).

Para ver quiénes tienen razon, calculemos el principio de 5561 y 5563; en cuyo cálculo todos estamos conformes, y tendremos, adoptando el resultado (γ).

Principio de 5561; el $\frac{8}{20}$ de setiembre de 1800; $\varphi = 0$, sábado.

de 5562; el $\frac{27\ agosto}{8\ setiembre}$ de 1801; $\varphi = 5$, martes.

de 5565; el $\frac{15}{27}$ de setiembre de 1802; $\varphi = 2$, lunes.

Resulta el año 5561 comun y deficiente, ó de 353 dias.
5562 embolísmico ordinario, ó de 384 dias.

Veamos lo que resulta adoptando las reglas de Ciccolini, esto es, el principio (♂) de 5562.

Principio de 5561; el $\frac{8}{20}$ de setiembre de 1800; $\varphi = 0$, sábado.

5562; el $\frac{29\ de\ agosto}{10\ de\ setiembre}$ de 1801; $\varphi = 5$, jueves.

5565; el $\frac{15}{27}$ de setiembre de 1802; $\varphi = 2$, lunes.

Resulta el año 5561 comun y abundante, ó de 355 dias;
5562 de 382 dias;

y como no hay año judáico que conste de 382 dias, se sigue que los resultados (♂) y (♂) son absurdos; que los Sres. Cresy y Ciccolini son los equivocados; y que las escepciones están bien, tales como se han dado anteriormente, y como las dan todos los demas autores.

Además de esta equivocacion comun á ambos, hay otras peculiares á cada uno, y que deben advertirse porque se hallan insertas en la Correspondencia de Zach, que anda en manos de todo el mundo con justa celebridad.

Cresy dice (loc. cit.) que los judíos en los años embolísmicos intercalan despues del mes de *Adar* el de *Ve-Adar* ó segundo *Adar*, que es siempre (añade) de 30 dias. Lo que hacen los judíos en los años embolísmicos es añadir un dia al mes de *Adar*, con lo cual resulta de 30 dias, é intercalar á continuacion el *Ve-Adar*, siempre de 29.

El Sr. Ciccolini dice (tomo X, pág. 330) que las espresiones

$$\left(\frac{12A+17}{19}\right)_r , \left(\frac{7A+1}{19}\right)_r$$

dan respectivamente el número de años comunes y de años embolísmicos contenidos en A. Las verdaderas espresiones son las mismas, pero con el índice inferior e en vez del r.

Sustituyamos en la espresion de ϖ (56) los valores de y y de z tomados de la (54), y tendremos

$$\varpi = (marzo\ 58^d\ 11^h\ 204^{hel.})$$
$$- m. \left[\frac{12\left(\frac{A}{19}\right)_r + 17}{19}\right]_e$$
$$+ n. \left[\frac{7\left(\frac{A}{19}\right)_r + 1}{19}\right]_e$$
$$- (1^h\ 485^{hel.}) \left(\frac{A}{19}\right)_e .$$

Ciccolini en la página 332 da esta fórmula con el número (5); allí M es nuestra ϖ, pero su valor en el segundo miembro está equivocado, porque en vez de los verdaderos coeficientes de m y n pone respectivamente $\left(\frac{12A+17}{19}\right)_r$ y $\left(\frac{7A+1}{19}\right)_r$.

Esta no debió haber sido equivocacion de concepto, sino de copia, ó bien yerro de imprenta, porque las tablas (8) y (9) que calculó

Ciccolini sobre dicha fórmula, solo contienen errores de la última clase. Esta es la ocasion de hacer justicia al método de aquel geómetra, que es el mas breve de cuantos hasta ahora se han imaginado para hallar la Pascua judáica, y del cual nos hemos aprovechado, bien que deduciendo dichas tablas de consideraciones y métodos mas sencillos que el uso de la fórmula anterior.

Otro error que se debe evitar es el que se halla en la célebre obra *Art de vérifier les dates*, en donde se pone el mes de *Siwan* antes del de *Jiar*.

§. 6. *Aclaracion sobre el modo de llevar en cuenta la escepcion judáica Jah.*

La adicion hecha la primera vez por Gauss de 6^h al principio de la era judáica, en que le han seguido todos los analistas, facilita el cálculo de la Pascua disminuyendo las escepciones; esto es, reduciéndolas á tres en vez de cuatro, segun ya hemos insinuado en el párrafo 5; y sin alterar ni el dia de la Pascua ni por consiguiente el principio del año siguiente. La escepcion que resulta entonces de menos es la llamada por los judíos *Jah*. Nos proponemos hacer ver con toda claridad; 1.° que cuando se opera con las 6^h añadidas no hay necesidad de atender al *Jah;* 2.° que es muy facil determinar cuándo lo hay, á pesar de que no sea necesario este convencimiento en las operaciones prácticas. Dos ejemplos bastarán para conseguir el objeto.

Primero.

Se pide el dia de Pascua del año judáico 5583 y el principio de 5584.

Por las reglas del párrafo 4.° tendremos

$\left(\frac{A}{4}\right)_r = 5$; $\left(\frac{A}{19}\right)_c = 295$, $\left(\frac{A}{19}\right)_r = p = 16$; $\varpi = marzo\ 15^d\ 1^h\ 280^{hel.}$,

$f = 5$,

$B = 1825$.

Y como no se verifica ninguna de las tres escepciones de dicho párrafo, tendremos

Pascua de 5585 el $\frac{15}{27}$ de marzo de 1825. . . . . $\varphi = 5$, jueves.

Principio de 5584 el $\frac{25\ agosto}{6\ setiembre}$ de 1825. . . . . sábado.

Segun el cálculo judáico se tendria un valor de ϖ 6^h menor; esto es,

$\varpi = marzo\ \ 14^d\ 19^h\ 280^{hel.}$ . . . . . feria 4

$+ 165$

Primera Neomenia astronómica de 5584.. $= marzo\ \underline{177}^d\ 19^h\ 280^{hel.}$ . . . . . feria 6.

Aquí hay á un mismo tiempo *Jah* y *Adu;* el primero porque el quebrado de dia pasa de 18^h; el segundo porque la feria 6 no es *Kebia*. Luego es preciso añadir un dia al 177 de marzo para obtener el principio del año civil, y este resultará á $\frac{25\ de\ agosto}{6\ de\ setiembre}$ 1825, sábado, como hallamos antes.

Segundo ejemplo.

Antes se halló el dia de Pascua de 5600 y el principio de 5601; obtuvimos por el método de este escrito,

$\varpi = marzo\ 56^d\ 0^h\ 205^{hel.}$ . . . . . $f = 6$

:

Hay *Adu*, y por consiguiente

Pascua de 5600, el $\frac{6}{18}$ de abril de 1840. . . . sábado.

Principio de 5601, el $\frac{16}{28}$ de setiembre de 1840. . lunes.

El cálculo judáico hubiera dado, como siempre, 6^h menos en el valor de ϖ; esto es,

ϖ = *marzo* $35^d\ 18^h\ 203^{hel.}$. . . feria 5.

$+163$

Principio astronómico de 5601 *marzo* $198^d\ 18^h\ 203^{hel.}$. . . sábado.

Hay *Jah*, porque el quebrado de dia pasa de 18^h, y por consiguiente debe añadirse un dia; mas como esta adicion lleva el principio del año á la feria 1, ó domingo, que no es *Kebia*, hay *Adu*, y es preciso pasar al lunes siguiente, esto es, al 200 de marzo. Luego:

Principio del año civil 5601 á $\frac{16}{28}$ de setiembre de 1840, segun antes habíamos hallado con mayor sencillez.

Los dias de desecho en este caso son dos, uno por el *Jah* y otro por el *Adu*. No hay mas diferencia entre los dos procedimientos sino la de que en el primero no se advierte á primera vista el *Jah*. Pero ademas de que el conocimiento de los dias de *desecho* no es necesario cuando sin él se determina bien el resultado, es facil ver que hay *Jah* siempre que por el método dado en este escrito resulta $m' < 6^h$. En el primero de los ejemplos que acabamos de presentar, tenemos

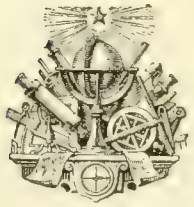
$$m' = 1^h\ 280^{hel.},$$

y por tanto hay *Jah*, aunque no se deba hacer mérito de él para nada. En el segundo

$$m' = 0^h\,203^{hel.};$$

hay tambien *Jah*, del cual no se hace caso; y hay *Adu*, porque $f=6$. el cual se lleva en cuenta.

Se ve claramente por estos dos ejemplos, que en un mismo año pueden concurrir, ó no, el *Jah* y el *Adu*. El *Gatrad* conduce siempre al *Adu*, pero no puede concurrir con el *Jah*. El *Batu-thakpat* jamás puede concurrir con ninguna de las otras tres escepciones.



ELEMENTOS DE CRONOLOGÍA ANALÍTICA.

INDICE.

Capítulo i. *Nociones preliminares.*

Capítulo ii. *Del calendario juliano.*

§. 1. *Denominaciones generales que se seguirán fielmente en todo lo relativo á este calendario.*

§. 2. *Sobre la letra dominical.*

§. 3. *Ciclo solar.*

§. 4. *Indiccion romana.*

§. 5. *Aureo número y epacta.*

§. 6. *Pascua y demas fiestas movibles julianas.*

Capítulo iii. *Del calendario reformado ó gregoriano.*

§. 1. *Denominaciones.*

§. 2. *Correccion del año solar.*

§. 3. *Correccion del año lunar. Epactas.*

§. 4. *Pascua y demás fiestas movibles gregorianas.*

Capítulo iv. *Periodo juliano: lema general que ha de servir en los capítulos siguientes.*

Capítulo v. *De la era de Nabonasár.*

Capítulo vi. *Del calendario mahometano.*

§. 1. *Estructura de este calendario.*

§. 2. *Reduccion á espresiones analíticas.*

§. 3. *Reduccion de fechas mahometanas á fechas cristiano-julianas.*

§. 4. *Reduccion de fechas cristianas á mahometanas.*

Capítulo vii. *Del calendario judáico actual.*

Advertencias preliminares.

§. 1. *Estructura de este calendario.*

§. 2. *Espresiones analíticas.*

§. 3. *Pascua; fiesta del cordero; dias lícitos ó* Kebias; *dias ilícitos; principio del año civil; del religioso, etc.*

§. 4. *Reglas prácticas, problemas y ejemplos.*

§. 5. *Equivocaciones de autores célebres acerca de este calendario.*

§. 6. *Aclaracion sobre el modo de llevar en cuenta la escepcion* Jah.

TEORIA

sobre la resolucion general

DE LOS PROBLEMAS ALGEBRÁICOS

POR MEDIO DE LAS SERIES.

Por el Teniente Coronel graduado, Comandante efectivo y Capitan de Ingenieros retirado,

D. FRANCISCO MARRON.

INTRODUCCION.

Desde que los célebres Newton y Leibnitz establecieron los fundamentos de los cálculos diferencial é integral, la ciencia algebráica ó analítica nada tiene que desear en todo lo concerniente al planteo de los problemas, que tienen por objeto averiguar las relaciones de la cantidad. Descendiendo la teoría fecunda de estos cálculos á comparar los elementos que forman esta, llegan á establecerse fácilmente entre estos elementos las relaciones que exije la naturaleza de las cuestiones que es necesario desenvolver; y establecidas que sean, los mismos cálculos determinan los medios de llegar á conocer las que existen entre las magnitudes reales y finitas de las mismas cantidades. Asi que las cuestiones ó investigaciones mas difíciles, aquellas cuyo establecimiento se presenta del modo mas oscuro al entendimiento, y que al primer aspecto juzgaria este como un arcano profundo imposible de penetrar, se fundan y establecen con claridad y precision analizando la

composicion de los elementos de la cantidad, que es el objeto de estos prodigiosos cálculos. La geometría, la mecánica y todos los ramos en fin de las matemáticas, han recibido un desarrollo y adelantamiento que toca casi á la perfeccion, desde la aparicion de estos cálculos admirables: todas las cuestiones, sea de estension, de equilibrio ó de movimiento, por intrincadas é inasequibles que aparezcan, se plantean fácilmente por su medio, y no hay secreto tan profundo y oscuro en estas ciencias que no ofrezcan los medios de penetrar y aclarar.

Mas si la ciencia algebráica nada tiene que desear como se ha dicho en la parte concerniente al planteo de los problemas, le falta aún muchísimo que conseguir en la parte que concierne á su resolucion. Un solo medio existe en la ciencia, genérico y aplicable á toda clase de cuestiones, que es el de las series; y aun las consecuencias todas que emanan del cálculo diferencial de que hemos hecho mencion, proceden de la propiedad general que existe en toda funcion ó relacion cualquiera de una cantidad respecto á otra, de ser desarrollada en una serie indefinida segun la ley que determina el mismo cálculo. Mas á pesar de todo, las series no han sido miradas por los analistas con toda la consideracion que merece su importancia, ni se han ocupado en establecer y perfeccionar la marcha general contenida en ellas, para llegar á obtener la resolucion de un problema cualquiera. Algunos aun las han despreciado, sea por la dificultad de obtener sus valores, cuando no son convergentes, ó sea por la complicacion que arrastran consigo las operaciones que con ellas hayan de ejecutarse. Este desvío sería disculpable si existiese otro medio, aun cuando fuera imperfecto, para obtener la resolucion de los problemas; pero cuando no existe, cuando es el solo y único que puede encaminar á este objeto, y cuando el número de casos en que puede obtenerse la espresion de una cantidad bajo forma finita es muy limitado, asi como muy escasos aquellos en que pueden ejecutarse las operaciones indicadas en las ecuaciones que establece el planteo de un problema sin el recurso de ellas, y cuando para cada cuestion particular con pocas escepciones, es necesario inventar la marcha que ha de conducir á su discusion, marcha que desde luego que ofrecen alguna complicacion se hace inasequible, fuerza

es conceder al método de las series la importancia que como medio general le pertenece, y fuerza es dedicarse al objeto de perfeccionarlo y simplificarlo, á fin de obtener para todas las investigaciones de la ciencia una marcha segura y asequible, que pueda conducir al fin que se proponen. Las series son consideradas por algunos analistas como la representacion algebráica de las cantidades á que se refieren. Cuando la relacion de una cantidad respecto á otra es tal, que puede representarse ó contenerse en un polinomio de determinado número de términos, en los que únicamente se contengan radicales y potencias de la segunda, la cantidad de que se trata tiene una representacion algebráica finita; mas cuando esta circunstancia no tiene lugar, puede sin embargo siempre representarse la relacion de una á otra de dichas cantidades por medio de un polinomio que conste de infinito número de términos sujetos á cierta ley, y en tal caso la representacion algebráica de la cantidad que nos ocupa viene dada en una serie indefinida. Consecuencia de este carácter de las series es, que es posible ejecutar con ellas todas las operaciones que exija un cálculo cualquiera; ellas pueden multiplicarse, dividirse, elevarse á potencias, y asimismo pueden diferenciarse é integrarse fácilmente; por lo tanto es posible representar bajo la misma forma indefinida que las caracteriza, las relaciones contenidas en una ecuacion cualquiera, cuyos miembros contengan operaciones indicadas por algoritmos de cualquier género.

En la resolucion de un problema cualquiera entran tres especies de cantidades: 1.° aquellas que constituyen los datos del problema, á que se da generalmente el nombre de *parámetros;* 2.° aquellas cuya magnitud se desea conocer, espresada por medio de las que anteceden, y son las *incógnitas* del problema; y 3.° entran otras cantidades que es necesario introducir en la cuestion para ligar las relaciones de las primeras á las segundas que hemos mencionado, y las que se hace preciso eliminar ó hacer desaparecer de las ecuaciones que contienen las relaciones del problema en el curso del cálculo. Las operaciones que se ejecutan para efectuar esta eliminacion, y obtener el valor de las incógnitas en funcion de los datos ó cantidades conocidas, es lo que constituye la marcha general que conduce á la resolucion de un

problema cualquiera. En el estado actual de la ciencia, la ejecucion de estas operaciones, asi como el establecimiento de las series contenidas en las ecuaciones primitivas, cuando es preciso obtenerlas por medio de la igualacion de los coeficientes algebráicos que afectan las mismas potencias de una misma variable, es de todo punto impracticable en general. Con efecto, dichos coeficientes algebráicos y las ecuaciones que proceden de su igualacion, se van multiplicando en el número de términos que contienen, á medida que su órden en la serie, ó que el esponente de la variable aumenta, de modo que al 6.° ó 7.° término llegan ya á contener cientos de los mismos: por lo tanto ¿cómo practicar las sustituciones, los despejos y reducciones en ecuaciones que constan de polinomios tan crecidos? Tal vez esta dificultad ha hecho que las series no hayan llegado á mirarse con toda la atencion debida. Por esta causa, en el trabajo que vamos á esponer nos hemos dedicado al objeto de conseguir el establecimiento y cálculo de los coeficientes de las series, ordenados segun las potencias de las diversas cantidades indeterminadas que entran en su composicion, por medio de simples operaciones aritméticas que proceden de la formacion genérica del término general. Por este medio pueden establecerse tablas que contengan los coeficientes de las series primitivas, y ejecutando sobre estas tablas otras operaciones aritméticas referentes á las operaciones que sea necesario ejecutar para la eliminacion y despejo de las incógnitas, podrá caminarse asi de unas tablas á otras hasta obtener el resultado final, que será el valor de la incógnita en una serie ordenada por las potencias de los datos ó parámetros del problema: esta serie será sumable si la naturaleza del problema la constituye tal, en otros casos dará á conocer la ley de sus términos, y en todos ofrecerá términos de comparacion que se refieran á las magnitudes de la incógnita. Para conseguir este objeto, nos ha sido preciso resolver algunos problemas fundamentales que no hemos visto en los autores que hemos manejado, ni tenemos noticia de que hasta ahora existan en la ciencia, como son los de sustitucion é inversion de las series; é inferido de nuestra teoría algunas otras fórmulas y consecuencias, que no dudamos puedan aún ampliarse ó simplificarse, si una vez llegadas al conoci-

miento de los hombres doctos y laboriosos que cultivan la ciencia, juzgan de interés para la misma el continuarlas y aumentarlas.

En consecuencia pues de lo que llevo espuesto, espero que la Academia Real de Ciencias, á quien tengo el honor de presentar este trabajo, lo mirará con benevolencia, y me dispensará de la atencion en que pueda distraerla, teniendo en cuenta el fin que me ha guiado al dedicarme á su confeccion, que no ha sido otro que el de consagrar mis esfuerzos á una ciencia tan importante, como que es la fundamental de todos los ramos de las matemáticas. Voy por lo tanto á esponer mi doctrina en los capítulos siguientes.

CAPITULO I.

De la elevacion de las series á potencias.

1.° Sea dado un cierto número de cantidades compuestas de varios sumandos, y multiplicadas unas por otras $(A+A'+A''\ldots\ldots+A.^{(h)})\ (A_{,}+A'_{,}+A''_{,}\ldots\ldots A_{,}^{(h')})\ (A_{2}+A'_{2}+A''_{2}\ldots A_{2}^{(h'')})$+&c., el producto se compondrá de la suma de todos los productos particulares de los sumandos entre sí combinados de todas las maneras posibles. Asi como en los tratados de la ciencia algebráica se halla adoptado el signo Σ para indicar la suma de varias cantidades sujetas á una misma ley ó condicion, adoptemos igualmente el signo P para denotar el producto de cantidades sujetas á las mismas circunstancias. La propiedad que acabamos de enunciar podrá escribirse como se halla en la ecuacion (1), en la cual h k se suponen cantidades variables, de las que la una indica la ley de las cantidades A con respecto á los sumandos, y la otra la ley de las mismas cantidades con respecto á los factores: en tal concepto el primer miembro de la ecuacion (1) indica el producto de las sumas de cantidades sujetas á la ley k, y el segundo la suma de todos los productos distintos que se pueden formar

con las diferentes cantidades $A^{(h)}$. Esta ecuacion manifiesta que en tal concepto los signos Σ y P pueden anteponerse ó posponerse.

2.° Tratemos ahora de elevar á una potencia cualquiera una suma de cantidades

$$(A+A'+A''...+A^{(h)})^m,$$

y para el efecto considerarémos primeramente que no existen mas que dos $A+A'$; desarrollando la potencia m de este binomio, será

$$(A+A')^m=A^m+mA^{m-1}A'...+\frac{m(m-1...(m-R+1)}{2.3...R}\times A^{m-R}A'^R+\&c.$$

Si en esta espresion suponemos que A' se convierte en $A'+A''$, A'^R se convertirá en $(A'+A'')^R$, y el término general de este nuevo binomio introducido en el anterior, dará con toda generalidad el que corresponde á la potencia $(A+A'+A'')^m$; será pues el término general de esta

$$\frac{m(m-1)...(m-R+1)}{2.3...R}\times\frac{R(R-1)...(R-R'+1)}{2.3...R'}\times A^{m-R}A'^{R-R'}A''^{R'}.$$

Observando que en el numerador y denominador se destruyen los factores comprendidos entre R y $R-R'$, la espresion anterior se reduce á

$$\frac{m(m-1)...(m-R+1)}{2.3...(R-R')\times 2.3...R'}\times A^{m-R}A'^{R-R'}A''^{R'}.$$

Si suponemos nuevamente que A'' se convierte en $A''+A'''$, y combinamos el término general de la potencia $(A''+A''')^{R''}$ con el anterior, se convertirá este en

$$\frac{m(m-1)...(m-R+1)}{2.3...(R-R')\times 2.3...R'}\times\frac{R'(R'-1)...(R'-R''+1)}{2.3...R''}\times$$

$$A^{m-R}A'^{R-R'}A''^{R'-R''}A'''^{R''};$$

y destruyendo del mismo modo los factores comunes comprendidos entre R' y $R'-R''$, queda reducido á

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-R+1)}{2.3\ldots(R-R')\times 2.3\ldots(R'-R'')\times 2.3\ldots R''}\times A^{m-R}A'^{R-R'}A''^{R'-R''}A'''^{R''}.$$

Continuando del mismo modo, y haciendo para abreviar

$$m-R=r,\ R-R'=r',\ R'-R''=r'',\ R''-R'''=r''',\ \&c.,$$

vendremos á parar en que la espresion del término general que buscamos es

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-R+1)}{2.3\ldots r'\times 2.3\ldots r''\times 2.3\ldots r'''\times \&c.}\times A^{m-R}A'^{r'}A''^{r''}A'''^{r'''}\times \&c.=$$

$$=\frac{2.3.4\ldots m}{2.3\ldots r\times 2.3\ldots r'\times 2.3\ldots r''\times \&c.}\times A^{r}A'^{r'}A''^{r''}A'''^{r'''}\times \&c.$$

Como la suma de los esponentes r, r', r'', &c. debe siempre ser igual al esponente m de la potencia que se considera, podemos designar cada uno con el signo $\triangle m$, y valiéndonos de los signos convenidos en el número anterior, establecer la ecuacion (2). Esta ecuacion hace ver que la potencia m de una suma de cantidades es igual al producto de los números naturales hasta el esponente m multiplicado por la suma de todos los productos distintos que pueden formarse con los sumandos elevados á todas las combinaciones posibles de esponentes, cuya suma sea siempre igual á m, y partido cada producto por los de los números naturales hasta los esponentes de sus factores.

3.° Si la potencia m fuese negativa,

$$(A+A'+A''\ldots+A^{(h)})^{-m}.$$

Volviendo á desarrollar como antes el binomio $A+A'$, será

$$(A+A')^{-m}=A^{-m}-mA^{-m-1}A'\ldots+\frac{-m(-m-1)\ldots(-m-R+1)}{2.3\ldots R}$$

$$A^{-m-R}A'^{R};$$

y suponiendo del mismo modo que A' se convierte en $A'+A''$, A'' en $A''+A'''$, &c., formaremos el término general

$$\frac{-m(-m-1)\ldots(-m-R+1)}{2.3\ldots r'\times 2.3\ldots r''\times 2.3\ldots r'''\times \&c.}\times\frac{A^{(h)r'}A^{(h')r''}A^{(h'')r'''}\times \&c.}{A^{m+R}}$$

ó bien escribiendo n en vez de R, cambiando los signos á todos los factores del numerador, advirtiendo que son en número de $R=n$, y reemplazando los esponentes r', r'', r''', &c., cuya suma es igual á $R=n$, por el signo $\triangle n$, resulta por fin la ecuacion (3), en la cual pudiendo asignarse á n un valor cualquiera, la suma de términos indicada por el signo Σ del segundo miembro es una serie indefinida.

Esta ecuacion (3) constituye la representacion mas general de la elevacion de una suma de cantidades á una potencia cualquiera, estendiéndose al caso en que el esponente m sea positivo, quebrado, ó de cualquier naturaleza, pues si fuese positivo, únicamente será preciso cambiarle el signo.

4.° Finalmente, si consideramos el producto de varias potencias

$$(A+A'+A''\ldots+A^{(h)})^m\times(A_1+A_1'+A_1''\ldots+A_1^{(h')})^{m_1}\times$$
$$(A_2+A'_2+A''_2\ldots+A_2{}^{(h'')})^{m_2}\times \&c.$$

Desarrollando cada una en particular, obtendremos el término general representado en la ecuacion (2), y efectuando despues la multiplicacion, el sumando ó término mas general se compondrá de una combinacion cualquiera de los términos representados por dicha ecuacion (2) correspondientes á cada una de las potencias, y podrá por lo tanto escribirse como lo está en la ecuacion (4).

Si varias de las potencias fuesen negativas, el término general correspondiente á cada una de estas vendrá representado en la ecuacion (3), y considerando que sea n la suma de las variables n', n'', &c., de estos términos generales, determinando asi el número de dimensiones de su producto, y designando dichas variables n', n'', &c., por los signos $\triangle' n$, $\triangle'' n$, &c., vendrá la espresion del término general representada en la ecuacion (5).

5.° Pasemos ahora á considerar el producto de varias series

$$(A+A'x+A''x^2...+A^{(h)}x^h+\&c.)\ (A+A'_{,}x+A''_{,}x^2...+ A_{,}^{(h')}x^{h'}+\&c.)\times\&c.,$$

el producto del término general que en el caso de una simple suma era $A^{(h)}\times A_{,}^{(h')}\times A_{2}^{(h'')}\times\&c.$, se convertirá ahora, atendido que en cada término viene x elevada á una potencia igual al número de acentos que afectan á las cantidades $A^{(h)}\,A_{,}^{(h')}$ &c., en

$$A^{(h)}\times A_{,}^{(h')}\times A_{2}^{(h'')}\&c.\times x^{h+h'+h''+\&c.}.$$

Luego si representamos por N la suma $h+h'+h''+\&c.$ que forma el esponente de x, y por el símbolo general $\triangle N$ cualquiera de los sumandos h, h', h'', &c., podrá establecerse la ecuacion (6). Esta ecuacion contiene en el segundo miembro la espresion del término general de la serie que resulta después de efectuar el producto de las propuestas, *el cual por lo tanto se compondrá de la suma de todos los productos distintos de los términos generales de estas, en que se verifique que la suma de las variables que indique el lugar de dichos términos en su respectiva serie, sea siempre igual al esponente* N *de* x *en el término que se considera de la resultante.*

6.° Tratándose de elevar á la potencia m la serie $A+A'x+A''x^2+\&c.$, observaremos que en el término general obtenido en el número (2) cuya espresion es

$$\frac{2.3.4...m}{2.3...r\times 2.3...r'\times 2.3...r''\times\&c.}\times A^{(h)r}A^{(h')r'}\,A^{(h'')r''}\times\&c.,$$

los factores $A^{(h)}$, $A^{(h')}$, &c. son ahora $A^{(h)}x^h$, $A^{(h')}x^{h'}$, &c., y por lo tanto su producto se convierte en

$$A^{(h)r}.\,A^{(h')r'}.\,A^{(h'')r''}\times\&c.\times x^{hr-h'r'+h''r''+\&c.}$$

Si pues se hace $hr+h'r'+h''r''+\&c.=N$, cada uno de los sumandos $hr, h'r'$, &c., puede significarse por el símbolo general $\triangle N$, asi como

cada uno de los esponentes r, r', r'', &c., cuya suma es igual al esponente m de la potencia, se significará por el símbolo $\triangle m$: adoptando esta escritura, las cantidades h, h', h'', &c. que indican el número de acentos, ó el lugar que el término general de la serie primitiva ocupa en ella, vendrán representadas por el cuociente $\frac{\triangle N}{\triangle m}$, el que deberá ser siempre un número entero. En su consecuencia, puede establecerse la fórmula (7), *en la cual la suma de productos indicada por el signo* Σ P, *se compondrá de la suma de todas las combinaciones distintas que se puedan obtener, tomando las combinaciones posibles de* $\triangle^s$ *de* N *y* m, *teniendo presente* (como se acaba de decir) *que el número de acentos representado por los cuocientes* $\frac{\triangle \mathrm{N}}{\triangle \mathrm{m}}$ *ha de ser siempre un número entero.*

7.° Si la potencia m es negativa, tomando del mismo modo el término general determinado en el número (3),

$$(-1)^R \times \frac{m(m+1)\ldots(m+R-1)}{2.3\ldots r' \times 2.3\ldots r'' \times \&c.} \times \frac{A^{(h')r'}.A^{(h'')r''}.A^{(h''')r'''} \times \&c.}{A^{m+R}},$$

el producto $A^{(h')r'}\,A^{(h'')r''}\,A^{(h''')r'''}\times$&c. se convierte, igualmente que cuando la potencia es positiva, en $A^{(h')r'}A^{(h'')r''}A^{(h''')r'''}$&c. $\times x^{h'r'+h''r''+h'''r'''+\&c.}$; y haciendo del mismo modo $h'r'+h''r''+h'''r'''+\&c.=N$, indicando cada sumando con el signo $\triangle N$, y los esponentes r', r'', r''', &c. con el signo $\triangle n$, en la suposicion de $R=n$, vendrá la fórmula (8), la cual comprende todos los casos, aun cuando m sea quebrado, positivo ó imaginario.

Debe advertirse que si en esta espresion se supone m positivo, se convierte en

$$\Sigma x^N \times \Sigma m\,(m-1)\ldots(m-n+1).A^{m-n} \times \Sigma\, P.\,\frac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n},$$

la cual es la misma que la (7), porque entrando en combinacion en el

signo ΣP de esta el término A^0, y pudiendo en consecuencia ser $\frac{\triangle N}{\triangle m}=0$, ó $\triangle N=0$, desaparecerá uno de los sumandos $h\,r$, debiendo el resto de ellos componer la cantidad N; mas subsistiendo el esponente $r=\triangle' m$, este habrá de sumarse con los demás para componer la cantidad m: si pues hacemos $r=m-n$, la suma de los demás esponentes será igual á n, y podrán representarse por el signo $\triangle n$. El segundo miembro de la ecuacion (7) tomará en consecuencia la forma

$$\Sigma x^N\times\Sigma 2.3...m\times\frac{A^{m-n}}{2.3...(m-n)}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)\triangle n}}{2.3...\triangle n}=$$

$$=\Sigma x^N\times\Sigma m(m-1)...(m-n+1).A^{m-n}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)\triangle n}}{2.3...\triangle n}$$

enteramente idéntica á la de la fórmula (8).

8.° Considerémos por fin el producto de varias series elevadas á distintas potencias y multiplicadas unas por otras, y como en la fórmula (8) relativa á las potencias negativas están comprendidas las positivas, haremos uso de ella suponiendo negativos todos los esponentes. Desarrollando cada serie en particular, dará un término general análogo al de la dicha fórmula (8). Suponiendo que sean N', N'', N''', &c. los esponentes de x en cada uno de estos términos generales, deberá suponerse $N'+N''+N'''+$&c. $=N$ para obtener todos los sumandos que multipliquen á una potencia determinada x^N; representando pues estos esponentes por el símbolo genérico $\triangle N$, sus diferencias $\triangle N'$, $\triangle N''$, &c., las representarémos por el símbolo tambien genérico $\triangle^2 N$; y asimismo, representando por n la suma de todo el número de factores ó de dimensiones comprendidas en los signos ΣP, siendo $\triangle' n$, $\triangle'' n$, &c. los comprendidos en cada producto particular, y últimamen-

te designando $m^{(\prime)}$ uno cualquiera de los esponentes, podrá escribirse abreviadamente la fórmula (9) con arreglo á los convenios adoptados.

9. Establecidas las bases precedentes, vamos á tratar ahora de las dobles potencias y productos combinados. Sea la serie

$$(a+a'x+a''x^2+a'''x^3\&c.)^m = A+A'x+A''x^2+A'''x^3+\&c.;$$

el término general $A^{(N)}$ tendrá por la fórmula (7) el valor

$$A^{(N)}=2.3...m\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta m}\right)\Delta m}}{2.3...\Delta m}:$$

elevando esta serie á una segunda potencia m' dará

$$(A+A'x+A''x^2+A'''x^3+\&c.)^{m'} = B+B'x+B''x^2+B'''x^3+\&c.$$

$$B^{(N)}=2.3...m'\Sigma P.\ \frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta m'}\right)\Delta m'}}{2.3...\Delta m'}.....(u)$$

Para obtener el valor de $B^{(N)}$ en funcion inmediata de los coeficientes de la série primitiva, será preciso sustituir por los factores $A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta m'}\right)}$ sus valores en funcion de dichos coeficientes. Estos valores son

$$A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta m'}\right)}=2.3...m\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta.\frac{\Delta N}{\Delta m'}}{\Delta m}\right)\Delta m}}{2.3...\Delta m}$$

$$=2.3...m\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta_2 N}{\Delta m\Delta m'}\right)\Delta m}}{2.3...\Delta m},$$

designando los acentos de los coeficientes a por el cuociente $\frac{\triangle^2 N}{\triangle m \triangle m'}$

en atencion á que cada parte ó diferencia en que se subdivide N deberá partirse por el producto $\triangle m \triangle m'$. Elevando esta ecuacion á la potencia $\triangle m'$, será

$$A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle m'}\right)\triangle m'} = (2.3...m)^{\triangle m'} \times \left(\Sigma\, P.\, \frac{a^{\left(\frac{\triangle_2 N}{\triangle m \triangle m'}\right)\triangle m'}}{2.3...\triangle m}\right)\triangle m$$

el signo $\Sigma\, P.$ indica una suma de cantidades, que debiendo elevarse á la potencia $\triangle m'$, podrá aplicárseles la fórmula (2), y será

$$\left(\Sigma\, P.\, \frac{a^{\left(\frac{\triangle^2 N}{\triangle m \triangle m'}\right)\triangle m}}{2.3...\triangle m}\right)\triangle m'$$

$$= 2.3...\triangle m' \times \Sigma\, P.\, \frac{a^{\left(\frac{\triangle^2 N}{\triangle m \triangle m'}\right)\triangle m \triangle^2 m'}}{(2.3...\triangle m)^{\triangle^2 m'} \times 2.3...\triangle^2 m'}:$$

sustituyendo en la espresion anterior, vendrá

$$A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle m'}\right)\triangle m'} = (2.3...m)^{\triangle m'} \times 2.3...\triangle m' \times$$

$$\Sigma\, P.\, \frac{a^{\left(\frac{\triangle^2 N}{\triangle m \triangle m'}\right)\triangle m \triangle^2 m'}}{2.3...\triangle m)^{\triangle^2 m'} \times 2.3...\triangle^2 m'}:$$

y finalmente, poniendo por $A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle m'}\right)\triangle m'}$ este valor en el de $B^{(N)}$, teniendo presente que $P.\ (2.3...m)^{\triangle m'} = (2.3...m)^{m'}$, y que el factor $2.3...\triangle m'$ se destruye en el numerador y denominador, vendrá

$$B^{(N)} = (2.3...m)^{m'} \times 2.3...m'. \times$$

$$\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^{2}N}{\Delta^{m}.\Delta^{m'}}\right)}\Delta m.\Delta^{2}m'}{(2.3...\Delta m)^{\Delta^{2}m'}\times 2.3...\Delta^{2}m'}.....(a).$$

Si desde luego hubiéramos elevado la série $a+a'x+a''x^2+a'''x^3+$&c. á la potencia $m\,m'$, hubiéramos obtenido

$$B^{(N)}=2.3...m\;m'\;\Sigma\;P.\;\frac{a^{\left(\frac{\Delta^{N}}{\Delta^{m\,m'}}\right)}\Delta m\,m'}{2.3...\Delta\,m\;m'}.....(b).$$

La diferencia de forma bajo la cual aparecen estas dos espresiones, proviene de que en la segunda están separadas, ó bien son distintas, las combinaciones de productos indicadas por el signo $\Sigma\,P$; en la primera no sucede lo mismo, por cuanto habiéndose de tomar todas las diferencias posibles de las primeras $\frac{\Delta'N}{\Delta'^{m'}}=H'$, $\frac{\Delta''N}{\Delta''^{m'}}=H''$, &c., para formar las segundas $\frac{\Delta^{2}N}{\Delta'm\Delta'^{m'}}=h'$, $\frac{\Delta'.N}{\Delta''m\Delta''^{m'}}=h''$, &c., vendrán diferencias segundas iguales que provengan de primeras que sean diferentes, y de aquí resultará que distintas combinaciones de productos $A^{(H')}\;A^{(H'')}$ &c., podrán dar una misma combinacion de los $a^{(h')}$, $a^{(h'')}$, &c. Se infiere, pues, que las combinaciones de estos se hallan repetidas varias veces, y que para determinar el coeficiente numérico total que multiplica cada combinacion distinta, es preciso verificar la suma de los coeficientes numéricos de los términos en que se halla repetida. Con el fin de analizar esta circunstancia, deduciendo las consecuencias á que da lugar, empezaremos por considerar el producto de dos séries elevadas á una misma potencia.

10. Sean las séries

$$(a+a'x+a''x^2+\&c.)^m(b+b'x+b''x^2+\&c.)^m=$$

$$=\left[(a+a'x+a''x^2+\&c.)\ (b+b'x+b''x^2+\&c.)\right]^m:$$

si verificamos el producto indicado en el segundo miembro, su término general será

$$B^{(H)}=\Sigma a^{(\Delta' H)}\ b^{(\Delta'' H)}$$

y quedará en él la série $(B+B'x+B''x^2+\&c.)^m$, cuyo término general es $A^{(N)}=2.3...m\ \Sigma\ P.\dfrac{B^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta m}\right)}\Delta m}{2.3...\Delta m}$, en el cual se tiene

$$B^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta m}\right)}=\Sigma a^{\left(\Delta'.\frac{\Delta N}{\Delta m}\right)}.\ b^{\left(\Delta''.\frac{\Delta N}{\Delta m}\right)}=\Sigma a^{\left(\frac{\Delta' 2N}{\Delta m}\right)}.\ b^{\left(\frac{\Delta'' 2N}{\Delta m}\right)}$$

$$B^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta m}\right)\Delta m}=2.3...\Delta m\ \Sigma\ P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta' 2N}{\Delta m}\right)\Delta^2 m}\times b^{\left(\frac{\Delta'' 2N}{\Delta m}\right)\Delta^2 m}}{2.3...\Delta^2 m}$$

sustituida esta espresion en el valor de $A^{(N)}$ suprimiendo el factor $2.3...\Delta m$, da

$$A^{(N)}=2.3...m\ \Sigma\ P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta' 2N}{\Delta m}\right)\Delta^2 m}\times b^{\left(\frac{\Delta'' 2N}{\Delta m}\right)\Delta^2 m}}{2.3...\Delta^2 m}.....(a).$$

Si determinamos separadamente el término general de cada una de las dos séries $(a+a'x+a''x^2+\&c.)^m$ y $(b+b'x+b''x^2+\&c.)^m$, estos serán

$$B_1^{(II)} = 2.3...m \Sigma P. \frac{a^{\left(\frac{\Delta^{II}}{\Delta^m}\right)} \Delta m}{2.3... \Delta m},$$

$$B_2^{(II)} = 2.3...m \Sigma P. \frac{b^{\left(\frac{\Delta^{II}}{\Delta^m}\right)} \Delta m}{2.3... \Delta m};$$

y efectuando despues el producto, su término general será

$$A^{(V)} = \Sigma B_1^{(\Delta' V)} B_2^{(\Delta'' V)} = (2.3...m)^2 \times$$

$$\Sigma P. \frac{a^{\left(\frac{\Delta'^{2V}}{\Delta^m}\right)} \Delta m}{2.3... \Delta m} \times \Sigma P. \frac{b^{\left(\frac{\Delta''^{2V}}{\Delta^m}\right)} \Delta m}{2.3... \Delta m}:$$

En esta segunda espresion del valor de $A^{(V)}$ están separadas, ó bien son distintas, las combinaciones de productos relativas á los factores $a^{(h)}, b^{(h)}$ mientras que en la anterior (a) no sucede lo mismo, pues como pueden venir unos mismos acentos para los factores $a^{(h)}, b^{(h)}$, de tomar las segundas diferencias en los $B^{(II)}$, aunque estos sean distintos, resulta que una combinacion dada de los factores $a^{(h)}, b^{(h)}$, puede provenir de varias combinaciones diferentes de los factores $B^{(II)}$, y por lo tanto se hallará repetida varias veces en la espresion (a) de $A^{(V)}$. Tratemos, pues, de indagar de cuántas combinaciones primitivas de factores $B^{(II)}$, puede provenir una misma de los factores $a^{(h)}, b^{(h)}$, en dicha espresion (a), y en consecuencia, qué número de coeficientes numéricos

deberán sumarse para obtener el total que corresponde en ella á cada combinacion distinta de factores.

Supongamos al efecto un producto de cuatro factores

$$a^{(h')'m} \times a^{(h'')\Delta''m} \times b^{(h_{,})\Delta_{,}m} \times b^{(h_{,,})\Delta_{,,}m}$$

en el que se verifican las tres ecuaciones

$$h' \times \Delta' m + h'' \times \Delta'' m + h_{,} \Delta_{,} m + h_{,,} \Delta_{,,} m = N,$$
$$\Delta' m + \Delta'' m = m, \ \Delta_{,} m + \Delta_{,,} m = m.$$

Si dividimos la diferencia $\Delta' m$ en dos $\Delta' \Delta' m$, $\Delta'' \Delta' m$, y restamos cada una de los esponentes $\Delta_{,} m$, $\Delta_{,,} m$, la suma de los dos resíduos deberá ser igual á $\Delta'' m$, pues esta operacion equivale á restar toda la $\Delta' m$ de la cantidad m. Verificándola, pues, los cuatro factores anteriores se descompondrán en los ocho siguientes:

$$a^{(h)\Delta'\Delta'^m} . \ b^{(h_{,,})\Delta'\Delta'^m} \times a^{(h')\Delta''\Delta'^m} . \ b^{(h_{,})\Delta''\Delta'^m},$$
$$a^{(h'')\Delta_{,,}m - \Delta'\Delta'^m} \times b^{(h_{,,})\Delta_{,,}m - \Delta'\Delta'^m}$$
$$a^{(h'')\Delta_{,}m - \Delta''\Delta'^m} \times b^{(h_{,})\Delta_{,}m - \Delta''\Delta'^m},$$

en que la suma de cada dos esponentes, que lleva un mismo factor $a^{(h')}$, $a^{(h'')}$, $b^{(h_{,})}$, ó $b^{(h_{,,})}$, producen los esponentes $\Delta' m$, $\Delta'' m$, $\Delta_{,} m$ ó $\Delta_{,,} m$, que le afectaban en el producto anterior. Esto supuesto, siendo $B^{(H)} = \Sigma a^{(\Delta' H)} b^{(\Delta'' H)}$, al elevar $B^{(H)}$ á una potencia cualquiera, ha de producir en sus términos, dimensiones y esponentes iguales para los factores $a^{(\Delta' H)} b^{(\Delta'' H)}$, y contendrá siempre un término en que $a^{(\Delta' H)} b^{(\Delta'' H)}$ estén elevados al mismo esponente de la potencia; así, pues, $B^{(H)\Delta^m}$ contendrá un término de la forma $a^{(\Delta' H)\Delta^m} . \ b^{(\Delta'' H)\Delta^m}$, y recíprocamente un término $a^{(h')\Delta^m}$, $b^{(h_{,})\Delta^m}$ podrá considerarse que proviene de un factor primitivo $B^{(h'+h_{,})\Delta^m}$. En consecuencia, pues, los cuatro dobles factores del producto anterior, cuyos esponentes de cada par se han hecho iguales, podrán en general provenir de los cuatro factores primitivos

$$B^{(h'+h_{,,})\Delta'\Delta'^{m}} \times B^{(h'+h_{,})\Delta''\Delta'^{m}} \times B^{(h''+h_{,,})\Delta_{,,}{}^{m}-\Delta'\Delta'^{m}} \times B^{(h''+h_{,})\Delta_{,}{}^{m}-\Delta''\Delta'^{m}}.$$

Resulta de aquí, que tomando todos los valores posibles para las diferencias $\Delta'\Delta'm$, $\Delta''\Delta'm$ del esponente $\Delta'm$ supuesto el menor, cada uno de estos valores produce un producto primitivo diferente, y por lo tanto, el que consideramos habrá sido producido por tantas combinaciones de primitivos cuantos sean los valores que puede tener $\Delta'\Delta'm$, y su coeficiente se compondrá de la suma de los que produzca cada combinacion; estos son los dados en la fórmula (a), haciendo en ella $\Delta^{2}m = \Delta m$, en atencion á que solo se toman los primeros términos de las potencias $B^{(II)\Delta^{m}}$, ó bien en la espresion de $A^{(y)}$ en funcion de los factores $B^{(II)}$ que antecede á esta fórmula. La espresion, pues, de su suma será

$$2.3...m\Sigma \frac{1}{2.3...\Delta'\Delta'm \times 2.3...\Delta''\Delta'm \times 2.3...(\Delta_{,,}m - \Delta'\Delta'm)} \times \frac{1}{2.3...(\Delta_{,}m - \Delta''\Delta'm)},$$

y el coeficiente obtenido de este modo debe ser precisamente igual al obtenido en la fórmula (b), que es

$$\frac{(2.3...m)^{2}}{2.3...\Delta'm \times 2.3...\Delta''m \times 2.3...\Delta_{,}m \times 2.3...\Delta_{,,}m}.$$

Si suponemos un producto de mayor número de factores

$$a^{(h')\Delta'^{m}}\, a^{(h'')\Delta''^{m}}\, a^{(h''')\Delta'''^{m}} \times ...\&c. \times b^{(h_{,})\Delta_{,}{}^{m}}\, b^{(h_{,,})\Delta_{,,}{}^{m}}\, b^{(h_{,,,})\Delta_{,,,}{}^{m}} \times ...\&c.$$

descompondremos el primer esponente $\Delta'm$ en un número parcial ó total de diferencias igual al de los factores $b^{(h_{,})\Delta_{,}{}^{m}}$, $b^{(h_{,,})\Delta_{,,}{}^{m}}$, &c., supon-

drémos que sea un número total, pues los parciales se deducen de él haciendo las diferencias respectivas iguales á 0. Verificado esto, el producto que consideramos se trasformará en el

$$a^{(h')}\Delta'\Delta'^{m}\,b^{(h_{,})}\Delta'\Delta'^{m}\times a^{(h')}\Delta''\Delta'^{m}\,b^{(h_{,,})}\Delta''\Delta'^{m}\times a^{(h')}\Delta'''\Delta'^{m}\,b^{(h_{,,,})}\Delta'''\Delta'^{m}\times \&c.$$
$$\times a^{(h'')}\Delta''^{m}.\ a^{(h''')}\Delta'''^{m}\times \&c.\ \times b^{(h_{,})}\Delta_{,}{}^{m}-\Delta'\Delta'^{m}.\ b^{(h_{,,})}\Delta_{,,}{}^{m}-\Delta''\Delta'^{m}\ .$$
$$b^{(h_{,,,})}\Delta_{,,,}{}^{m}-\Delta'''\Delta'^{m}\times \&c.$$

Volviendo á descomponer $\triangle''m$ en tantas diferencias cuantos factores $b^{(h_{,})}$ $b^{(h_{,,})}$ haya, obtendremos una nueva transformacion de este producto

$$a^{(h')}\Delta'\Delta'^{m}.\ b^{(h_{,})}\Delta'\Delta'^{m}\times a^{(h')}\Delta''\Delta'^{m}.\ b^{(h_{,,})}\Delta''\Delta'^{m}\times a^{(h')}\Delta'''\Delta'^{m}.b^{(h_{,,,})}\Delta'''\Delta'^{m}\times \&c.$$
$$a^{(h'')}\Delta'\Delta''^{m}.b^{(h_{,})}\Delta'\Delta''^{m}\times a^{(h'')}\Delta''\Delta''^{m}.b^{(h_{,,})}\Delta''\Delta''^{m}\times a^{(h'')}\Delta'''\Delta''^{m}.b^{(h_{,,,})}\Delta'''\Delta''^{m}\times \&.$$
$$a^{(h''')}\Delta'''^{m}\times \ldots \&c.\times b^{(h_{,})}\Delta_{,}{}^{m}-\Delta'\Delta'^{m}-\Delta'\Delta''^{m}.\ b^{(h_{,,})}\Delta_{,,}{}^{m}-\Delta''\Delta'^{m}-\Delta''\Delta''^{m}\ .$$
$$b^{(h_{,,,})}\Delta_{,,,}{}^{m}-\Delta'''\Delta'^{m}-\Delta'''\Delta''^{m}\times \&c.;$$

y continuando del mismo modo, el último esponente $\triangle^{(r)}m$ del factor $a^{(h^{(r)})}$ será igual á la suma de todos los esponentes que resten afectando á los factores $b^{(h_{,})}$, $b^{(h_{,,})}$, &c., y descomponiéndole en tantos sumandos cuantos sean estos, vendrá por último

$$a^{(h')}\Delta'\Delta'^{m}.\ b^{(h_{,})}\Delta'\Delta'^{m}\times a^{(h')}\Delta''\Delta'^{m}.\ b^{(h_{,,})}\Delta''\Delta'^{m}\times a^{(h')}\Delta'''\Delta'^{m}.$$
$$b^{(h_{,,,})}\Delta'''\Delta'^{m}\times \ldots \&c.$$

$$a^{(h'')}\Delta'\Delta''^{m}.\ b^{(h_{,})}\Delta'\Delta''^{m}\times a^{(h'')}\Delta''\Delta''^{m}.\ b^{(h_{,,})}\Delta''\Delta''^{m}\times a^{(h'')}\Delta'''\Delta''^{m}.$$
$$b^{(h_{,,,})}\Delta'''\Delta''^{m}\times \ldots \&c.$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a^{(h^{(r)})}\Delta_{,}{}^{m}-\Delta'\Delta'^{m}-\Delta'\Delta''^{m}-\&c.\times b^{(h_{,})}\Delta_{,}{}^{m}-\Delta'\Delta'^{m}-\Delta'\Delta''^{m}-\&c.$$

$$a^{(h^{(r)})}\Delta_{,,}{}^{m}-\Delta''\Delta'^{m}-\Delta''\Delta''^{m}-\&c.\times b^{(h_{,,})}\Delta_{,,}{}^{m}-\Delta''\Delta'^{m}-\Delta''\Delta''^{m}-\&c.$$

&c., &c., &c., &c., &c.,

:

cuyo primitivo será

$$B^{(h'+h_{,})\Delta'\Delta'^{m}} \times B^{(h'+h_{,,})\Delta''\Delta'^{m}} \times B^{(h'+h_{,,,})\Delta'''\Delta'^{m}} \times \ldots\ldots \text{ \&c.}$$
$$B^{(h''+h_{,})\Delta'\Delta''^{m}} \times B^{(h''+h_{,,})\Delta''\Delta''^{m}} \times B^{(h''+h_{,,,})\Delta'''\Delta''^{m}} \times \ldots \text{ \&c.}$$

. . . . . .
. . . . . .

$$B^{\left(h^{(r)}+h_{,}\right)\Delta_{,}m-\Delta'\Delta'm-\Delta'\Delta''m-\text{\&c.}}$$
$$\times\, B^{\left(h^{(r)}+h_{,,}\right)\Delta_{,,}m-\Delta''\Delta'm-\Delta''\Delta''m-\text{\&c.}} \times \ldots \text{ \&c.,}$$

y la suma de coeficientes vendrá representada por la espresion

$$2.3\ldots m\,\Sigma \frac{1}{2.3\ldots \Delta'\Delta'm \times 2.3\ldots \Delta''\Delta'm \times 2.3\ldots \Delta'''\Delta'm \times \text{\&c.}}$$
$$\times \frac{1}{2.3\ldots \Delta'\Delta''m \times 2.3\ldots \Delta''\Delta''m \times 2.3\ldots \Delta'''\Delta''m \times \text{\&c.}, \times \text{\&c.},}$$
$$\times \frac{1}{2.3\ldots (\Delta_{,}m-\Delta'\Delta'm-\Delta'\Delta''m-\text{\&c.})}$$
$$\times \frac{1}{2.3\ldots (\Delta_{,,}m-\Delta''\Delta'm-\Delta''\Delta''m-\text{\&c.})}$$
$$\times \frac{1}{2.3\ldots (\Delta_{,,,}m-\Delta'''\Delta'm-\Delta'''\Delta''m-\text{\&c.}) \times \text{\&c.}}$$

cuya suma deberá ser igual al coeficiente deducido de la fórmula (b), que es

$$\frac{(2.3\ldots m)^{2}}{2.3\ldots \Delta'm \times 2.3\ldots \Delta''m \times 2.3\ldots \Delta'''m \times \text{\&c.}}$$
$$\times \frac{1}{2.3\ldots \Delta_{,}m \times 2.3\ldots \Delta_{,,}m \times 2.3\ldots \Delta_{,,,}m \times \text{\&c.}, \times \ldots \text{ \&c.}} .$$

Observando atentamente la ley de los factores del denominador del coeficiente que antecede, se ve que de r en r, suponiendo que cada combinacion conste de este número, producen una suma fija que es respectivamente $\triangle' m$, $\triangle'' m$, $\triangle''' m$, y sumando ordenadamente los primeros, los segundos, los terceros, &c., de cada combinacion, producen tambien sumas fijas $\triangle_{,} m$, $\triangle_{,,} m$, $\triangle_{,,,} m$, &c., siendo iguales la suma total que se obtenga de un modo y la que se obtenga del otro. Luego si representamos por n', n'', &c., las sumas fijas de cada combinacion y por $n_{,}$, $n_{,,}$, $n_{,,,}$, &c., las que se obtienen sumando los primeros, segundos, terceros, &c., factores de las mismas, podremos escribir la fórmula (10), que da el término sumatorio de los factores variables $\frac{1}{2.3... \triangle n} \times \frac{1}{2.3... \triangle' n} \times$ &c., cuando entre ellos se verifiquen las condiciones establecidas.

Cuando las sumas $h'+h_{,}$, $h''+h_{,,}$, &c., de los acentos de los factores $a^{(h')}$, $a^{(h'')}$, $b^{(h_{,})}$, $b^{(h_{,,})}$ son iguales, en los productos primitivos se reducirán los factores, viniendo aquellos en que se verifique esta circunstancia elevados á esponentes que se compondrán de la suma de los que les corresponderían si fuesen diferentes; mas esto no altera en nada la forma de los resultados, significando solo que aquellos cuatro ó mas factores provienen de un solo primitivo $B^{(H)\triangle^m}$, porque como hemos visto al desarrollar la potencia de este, que el factor $2.3... \triangle m$ por el que viene dividido se destruye con el $2.3... \triangle m$ que multiplica la potencia, y quedan solo en el denominador los factores $2.3... \triangle^2 m$, que equivalen á los de los esponentes que se obtendrian si los factores $B^{(h)}$ fuesen diferentes; el resultado permanece el mismo.

11. Consideremos ahora un producto de tres series

$$(a+a'x+a''x^2+\&c.)^m \times (b+b'x+b''x^2+\&c.)^m \times (c+c'x+c''x^2+\&c.)^m$$

$$= \left[(a+a'x+a''x^2+\&c.)(b+b'x+b''x^2+\&c.)(c+c'x+c''x^2+\&c.)\right]^m.$$

La fórmula (*a*) del número anterior es en este caso

$$A^{(N)}=2.3...m\,\Sigma P.\frac{a^{(\frac{\Delta'^2 N}{\Delta^m})\triangle^2 m}.\,b^{(\frac{\Delta''^2 N}{\Delta^m})\triangle^2 m}.\,c^{(\frac{\Delta'''^2 N}{\Delta^m})\triangle^2 m}}{2.3...\triangle^2 m}...(a').$$

y la (*b*) del mismo número en que se hallan separados los factores es ahora

$$A^{(N)}=(2.3...m)^3\times\Sigma P.\frac{a^{(\frac{\Delta'^2 N}{\Delta^m})\triangle m}}{2.3...\triangle m}\times\Sigma P.\frac{b^{(\frac{\Delta''^2 N}{\Delta^m})\triangle m}}{2.3...\triangle m}$$

$$\times\Sigma P.\frac{c^{(\frac{\Delta'''^2 N}{\Delta^m})\triangle m}}{2.3...\triangle m}.....(b');$$

para determinar por el mismo camino el número de combinaciones primitivas que pueden producir una misma de los factores $a^{(h)}$, $b^{(h)}$, $c^{(h)}$, tomaremos un producto cualquiera que contenga seis de estos factores

$$a^{(h')}\triangle'^m.\,a^{(h'')}\triangle''^m\times b^{(h_{,})}\triangle_{,}{}^m.\,b^{(h_{,,})}\triangle_{,,}{}^m\times c^{('h)'}\triangle^m.\,c^{('')h)''}\triangle^m$$

y observarémos en él, que el factor $a^{(h')}$ se puede combinar de cuatro modos diferentes con los b y c de los otros productos, porque puede combinarse, 1.° con $b^{(h_{,,})}\,c^{('')h)}$, 2.° con $b^{(h_{,,})}\,c^{('')h)}$, 3.° con $b^{(h_{,})}\,c^{('')h)}$, y 4.° con $b^{(h_{,})}\,c^{('')h)}$. Será pues preciso dividir $\triangle' m$ en cuatro partes distintas $\triangle'\triangle' m$, $\triangle''\triangle' m$, $\triangle'''\triangle' m$, $\triangle^{IV}\triangle' m$ para verificar estas cuatro combinaciones, y el producto dado se descompondrá en el siguiente:

$$a^{(h')}\triangle'\triangle'^m.\,b^{(h_{,,})}\triangle'\triangle'^m.\,c^{('')h)}\triangle'\triangle'^m\times a^{(h')}\triangle''\triangle'^m.\,b^{(h_{,,})}\triangle''\triangle'^m.\,c^{('h)}\triangle''\triangle'^m$$
$$a^{(h')}\triangle'''\triangle'^m.\,b^{(h_{,})}\triangle'''\triangle'^m.\,c^{('')h)}\triangle'''\triangle'^m\times a^{(h')}\triangle^{IV}\triangle'^m.\,b^{('h_{,})}\triangle^{IV}\triangle'^m.\,c^{('')h)}\triangle^{IV}\triangle'^m$$
$$a^{(h'')}\triangle''^m\begin{cases}b^{(h_{,})}\triangle_{,}{}^m-\triangle'''\triangle'^m-\triangle^{IV}\triangle'^m.\,b^{(h_{,,})}\triangle_{,,}{}^m-\triangle'\triangle'^m-\triangle''\triangle'^m\\ c^{('')h)'}\triangle^m-\triangle''\triangle'^m-\triangle^{IV}\triangle'^m.\,c^{('')h)''}\triangle^m-\triangle'\triangle'^m-\triangle'''\triangle'^m.\end{cases}$$

Las cuatro primeras combinaciones provienen de los factores primitivos.

$$B^{(h'+h_{,,}+''h)}\triangle'\triangle'^{m}.\ B^{(h'+h_{,,}+''h)}\triangle''\triangle'^{m}.\ B^{(h'+h_{,}+''h)}\triangle'''\triangle'^{m}.\ B^{(h'+h_{,}+'h)}\triangle^{IV}\triangle'^{m},$$

y respecto á las restantes verificándose que la suma de los esponentes de $b^{(h_{,})}$, $b^{(h_{,,})}$ equivale á $m-\triangle' m=\triangle'' m$ del mismo modo que la suma de los esponentes de $c^{('h)}$, $c^{(''h)}$, dicha combinacion es por lo tanto idéntica á una de la forma

$$a^{(h'')n}\times b^{(h_{,})}\triangle_{,}{}^{n}\ b^{(h_{,,})}\triangle_{,,}{}^{n}\times c^{('h)'}\triangle^{n}.\ c^{(''h)''}\triangle^{n},$$

en la cual descomponiendo los cuatro factores desiguales en ocho que los contengan iguales dos á dos, como se ha practicado en el número anterior, podremos despues dividir n en cuatro partes ó diferencias agregando un factor $a^{(h'')}$ elevado á una de estas partes á cada combinacion, con lo cual obtendremos las de los productos primitivos

$$B^{(h''+h_{,,}+''h)}\times B^{(h''+h_{,}+''h)}\times B^{(h''+h_{,,}+'h)}\times B^{(h''+h_{,}+'h)}$$

que pueden producir los cinco factores que estamos considerando. Ahora bien, la suma total de coeficientes que corresponde á todas estas combinaciones, será la misma obtenida en el citado número anterior para el caso de dobles factores; luego restituyendo por n, $\triangle_{,}n$, $\triangle_{,,}n$, &c., las cantidades que representan dicha suma, será

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2.3...\triangle''m}{2.3...(\triangle_{,,}m-\triangle'\triangle'm-\triangle''\triangle'm)} \\ \times\dfrac{1}{2.3...(\triangle_{,}m-\triangle'''\triangle'm-\triangle^{IV}\triangle'm)} \\ \times\dfrac{1}{2.3...(''\triangle m-\triangle'\triangle'm-\triangle'''\triangle'm)} \\ \times\dfrac{1}{2.3...('\triangle m-\triangle''\triangle'm-\triangle^{IV}\triangle'm)} \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (a)$$

la cual debe combinarse con el coeficiente que proviene de los cuatro factores primitivos obtenidos anteriormente, que es

$$\frac{1}{2.3...\triangle'\triangle'm\times 2.3...\triangle''\triangle'm\times 2.3...\triangle'''\triangle'm\times 2.3...\triangle^{IV}\triangle'm}...(a').$$

Para hallar la suma de estas dos espresiones combinadas, observaremos que se obtendrán todas las combinaciones de cuatro diferencias en que puede dividirse la cantidad $\triangle'm$, dividiendo primeramente esta en dos partes ó diferencias que representaremos por h y h', y despues en cada combinacion de estas obteniendo todas las que resulten de dividirse h y h' en otras dos partes ó diferencias. Bajo de este supuesto, haciendo

$$\triangle'\triangle'm+\triangle''\triangle'm=h,\ \triangle'''\triangle'm+\triangle^{IV}\triangle'm=h',$$

podemos mirar á estas como constantes para todas las combinaciones que se refieren á un valor determinado de ellas, y despues considerarlas como variables para obtener la suma total de combinaciones. Haciendo pues esta suposicion, la espresion anterior se transforma en

$$\frac{2.3...\triangle''m}{2.3...(\triangle_{,,}m-h)\times 2.3...(\triangle_{,}m-h')\times 2.3...\triangle'\triangle'm\times 2.3...\triangle'''\triangle'm}$$

$$\times\frac{1}{2.3...('\triangle m-\triangle'\triangle'm-\triangle'''\triangle'm)\times 2.3...\triangle''\triangle'm\times 2.3...\triangle^{IV}\triangle'm}$$

$$\times\frac{1}{2.3...('\triangle m-\triangle''\triangle'm-\triangle^{IV}\triangle'm)}$$

quedan pues en el denominador seis factores variables, cuyas sumas dos á dos son constantes, y las sumas tres á tres lo son tambien; podrá por lo tanto aplicárselas la fórmula (10) y será

$$\frac{2.3...\triangle''m\times 2.3...m}{2.3...(\triangle_{,,}m-h)\times 2.3...(\triangle_{,}m-h')\times 2.3...''\triangle m\times 2.3...'\triangle m\times 2.3...h}$$

$$\times \frac{1}{2.3...h' \times 2.3...(m - \triangle' m = \triangle'' m)}$$

suprimiendo el factor comun $2.3...\triangle'' m$ quedan ya únicamente en el denominador cuatro factores variables, cuyas sumas dos á dos son igualmente constantes, y aplicándoles la misma fórmula (10) vendrá por último la suma total

$$\frac{(2.3...m)^2}{2.3...\triangle' m \times 2.3...\triangle'' m \times 2.3...\triangle_{,} m \times 2.3...\triangle_{,,} m \times 2.3...{}'\triangle m} \times \frac{1}{2.3...{}''\triangle m.}$$

Este resultado es enteramente idéntico al que se hubiera obtenido desde luego en la ecuacion (b'). Vemos pues que por medio de la fórmula (10) se reduce el término sumatorio de las triples combinaciones de factores al obtenido en (b'), y si considerásemos mayor número de estos, ó de series multiplicadas unas por otras, se llegaria al mismo resultado.

12. Establecidos estos principios, tratemos de desarrollar en serie la funcion

$$\left[B' + (a + a'x + a''x^2 + \&c.)\,(b + b'x + b''x^2 + \&c.)\right]^{-m} = (B' + ab + A'x + A''x^2 + \&c.)^{-m}$$

en que se supone ser $A^{(II)}$ el término general del producto de las dos series encerradas en la llave del primer miembro, siendo por lo tanto $A^{(II)} = \Sigma a^{(\triangle' II)} b.^{(\triangle'' II)}$. Si hacemos $B' + ab = B$, y llamamos en general $B^{(N)}$ el término general de la serie que nos proponemos determinar, se tendrá

$$B^{(N)} = \Sigma(-1)^n \times m(m+1)...(m+n-1) \times \frac{1}{B^{m+n}}\, \Sigma.P.\, \frac{A^{\left(\frac{\triangle^N}{\triangle^n}\right)\triangle n}}{2.3...\triangle n}.$$

Ahora bien, conteniéndose en este producto ΣP todas las combinaciones distintas posibles de los que pueden formarse con las letras $A'\,A''$, &c., acentuadas, resulta que al sustituir por dichas $A'\,A''$, &c., sus valores dados por el general $A^{(H)}$, obtendremos para las combinaciones distintas en $a^{(h)}$, $b^{(h)}$, sumas de coeficientes iguales á los que hemos obtenido en el número (10) que antecede; mas no conteniéndose en la suma de productos $\Sigma\,P$ de que tratamos, el coeficiente A°, en aquellas combinaciones que puedan producir este factor, será necesario restar de la suma total de coeficientes los relativos á las combinaciones en que entre dicho factor A°, el cual no existe.

Supongamos un producto de cuatro factores

$$a\Delta'^{n}.\ a^{(h'')}\Delta''^{n}\times b\Delta_{,}{}^{n}.\ b^{(h_{,,})}\Delta_{,,}{}^{n}:$$

para que este producto exista, no pudiendo combinarse a con b, pues produciría A°, es preciso que se tenga $\Delta_{,,}n>\Delta'n$, y de consiguiente $\Delta''n>\Delta_{,}n$, porque en este caso a se combinará con $b^{(h_{,,})}$; esta con el esceso de su esponente, se combinará con $a^{(h'')}$, y finalmente, esta con el resto de su esponente, se combinará con b. El producto dado se descompondrá pues en el siguiente:

$$a\Delta'^{n}\,b^{(h_{,,})}\Delta'^{n}\times a^{(h'')}\Delta_{,,}{}^{n-\Delta'n=\Delta''n-\Delta_{,}n}.\ b^{(h_{,,})}\Delta_{,,}{}^{n-\Delta'n}\times a^{(h'')}\Delta_{,}{}^{n}.\ b\Delta_{,}{}^{n},$$

y no admitiendo este producto otra descomposicion que esta, resulta que solo puede provenir de uno primitivo que la corresponde, y es

$$A^{(h_{,,})}\Delta'^{n}.\ A^{(h''+h_{,,})\Delta_{,,}{}^{n}-\Delta'^{n}}.\ A^{(h'')}\Delta_{,}{}^{n}$$

y el coeficiente que le pertenece es

$$\frac{1}{2.3...\Delta'n\times 2.3...\Delta_{,}n\times 2.3...(\Delta_{,,}n-\Delta'n)}.$$

Si hacemos $\Delta''n=n'$, $\Delta_{,,}n=n''$, vendrá $\Delta_{,,}n-\Delta'n=n'+n''-n$, y el coeficiente se trasformará en

$$\frac{1}{2.3...(n-n')\times 2.3...(n-n'')\times 2.3...(n'+n''-n)} =$$

$$= \frac{2.3...n'\times 2.3...n''}{2.3...(n-n')\times 2.3...(n-n'')\times 2.3...(n'+n''-n)\times 2.3...n'\times 2.3...n''}.$$

Este coeficiente que acabamos de obtener, se generaliza á todas las combinaciones distintas de factores $a^{(h)}\,b^{(h)}$, considerando que n', n'' representan las dimensiones de los productos en $a^{(h)}\,b^{(h)}$ acentuadas, siendo $n-n'$, $n-n''$ los esponentes de a y b, y sustituyendo en vez de los factores $2.3...n'$, $2.3...n''$, que vienen en el denominador, los relativos á los esponentes de dichas $a^{(h)}\,b^{(h)}$, que compongan cada producto.

Para hacerlo ver supongamos uno cualquiera

$$a\triangle^{\circ n}\,a^{(h')}\triangle'^{n}\,a^{(h'')}\triangle''^{n}\times...\&c.\times b\triangle_{\circ}{}^{n}\,b^{(h_{,})}\triangle_{,}{}^{n}.\;b^{(h_{,,})}\triangle_{,,}{}^{n}\times...\times,\&c.$$

Como no se puede combinar a con b, dividiremos, para obtener todas las combinaciones distintas posibles, el esponente $\triangle^{\circ}n$ en tantas partes cuantos esponentes $\triangle_{,}n$, $\triangle_{,,}n$, &c., existen, restando una de cada uno, y del mismo modo dividiremos $\triangle_{\circ}n$ en tantas partes cuantos esponentes $\triangle'n$, $\triangle''n$, &c., existen, restándolas del mismo modo. Se obtendrán los productos

$$a\triangle'\triangle^{\circ n}.\;b^{(h_{,})}\triangle'\triangle^{\circ n}\times\; a\triangle''\triangle^{\circ n}.\;b^{(h_{,,})}\triangle''\triangle^{\circ n}\times...\&c.$$
$$a^{(h')}\triangle'\triangle_{\circ}{}^{n}.\;b\triangle'\triangle_{\circ}{}^{n}\times a^{(h'')}\triangle''\triangle_{\circ}{}^{n}.\;b\triangle''\triangle_{\circ}{}^{n}\times...\&c.$$

y quedará la combinacion

$$a^{(h')}\triangle'^{n}-\triangle'\triangle_{\circ}{}^{n}a^{(h'')}\triangle''^{n}-\triangle''\triangle_{\circ}{}^{n}\times...\&c.$$
$$\times b^{(h_{,})}\triangle_{,}{}^{n}-\triangle'\triangle^{\circ n}.\;b^{(h_{,,})}\triangle_{,,}{}^{n}-\triangle''\triangle^{\circ n}\times...\&c.$$

de la cual habrá que obtener todos los productos primitivos diferentes para hallar la suma de coeficientes. Ahora bien, las sumas de esponentes de los factores $a^{(h)}$ y de los $b^{(h)}$ que entran en ella son

$$\Delta' n + \Delta'' n + \&c. - \Delta_{,} n = \Delta_{,} n + \Delta_{,,} n + \&c. - \Delta^{\circ} n = n - \Delta^{\circ} n - \Delta_{,} n,$$

y por consiguiente la suma de coeficientes producida por esta combinacion será

$$\frac{2.3\ldots(n-\Delta^{\circ} n-\Delta_{,} n)}{2.3\ldots(\Delta' n-\Delta'\Delta_{,} n)\times 2.3\ldots(\Delta'' n-\Delta''\Delta_{,} n)\times\ldots\&c.} \times \frac{1}{2.3\ldots(\Delta_{,} n-\Delta'\Delta^{\circ} n)\times 2.3\ldots(\Delta_{,,} n-\Delta''\Delta^{\circ} n)\times\&c.},$$

la cual deberá combinarse con el coeficiente que proviene de los productos separados anteriormente, que es

$$\frac{1}{2.3\ldots\Delta'\Delta^{\circ} n\times 2.3\ldots\Delta''\Delta^{\circ} n\times\ldots\&c.} \times \frac{1}{2.3\ldots\Delta'\Delta_{,} n\times 2.3\ldots\Delta''\Delta_{,} n\times\ldots\&c.}.$$

Como las diferencias $\Delta'\Delta_{,} n$, $\Delta''\Delta_{,} n$, &c., son enteramente independientes de las $\Delta'\Delta^{\circ} n$, $\Delta''\Delta^{\circ} n$; &c., podremos dividir la combinacion anterior en dos productos independientes y separados, y representarla del modo siguiente prescindiendo del numerador:

$$\Sigma \frac{1}{2.3\ldots\Delta'\Delta^{\circ} n\times 2.3\ldots\Delta''\Delta^{\circ} n\times\ldots\&c.\times 2.3\ldots(\Delta_{,} n-\Delta'\Delta^{\circ} n)} \times \frac{1}{2.3\ldots(\Delta_{,,} n-\Delta''\Delta^{\circ} n)\times\ldots\&c.}$$

$$\times\Sigma \frac{1}{2.3\ldots\Delta'\Delta_{,} n\times 2.3\ldots\Delta''\Delta_{,} n\times\ldots\&c.\times 2.3\ldots(\Delta' n-\Delta'\Delta_{,} n)} \times \frac{1}{2.3\ldots(\Delta'' n-\Delta''\Delta_{,} n)\times\ldots\&c.}$$

la suma de cada uno de estos productos nos es conocida, puesto que consta de dos combinaciones de factores, los cuales sumados dos á dos dan cantidades constantes, y las sumas de cada combinacion son tambien constantes; luego aplicándoles la fórmula (10) el producto anterior será

$$\frac{2.3...(\triangle_{,}n+\triangle_{,,}n+...\&c.)}{2.3...\triangle^{\circ}n\times 2.3...(n-\triangle^{\circ}n-\triangle_{\circ}n)\times 2.3...\triangle_{,}n\times 2.3...\triangle_{,,}n\times\&c.}$$

$$\times\frac{2.3...(\triangle' n+\triangle'' n+...\&c.)}{2.3...\triangle_{\circ}n\times 2.3...(n-\triangle^{\circ}n-\triangle_{\circ}n)\times 2.3...\triangle' n\times 2.3...\triangle'' n\times\&c.}$$

uno de los factores $2.3...(n-\triangle^{\circ}n-\triangle_{\circ}n)$ que vienen en el denominador, se destruirá con el del numerador de que hemos prescindido, y haciendo $\triangle' n+\triangle'' n+\&c.=n'$, $\triangle_{,}n+\triangle_{,,}n+\&c.=n''$, con lo que $\triangle^{\circ}n=n-n'$, $\triangle_{\circ}n=n-n''$, y $n-\triangle^{\circ}n-\triangle_{\circ}n=n'+n''-n$, vendrá la espresion que nos proponíamos hallar

$$\frac{2.3...n'\times 2.3...n''}{2.3...(n'+n''-n)\times 2.3...(n-n')\times 2.3...(n-n'')}$$

$$\times\frac{1}{2.3...\triangle' n' 2.3..\triangle.'' n'\times\&c.\times 2.3...\triangle' n''\times 2.3...\triangle'' n''\times\&c.}$$

en la cual se han convertido las diferencias $\triangle' n$, $\triangle'' n$,&c. en $\triangle' n'$, $\triangle'' n'$, &c., puesto que su suma es igual á n', y las diferencias $\triangle_{,}n$, $\triangle_{,,}n$, &c. en $\triangle' n''$, $\triangle'' n''$,&c., por la misma razon. En consecuencia pues puede establecerse la fórmula (11), y el término general de la espresion buscado será el (12).

13. Consideremos ahora la funcion

$$\left[B'+(a+a'x+a''x^2+\&c.)(b+b'x+b''x^2+\&c.)(c+c'x+c''x^2+\&c.)\right]^{-m}$$
$$=M+B'x+B''x^2+\&c.:$$

haciendo de la misma manera que en el número anterior $B'+abc=B$, y llamando $A^{(H)}$ el término general del producto de las tres series encerradas en la llave, se tendrá análogamente

$$A^{(H)}=\Sigma a^{(\Delta' H)}.\ b^{(\Delta'' H)}.\ c^{(\Delta''' H)}$$

$$B^{(Y)}=\Sigma(-1)^n\times m(m+1)\ldots(m+n-1)\times\frac{1}{B^{m+n}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^n}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n}$$

y se verificará del mismo modo, que en la suma de productos indicada por el signo $\Sigma P.$ entran en combinacion todos los factores A', A'', &c. escepto el A°. En el número (11) hemos hecho ver cómo se forman las sumas de coeficientes descomponiendo los productos $a^{(h)}\ b^{(h)}\ c^{(h)}$. Tomando ahora como en el citado número un producto de seis factores

$$a\Delta'^n.\ a^{(h'')}\Delta''^n\times b\Delta_{,}^n.\ b^{(h_{,,})}\Delta_{,,}^n\times c'\Delta^n.\ c^{(''h)''}\Delta^n$$

tendremos que en lugar de cuatro diferencias en que dividimos entonces el esponente $\Delta' n$, ahora unicamente deberemos dividirle en tres, para combinar el factor a con los $b^{(h_{,,})}\ c^{(''h)}$, $b^{(h_{,,})}\ c$, $b\ c^{(''h)}$, supuesto que no puede combinarse con bc, porque vendria en la combinacion el factor primitivo A°, que no existe; esto equivale á suponer en aquella operacion $\Delta^{IV}\Delta' m=0$, con lo cual hubiéramos llegado al mismo producto $(a)\ (a')$, el que se aplicará al caso presente haciendo la suposicion dicha de $\Delta^{IV}\Delta' n=0$. Se tendrá pues

$$\frac{2.3\ldots\Delta'' n}{2.3\ldots\Delta'\Delta' n\times 2.3\ldots\Delta''\Delta' n\times 2.3\ldots\Delta'''\Delta' n}$$

$$\times\frac{1}{2.3\ldots(\Delta_{,,}n-\Delta'\Delta' n-\Delta''\Delta' n)\times 2.3\ldots(\Delta_{,}n-\Delta'''\Delta' n)}$$

$$\times\frac{1}{2.3\ldots(''\Delta n-\Delta'\Delta' n-\Delta''\Delta' n)\times 2.3\ldots('\Delta n-\Delta''\Delta' n)}:$$

suponiendo $\triangle' n = n - n'$, $\triangle_, n = n - n''$, $'\triangle n = n - n'''$, esta espresion se trasforma en

$$\frac{2.3...n'}{2.3...\triangle'(n-n') \times 2.3...\triangle''(n-n') \times 2.3...\triangle'''(n-n')}$$

$$\times \frac{1}{2.3...(n''+n'+\triangle'''(n-n')-n) \times 2.3...(n-n''-\triangle'''(n-n'))} \quad (c).$$

$$\times \frac{1}{2.3...(n'''+n'+\triangle''(n-n')-n) \times 2.3...(n-n'''-\triangle''(n-n'))}$$

si en ella se supone constante la suma $\triangle''(n-n')+\triangle'''(n-n') = h$, será $\triangle'(n-n') = n-n'-h$, y quedarán en el denominador seis factores variables cuyas sumas dos á dos son constantes, y cuatro á cuatro lo son igualmente, de los que sería preciso determinar el término sumatorio. Pero si se supone $\triangle'(n-n')+\triangle'''(n-n') = h$, $\triangle''(n-n') = n-n'-h$, será

$$\frac{2.3...n'}{2.3...(n-n'-h) \times 2.3...\triangle' h \times 2.3...\triangle'' h \times 2.3...(n''+n'+\triangle'' h-n)}$$

$$\times \frac{1}{2.3...(n-n''-\triangle'' h) \times 2.3...(n'''-h) \times 2.3...(n'+h-n''')}$$

obteniendo cuatro factores variables cuyas sumas dos á dos son constantes, y por lo tanto el sumatorio que corresponde es

$$\frac{2.3...(n'+h)}{2.3...(n-n'-h) \times 2.3...h \times 2.3...(n''+n'+h-n) \times 2.3...(n'''-h)}$$

$$\times \frac{1}{2.3...(n'+h-n''') \times 2.3...(n-n'')}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d).$$

y queda la espresion que buscamos reducida á los valores de una sola variable h.

Mas una vez determinado en el número anterior el coeficiente que corresponde en un producto de dos series, podemos deducir fácilmente de él, el que ahora buscamos correspondiente á un producto de tres series. Con efecto, si en la funcion supuesta

$$\left[B+(a+a'x+a''x^2+\&c.)(b+b'x+b''x^2+\&c.)(c+c'x+c''x^2+\&c.)\right]^{-m} = M+B'x+B''x^2+\&c.$$

efectuamos el producto de las dos últimas series, y llamamos A, A', A'', &c., sus coeficientes, se transformará en la

$$\left[B+(a+a'x+a''x^2+\&c.)(A+A'x+A''x^2+\&c.)\right]^{-m} = M+B'x+B''x^2+\&c.,$$

siendo $A^{(H)}=\Sigma b^{(\Delta' H)}\, c^{(\Delta'' H)}$.

Reducida de este modo la funcion á un producto de dos series, podemos aplicarle la fórmula (12), y será su término general

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times m(m+1)\ldots(m+n-1)$$

$$\times\frac{2.3\ldots n'\times 2.3\ldots k}{2.3\ldots(n'+k-n)\times 2.3\ldots(n-n')\times 2.3\ldots(n-k)}\times\frac{a^{n-n'}\,A^{n-k}}{B^{m+n}}$$

$$\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta' 2N}{\Delta n'}\right)}\Delta n'}{2.3\ldots\Delta n'}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta'' 2N}{\Delta k}\right)}\Delta k}{2.3\ldots\Delta k}$$

en el cual hemos escrito k en vez de n''. La suma de productos

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta'' 2N}{\Delta k}\right)}\Delta k}{2.3\ldots\Delta k}$$

se encuentra en el mismo caso que la que consideramos en dicho número anterior (12), y está contenida en la fórmula (11); es á saber, que en su composicion entran en combinacion todos los factores A', A'', &c., escepto el A°, siendo sus valores los que corresponden á un producto de dos series: luego sustituyendo en vez de dicha suma de productos el valor que la corresponde en la citada fórmula (11), se obtendrá el término general (14), en cuyo coeficiente k es una variable á que se han de dar todos los valores en números enteros que permita la espresion, obteniendo despues la suma de los que resulten á esta por cada uno de aquellos: debe advertirse que este coeficiente es el mismo (d) deducido anteriormente, suponiendo en él $n'+h=k$, y cambiando n'' en n' y viceversa.

Como consecuencia de este valor del término general, se establece tambien la fórmula (15). Escusado es decir que tomando n'' ó n''' en vez de n', y al contrario, las sumas que provengan de los valores de k han de ser siempre iguales.

14. Considerando ahora un producto de cuatro séries

$$\left[B'+(a+a'x+a''x^2+\&c.)\ (b+b'x+b''x^2+\&c.)(c+c'x+c''x^2+\&c.)\right.$$
$$\left.(d+d'x+d''x^2+\&c.)\right]^{-m}=M+B'x+B''x^2+\&c.,$$

efectuaremos el producto de ellas dos á dos, y llamando $A^{(II)}$, $A_{,}^{(II)}$ sus respectivos términos generales, será

$$A^{(II)}=\Sigma a^{(\Delta' II)}b^{(\Delta'' II)},\ A_{,}^{(II)}=\Sigma c^{(\Delta' II)}\,d^{(\Delta'' II)},$$

y la funcion se trasformará en

$$\left[B'+(A+A'x+A''x^2+\&c.)\ (A_{,}+A_{,}'x+A_{,}''x^2+\&c.)\right]^{-m}$$
$$=M+B'x+B''x^2+\&c.,$$

la cual dará

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times m(m+1)\ldots(m+n-1)$$

$$\times\frac{2.3\ldots k'\times 2.3\ldots k''}{2.3\ldots(k'+k''-n)\times 2.3\ldots(n-k')\times 2.3\ldots(n-k'')}$$

$$\times\frac{A^{n-k'}A_{,}^{n-k''}}{B^{m+n}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^{k'}N}{\Delta^{k'}}\right)\Delta k'}}{2.3\ldots\Delta k'}\times\Sigma P.\frac{A_{,}^{\left(\frac{\Delta^{k''}N}{\Delta^{k''}}\right)\Delta k''}}{2.3\ldots\Delta k''};$$

y sustituyendo de la misma manera por las dos sumas de productos indicadas por los signos $\Sigma\ P$ sus valores de la fórmula (11), vendrán las (15) y (16).

15. Hecho ya ver el modo de obtener los términos generales en los productos de varias séries, pasemos ahora á considerar las potencias de las mismas.

Si en las fórmulas (11) y (12) suponemos $a=b$, los factores

$$2.3\ldots n'\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^{n'}N}{\Delta^{n'}}\right)\Delta n'}}{2.3\ldots\Delta n'},\quad 2.3\ldots n''\times\Sigma P.\frac{b^{\left(\frac{\Delta^{n''}N}{\Delta^{n''}}\right)\Delta n''}}{2.3\ldots\Delta n''}$$

que entran en ellas, siendo los respectivos términos generales de las séries

$$(a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.)^{n'}\ \ (b'x+b''x^2+b'''x^3+\&c.)^{n''},$$

la suma de productos que resulte de aquellos, tomando todas las combinaciones de las Δ^2N, equivaldrá al término general de este producto, que por ser $a=b$, se convierte en

$$(a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.,)^{n'+n''}$$

y dicho término general es

$$2.3...(n'+n'')\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^{(n'+n'')}}\right)\Delta(n'+n'')}}{2.3...\Delta(n'+n'')},$$

en el cual están separadas, ó son ya distintas las combinaciones de factores. El mismo resultado se obtiene determinando la suma de coeficientes de la espresion en que se convierte el producto

$$\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta'^2N}{\Delta^{n'}}\right)\Delta n'}}{2.3...\Delta n'}\times\Sigma P.\frac{b^{\left(\frac{\Delta''^2N}{\Delta^{n''}}\right)\Delta n''}}{2.3...\Delta n''}$$

cuando se tenga $a=b$. Con efecto, en este caso aquellos factores de una y otra suma de productos, que tengan unos mismos acentos $a^{(h')\Delta^{n'}}$ $b^{(h')\Delta^{n''}}$, se reducen á uno $a^{(h')\Delta^{n'}+\Delta^{n''}}$; por consiguiente, cada producto distinto de la forma $a^{(h')\Delta'^{n'}+\Delta'^{n''}}$ $a^{(h'')\Delta''^{n'}+\Delta''^{n''}}\times$ &c., podrá provenir de todas las combinaciones que produzcan sumas fijas en los esponentes. La suma, pues, de coeficientes que corresponde al mismo, vendrá dada por la espresion

$$\Sigma\frac{1}{2.3...\Delta'n'\times2.3...\Delta''n'\times...\&c.\times2.3...\Delta'n''\times2.3...\Delta''n''\times...\&c.}$$

en la que se verificará que la suma de las diferencias $\Delta'n'+\Delta''n'$ $+\&c.=n'$, $\Delta'n''+\Delta''n''+\&c.=n''$, y las sumas de las mismas tomadas dos á dos $\Delta'n'+\Delta'n''$, $\Delta''n'+\Delta''n''$, &c., deben ser constantes; aplicando, pues, la fórmula (10), su término sumatorio será

$$\frac{2.3...(n'+n'')}{2.3...n'\times2.3...n''\times2.3...(\Delta'n'+\Delta'n'')2.3...(\Delta''n'+\Delta''n'')\times...\&c.};$$

:

y como los factores $2.3...n''$ $2.3...n'$ se destruyen con los que existen en el numerador de la espresion, se deduce el mismo resultado inferido antes. Sustituyendo, pues, en vez del producto indicado, el término general á que equivale, el segundo miembro de la fórmula (11) se trasformará en

$$\frac{2.3...(n'+n'')\times a^{2n-n'-n''}}{2.3...(n-n')\times 2.3...(n-n'')\times 2.3...(n'+n''-n)}$$

$$\times \Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^{(n'+n'')}}\right)\Delta(n'+n'')}}{2.3...\Delta(n'+n'')},$$

y escribiendo en esta espresion n' en vez de $n'+n''$, $\Delta' n'$ en vez de n', $\Delta'' n'$ en vez de n'', las cantidades $n-n'$, $n-n''$ se convierten en $n-\Delta' n'$, $n-\Delta'' n'$, cuya suma es $2n-n'$, y por lo tanto, pueden significarse por los símbolos $\Delta'(2n-n')$, $\Delta''(2n-n')$, y la espresion se trasforma en

$$\Sigma \frac{2.3...n'\times a^{2n-n'}}{2.3...\Delta'(2n-n')\times 2.3...\Delta''(2n-n')\times 2.3...(n'-n)}$$

$$\times \Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^{n'}}\right)\Delta n'}}{2.3...\Delta n'},$$

en la cual tan solo queda la espresion variable

$$\Sigma \frac{1}{2.3...\Delta'(2n-n')2.3...\Delta''(2n-n')};$$

pero se tiene en general

$$(1+1)^m = 2^m = 2.3...m\,\Sigma\,\frac{1}{2.3...\Delta' m\times 2.3...\Delta'' m}$$

luego

$$\Sigma \frac{1}{2.3...\triangle'(2n-n')\times 2.3...\triangle''(2n-n')} = \frac{2^{2n-n'}}{2.3...(2n-n')},$$

y reemplazando este valor por la suma que representa en la espresion que nos ocupa, vienen las fórmulas (17) y (18).

16. Podríamos tambien analizar el modo de obtener las combinaciones de productos primitivos $A^{(H)}$, $A^{(H')}$ en la potencia doble

$$\left[(a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.)^2\right]^{m'}$$

relativa á las fórmulas (a) (b) del número (9). Siendo en este caso particular

$$A^{(H)} = 2\ \Sigma\ a^{(\triangle' H)}.\ a^{(\triangle'' H)} + a^{\left(\frac{H}{2}\right)^2}$$

y advirtiendo que las dimensiones de la potencia resultante son $2m'$, si tomamos dos factores cualesquiera

$$a^{(h')\triangle' 2m'}.\ a^{(h'')\triangle'' 2m'},$$

siguiendo una marcha análoga á la que adoptamos para analizar los resultados de un producto de dos séries, debe observarse en primer lugar, que si los esponentes $\triangle' 2m'$, $\triangle'' 2m'$ son divisibles por 2, los dos factores que consideramos pueden provenir del producto primitivo

$$A^{(2h')\frac{\triangle' 2m'}{2}}.\ A^{(2h'')\frac{\triangle'' 2m'}{2}},$$

por cuanto al elevar en general $A^{(H)}$ á la potencia $\triangle m'$, ha de dar un término de la forma $a^{\left(\frac{H}{2}\right)^2 \triangle m' = \triangle 2m'}$. El coeficiente que corresponde á este producto primitivo es en la espresion (u) del mismo número

$$\frac{2.3...\ m'}{2.3...\frac{\Delta'2m'}{2}\times 2.3...\frac{\Delta''2m'}{2}}$$

En general, dividiendo el esponente $\Delta'2m'$ del factor $a^{(h')}$ en dos partes $\Delta_{,}\Delta'2m'$, $\Delta'\Delta'2m'$, y restando la segunda del esponente $\Delta''2m'$, vendrá el producto propuesto descompuesto en

$$a^{(h')\Delta_{,}\Delta'2m'}\times a^{(h')\Delta'\Delta'2m'}.\ a^{(h'')\Delta'\Delta'2m'}\times a^{(h'')\Delta''2m'-\Delta'\Delta'2m'}$$

y provendrá en general del primitivo

$$A^{(2h')\frac{\Delta_{,}\Delta'2m'}{2}}\times A^{(h'+h'')\Delta'\Delta'2m'}\times A^{(2h'')\frac{\Delta''2m'-\Delta'\Delta'2m'}{2}}$$

cuyo coeficiente tomado en (u), y observando que los productos del valor general $A^{(II)}$, $a^{(\Delta'II)}\times a^{(\Delta''II)}$ están multiplicados por 2, será

$$\frac{2.3...m'\times 2\Delta'\Delta'2m'}{2.3...\frac{\Delta_{,}\Delta'2m'}{2}\times 2.3...\Delta'\Delta'2m'\times 2.3...\frac{\Delta''2m'-\Delta'\Delta'2m'}{2}}.$$

Este valor se obtendria directamente de la fórmula (a) observando que $\Delta^2m'=\Delta m'$, porque se toman las potencias de un solo término de las sumas del valor $A^{(II)}$, y que para los esponentes $\frac{\Delta_{,}\Delta'2m'}{2}$, $\frac{\Delta''2m'-\Delta'\Delta'2m'}{2}$ es $\Delta m=m=2$, porque se refieren á los términos de la forma $a^{\left(\frac{II}{2}\right)^2}$, y finalmente, es $\Delta'm=1$, $\Delta''m=1$ para el esponente $\Delta'\Delta'2m'$, porque se refiere al producto doble $a^{(\Delta'II)}\ a^{(\Delta''II)}$. Si en el coeficiente anterior tomamos todas las combinaciones posibles de diferencias $\Delta_{,}\Delta'2m'$, $\Delta'\Delta'2m'$, con la condicion de que los fac-

tores del denominador sean números enteros, y verificamos la suma de los valores obtenidos en cada combinacion, nos deberá dar por resultado el coeficiente que hubiéramos obtenido elevando desde luego á la potencia $2m'$ la serie propuesta. Haciendo $\triangle''2m'=n'$, es $\triangle'2m'=2m'-n'$, y haciendo además $\frac{\triangle_{,}\triangle'2m'}{2}=k$, será $\triangle'\triangle'2m'=2m'-n'-2k$, y $\frac{\triangle''2m'-\triangle'\triangle'2m'}{2}=n'+k-m'$, y á consecuencia de lo espuesto se tendrá la ecuacion

$$2.3\ldots m'\Sigma\frac{2^{2m'-n'-2k}}{2.3\ldots k\times 2.3\ldots(2m'-n'-2k)\times 2.3\ldots(n'+k-m')}$$

$$=\frac{2.3\ldots 2m'}{2.3\ldots(2m'-n')\,2.3\ldots n'}.$$

Tomando un producto de varios factores

$$a^{(h')}\triangle'^{2m'}.\ a^{(h'')}\triangle''^{2m'}.\ a^{(h''')}\triangle'''^{2m'}\times\ldots\&c.,$$

se obtendria igualmente la suma de primitivos de que puede provenir, dividiendo el esponente $\triangle'2m'$ en tantas partes cuantos sean los demás esponentes $\triangle''2m'$, $\triangle'''2m'$, &c., mas un esceso $\triangle_{,}\triangle'2m'$, restando despues cada una de dichas partes del esponente correspondiente, se obtendrá asi una primera descomposicion

$$a^{(h')}\triangle_{,}\triangle'^{2m'}\times a^{(h'')}\triangle'\triangle'^{2m'}.\ a^{(h''')}\triangle'\triangle'^{2m'}\times a^{(h'')}\triangle''\triangle'^{2m'}.\ a^{(h''')}\triangle''\triangle'^{2m'}\times\ldots\&c.$$
$$\times a^{(h'')}\triangle''^{2m'-\triangle'\triangle'^{2m'}}\times a^{(h''')}\triangle'''^{2m'-\triangle''\triangle'^{2m'}}\times\ldots\&c.;$$

despues se dividirá del mismo modo el esponente $\triangle''2m'-\triangle'\triangle'2m'$ en tantas partes cuantos sean los factores $a^{(h''')}$, &c., mas otro esceso,

restando cada parte del esponente respectivo; y continuando así sucesivamente se descompondria el producto en la forma siguiente

$$a^{(h')}\Delta_r\Delta'^{2m'} \times a^{(h')}\Delta'\Delta'^{2m'} . a^{(h'')}\Delta'\Delta'^{2m'} \times a^{(h')}\Delta''\Delta'^{2m'} . a^{(h''')}\Delta''\Delta'^{2m'} \times \ldots \&c.$$

$$a^{(h'')}\Delta_r[\Delta'^{2m'} - \Delta'\Delta'^{2m'}] \times a^{(h'')}\Delta'[\Delta'^{2m'} - \Delta'\Delta'^{2m'}] . a^{(h''')}\Delta'[\Delta''^{2m'} - \Delta'\Delta'^{2m'}] \times \ldots \&c.$$

$$\times a^{(h''')}\Delta_r\{\Delta'''^{2m'} - \Delta''\Delta'^{2m'} - \Delta'[\Delta''^{2m'} - \Delta'\Delta'^{2m'}]\} \times \ldots \&c.$$

cuyo primitivo es

$$B^{(2h')\frac{\Delta_r\Delta'^{2m'}}{2}} \times B^{(h'+h'')\Delta'\Delta'^{2m'}} \times B^{(h'+h''')\Delta''\Delta'^{2m'}} \times \ldots \&c.$$

$$B^{(2h'')\frac{\Delta_r[\Delta''^{2m'} - \Delta'\Delta'^{2m'}]}{2}} \times B^{(h''+h''')\Delta'[\Delta''^{2m'} - \Delta'\Delta'^{2m'}]} \times \ldots \&c.$$

$$\times B^{(2h''')\frac{\Delta_r\{\Delta'''^{2m'} - \Delta''\Delta'^{2m'} - \Delta'[\Delta''^{2m'} - \Delta'\Delta'^{2m'}]\}}{2}} .$$

Si el producto de dos factores que hemos considerado fuera el

$$a\Delta'^{2m'} . a^{(h'')}\Delta''^{2m'}$$

y no entrase en la combinacion el factor A°, tan solo podria en este caso obtenerse un producto primitivo, restando todo el esponente $\Delta'2m'$ del $\Delta''2m'$; debiendo este ser mayor que aquel, el producto se descompondrá en

$$a\Delta'^{2m'} . a^{(h'')}\Delta'^{2m'} \times a^{(h'')}\Delta''^{2m'} - \Delta'^{2m'}$$

cuyo primitivo es

$$A^{(h'')}\Delta'^{2m'} \times A^{(2h'')\frac{\Delta''^{2m'} - \Delta'^{2m'}}{2}}$$

y el coeficiente que le corresponde

$$\frac{2\Delta'^{2m'}}{2.3...\Delta'2m'\times 2.3...\frac{\Delta''^{2m'}-\Delta'^{2m'}}{2}}$$

en el cual haciendo $\Delta''2m'=n'$, $m'=n$, con lo que $\Delta'2m'=2n-n'$, viene

$$\frac{2^{2n-n'}}{2.3...(2n-n')\times 2.3...(n'-n)}$$

que es el mismo valor obtenido anteriormente.

17. Pasando ahora á considerar la tercera potencia, podríamos análogamente deducir su coeficiente de la fórmula (14), observando que el triple producto

$$2.3...n'\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta'^2 N}{\Delta n'}\right)}\Delta n'}{2.3...\Delta n'}\times 2.3...n''\Sigma P.\frac{b^{\left(\frac{\Delta''^2 N}{\Delta n''}\right)}\Delta n''}{2.3...\Delta n''}$$

$$\times 2.3...n'''\Sigma P.\frac{c^{\left(\frac{\Delta'''^2 N}{\Delta n'''}\right)}\Delta n'''}{2.3...\Delta n'''},$$

se convierte cuando $b=c=a$ en

$$2.3...(n'+n''+n''')\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta(n'+n''+n''')}\right)}\Delta(n'+n''+n''')}{2.3...\Delta(n'+n''+n''')}$$

y escribiendo despues n' en vez de $n'+n''+n'''$, $\Delta'n'$, $\Delta''n'$, $\Delta'''n'$ en vez de n', n'', n'''.

Puede tambien seguirse otro camino mas fácil tomando la fórmula relativa á un producto de dos series

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times m(m+1)\ldots(m+n-1)$$

$$\times\frac{2.3\ldots k\times 2.3\ldots n'}{2.3\ldots(n-n')\times 2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots(n'+k-n)}\times\frac{a^{n-n'}A^{n-k}}{B^{m+n}}$$

$$\times\Sigma P.\frac{a\left(\frac{\Delta'^{2N}}{\Delta^{n'}}\right)\Delta n'}{2.3\ldots\Delta n'}\times\Sigma P.\frac{A\left(\frac{\Delta''^{2N}}{\Delta^{k}}\right)\Delta k}{2.3\ldots\Delta k}\ ,$$

y suponiendo que los coeficientes $A^{(n)}$ sean los que pertenecen al cuadrado de la serie $a+a'x+a''x^2+$&c., se tendrá por la fórmula (17)

$$\Sigma P.\frac{A\left(\frac{\Delta''^{2N}}{\Delta^{k}}\right)\Delta k}{2.3\ldots\Delta k}=\Sigma.\frac{2^{2k-n''}\times 2.3\ldots n''}{2.3\ldots(2k-n'')\times 2.3\ldots(n''-k)}$$

$$\times a^{2k-n''}\times\Sigma P.\frac{a\left(\frac{\Delta''^{2N}}{\Delta^{n''}}\right)\Delta n''}{2.3\ldots\Delta n''}$$

cuyo valor introducido en la espresion anterior, teniendo presente que $A=a^2$, y que el producto

$$2.3\ldots n'\Sigma P.\frac{a\left(\frac{\Delta'^{2N}}{\Delta^{n'}}\right)\Delta n'}{2.3\ldots\Delta n'}\times 2.3\ldots n''\Sigma P.\frac{a\left(\frac{\Delta''^{2N}}{\Delta^{n''}}\right)\Delta n''}{2.3\ldots\Delta n''}$$

$$=2.3\ldots(n'+n'')\Sigma P.\frac{a\left(\frac{\Delta^{N}}{\Delta(n'+n'')}\right)\Delta(n'+n'')}{2.3\ldots\Delta(n'+n'')}$$

escribiendo n' en vez de $n'+n''$, $\Delta' n'$ en vez de n', y $\Delta'' n'$ en vez de n'', vendrá para $B^{(N)}$ el valor siguiente

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1).2^{2k-\triangle'n'}\times 2.3\ldots k\times 2.3\ldots n'}{2.3\ldots(n-\triangle'n')\times 2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots(\triangle'n'+k-n)}$$

$$\times\frac{1}{2.3\ldots(2k-\triangle''n')\times 2.3\ldots(\triangle''n'-k)}\times\frac{a^{3n-n'}}{B^{m+n}}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n'}\right)\triangle n'}}{2.3\ldots\triangle n'}.$$

Mas puede aún obtenerse un tercer valor de este coeficiente, deduciéndole directamente de la consideracion de los productos primitivos de factores $A^{(H)}$ que pueden producir uno determinado de los $a^{(h)}$ en la tercera potencia. Tomando en efecto el producto de dos factores

$$a^{\triangle'3m}.\ a^{(h'')\triangle''3m},$$

como en las combinaciones de primitivos no entra el factor A^0, el que consideramos podrá únicamente haber provenido de elevar á la potencia correspondiente dos términos de la forma $3a^2a^{(h'')}$ y $3aa^{(h'')2}$, y uno de la forma $a^{(h'')3}$. Por consiguiente, dividiendo el esponente $\triangle'3m$ en dos partes $\triangle'\triangle'3m$, $\triangle''\triangle'3m$, deberá descomponerse el producto de que se trata del modo siguiente:

$$a^{\triangle'\triangle'3m}.a^{(h'')\frac{\triangle'\triangle'3m}{2}}\times a^{\triangle''\triangle'3m}.a^{(h'')2\triangle''\triangle'3m}\times a^{(h'')\triangle''3m-\frac{\triangle'\triangle'3m}{2}-2\triangle''\triangle'3m},$$

y el primitivo que le corresponde será

$$B^{(h'')\frac{\triangle'\triangle'3m}{2}}\times B^{(2h'')\triangle''\triangle'3m}\times B^{(3h'')\frac{\triangle''3m-\frac{\triangle'\triangle'3m}{2}-2\triangle''\triangle'3m}{3}},$$

cuyo coeficiente dado en la espresion (u) del número (9), atendido que los factores dobles están multiplicados por 3, será

:

$$\frac{3^{\frac{\Delta'\Delta'3m}{2}+\Delta''\Delta'3m}}{2.3...\frac{\Delta'\Delta'3m}{2}\times 2.3...\Delta''\Delta'3m\times 2.3...\frac{2\Delta''3m-\Delta'\Delta'3m-4\Delta''\Delta'3m}{2.3}};$$

y suponiendo $m=n$, $\Delta'3m=3n-n'$, $\Delta''3m=n'$, y $\frac{\Delta'\Delta'3m}{2}=k$,

se tendrá

$$\Delta''\Delta'3m=3n-n'-2k, \frac{2\Delta''3m-\Delta'\Delta'3m-4\Delta''\Delta'3m}{2.3}=n'+k-2n,$$

$$\frac{\Delta'\Delta'3m}{2}+\Delta''\Delta'3m=3n-n'-k,$$

con lo que el coeficiente se trasforma en

$$\frac{3^{3n-n'-k}}{2.3...k\times 2.3...(3n-n'-2k)\times 2.3...(n'+k-2n)}$$

Podrán establecerse las fórmulas (19) y (20), en las que queda el coeficiente de que tratamos reducido á la suma de los valores relativos á una sola variable k.

18. En la cuarta potencia tomaremos el producto de dos series considerando que cada una procede de un cuadrado, ó mejor el cuadrado de una serie sencilla; se tendrá

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times m(m+1)...(m+n-1)\times\frac{2^{2n-k}\times 2.3...k}{2.3...(2n-k)\times 2.3...(k-n)}$$

$$\times\frac{A^{2n-k}}{B^{m+n}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^k}\right)\Delta^k}}{2.3...\Delta k}$$

siendo $A^{(II)}$ el coeficiente general que pertenece á la serie $(a+a'x+$

$a''x^2+\&c.)^2$; por lo tanto, sustituyendo en la espresion anterior en vez de la suma de productos ΣP su valor de la fórmula (17), teniendo presente que $A=a^2$, vienen desde luego las fórmulas (22) y (21).

En la quinta potencia podríamos tomar análogamente el producto de dos series de las que la una fuese una cuarta potencia, y la otra una primera, y así sucesivamente en las superiores.

19. Pasemos ahora á indagar el valor de la espresion

$$\Sigma P.\ \frac{A^{\left(\frac{\triangle^N}{\triangle^n}\right)\triangle^n}}{2.3\ldots\ \triangle n},$$

suponiendo que sea $A^{(H)}=\Sigma a^{(\triangle' H)}.\ b^{(\triangle'' H)}$, ó bien que represente el término general del producto de dos series, y que no entren en combinacion en ella el factor A° ni el A'. Para el efecto, tomaremos una combinacion de seis factores

$$a\triangle'^n.\ a'\triangle''^n.\ a^{(h')}\triangle'''^n \times b\triangle_{,}{}^n.\ b'\triangle_{,,}{}^n.\ b^{(h_{,})}\triangle_{,,,}{}^n$$

proponiéndonos saber de cuántas primitivas de los $A^{(H)}$ puede emanar. No pudiendo combinarse a con b ni con b', porque estas combinaciones darian los factores A°, A', que suponemos no entran en la suma de productos que nos ocupa, se combinará únicamente con $b^{(h_{,})}$, y del mismo modo b se combinará tan solo con $a^{(h')}$: efectuando estas combinaciones vendrá la descomposicion

$$a\triangle'^n.\ b^{(h_{,})}\triangle'^n \times a^{(h')}\triangle_{,}{}^n.\ b\triangle_{,}{}^n$$
$$a'\triangle''^n.\ a^{(h')}\triangle'''^n-\triangle_{,}{}^n \times b'\triangle_{,,}{}^n.\ b^{(h_{,})}\triangle_{,,,}{}^n-\triangle'^n.$$

Los cuatro últimos factores pueden combinarse de todos los modos posibles, y observando que la suma de sus esponentes es

$$\triangle''n+\triangle'''n-\triangle_{,}n=\triangle_{,,}n+\triangle_{,,,}n-\triangle'n=n-\triangle'n-\triangle_{,}n,$$

el coeficiente total que les corresponde tendrá por espresion

$$\frac{2.3...(n-\triangle' n-\triangle_{,} n)}{2.3...\triangle'' n \times 2.3...\triangle_{,,} n \times 2.3...(\triangle''' n-\triangle_{,} n)\times 2.3...(\triangle_{,,,} n-\triangle' n)},$$

el cual deberá combinarse con el de los primeros factores, $A^{(h')\triangle_{,} n}$. $A^{(h_{,})\triangle' n}$, que es

$$\frac{1}{2.3...\triangle' n \times 2.3...\triangle_{,} n},$$

haciendo $\triangle' n = n-n'$, $\triangle_{,} n = n-n''$, $\triangle'' n = n'-r'$, $\triangle_{,,} n = n''-r''$, con lo que $\triangle''' n = r'$, $\triangle_{,,,} n = r''$; el coeficiente anterior multiplicado por los factores $2.3...r'$, $2.3...r''$ será

$$\frac{2.3...(n'+n''-n)\times 2.3...r' \times 2.3...r''}{2.3...(n-n')\times 2.3...(n-n'')\times 2.3...(n'-r')\times 2.3...(n''-r'')} \times \frac{1}{2.3...(n'+r''-n)\times 2.3...(n''+r'-n)} :$$

por un procedimiento enteramente igual al que seguimos en el número (12) demostraremos que este coeficiente es general, cualquiera que sea la combinacion de factores

$$a^{\triangle' n}.\ a'^{\triangle'' n}.\ a^{(h')\triangle''' n}.\ a^{(h'')\triangle^{IV} n}...\&c.$$
$$\times b^{\triangle_{,} n}.\ b'^{\triangle_{,,} n}.\ b^{(h_{,})\triangle_{,,,} n}.\ b^{(h_{,,})\triangle_{,v} n}...\&c.,$$

representando r', r'' las sumas de los esponentes $\triangle''' n+\triangle^{IV} n+\&c.$, $\triangle_{,,,} n+\triangle_{,v} n+\&c.$, que afectan los $a^{(h')}\ a^{(h'')}$ &c., $b^{(h_{,})}\ b^{(h_{,,})}$ &c., para lo cual dividiríamos los esponentes $\triangle' n$, $\triangle_{,} n$ en tantas partes cuantos sean estos factores, esceptuándose los $b\ b'$, $a\ a'$, con los que no pueden combinarse a ni b, obtendríamos la combinacion de productos $(ab^{(h_{,})})\ (ab^{(h_{,,})})$... &c., $(ba^{(h')})\ (ba^{(h'')})$... &c., y quedarian como

anteriormente los factores $a'\Delta''^{n}$, $b'\Delta_{,,}{}^{n}$, que habrian de combinarse con los $b^{(h_{,})}$, $b^{(h_{,,})}$..., $a^{(h')}$, $a^{(h'')}$... restadas de sus esponentes las diferencias $\Delta'\Delta'n$, $\Delta''\Delta'n$... $\Delta'\Delta_{,}n$, $\Delta''\Delta_{,}n$... en que hayamos dividido los $\Delta'n$, $\Delta_{,}n$; el coeficiente total de esta combinacion tendrá una espresion enteramente conforme con la anterior, y combinado con el que procede de los otros factores, dividiéndole despues en dos productos independientes, y obteniendo la suma parcial de cada uno, llegaríamos al resultado que hemos enunciado. En consecuencia puede escribirse la fórmula (23), que se haria estensiva á productos de mayor número de series por los mismos medios que hemos consignado anteriormente.

20. Si suponemos $a=b$ en la fórmula que acabamos de hallar para hacer aplicacion al cuadrado, observaremos que las espresiones

$$2.3...r'\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta'^{2}(N-n'+r')}{\Delta^{r'}}\right)}\Delta r'}{2.3...\Delta r'},\quad 2.3...r''\Sigma P.\frac{b^{\left(\frac{\Delta''^{2}(N-n''+r'')}{\Delta^{r''}}\right)}\Delta r''}{2.3...\Delta r''},$$

son los respectivos términos generales que ocupan el lugar señalado por los números $\Delta'N-n'+r'$, $\Delta''N-n''+r''$ en las series $(a''x^{2}+a'''x^{3}+\&c.)^{r'}$ $(b''x^{2}+b'''x^{3}+\&c.)^{r''}$, cuya combinacion dará el término que ocupa el lugar $N-n'-n''+r'+r''$ en el producto, y este esponente de x, sumado con los $n'-r'$, $n''-r''$ que afectan á a' b', da el N á que se refiere la espresion. Cuando $a=b$ el término general del producto de que tratamos se convertirá en el de la espresion $(a''x^{2}+a'''x^{3}+\&c.)^{r'+r''}$, y haciendo $n'+n''=n_{,}$, $r'+r''=r_{,}$, podremos escribir en vez de dicho producto la espresion

$$2.3...r_{,}\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta(N-n_{,}+r_{,})}{}\right)}\Delta r_{,}}{2.3...\Delta r_{,}}.$$

Verificado esto nos quedan en el denominador de la fórmula (23) seis factores con cuatro variables n', n'', r', r''; mas la variabilidad de las

r', r'' es independiente de la de las n', n'', de modo que estas pueden suponerse constantes y aquellas variables, y al contrario; suponiendo pues constantes n', n'', quedan los cuatro factores que contienen r', r'',

$$\frac{1}{2.3...(n'-r')\times 2.3...(n''-r'')\times 2.3...(n'+r''-n)\times 2.3...(n''+r'-n)}$$

cuya suma es, como sabemos,

$$\frac{2.3...\,2\,(n_{,}-n)}{2.3...(n_{,}-r_{,})\times 2.3...(n_{,}+r_{,}-2n)\times 2.3...(n_{,}-n).2.3...(n_{,}-n)},$$

en la cual habiendo desaparecido n', n'', quedan solo en la espresion los dos factores variables

$$\Sigma\frac{1}{2.3...(n-n')\times 2.3...(n-n'')}=\frac{2^{2n-n_{,}}}{2.3...(2n-n_{,})}:$$

haciendo pues las sustituciones, y volviendo á escribir n', r' en vez de $n_{,}$, $r_{,}$, viene la fórmula (24).

21. Cuando los coeficientes que multipliquen las diversas potencias de x consten de dos ó mas sumandos, la cuestion se resuelve fácilmente.

Supóngase en efecto la espresion

$$(A_{,}+A_{1}'x+A_{1}''x^{2}+\&c.+A_{2}+A_{2}'x+A_{2}''x^{2}+\&c.\\ +A_{3}+A_{3}'x+A_{3}''x^{2}+\&c.)^{-m}:$$

haciendo $A_{1}'+A_{2}'+A_{3}'=A'$, y en general $A_{1}^{(II)}+A_{2}^{(II)}+A_{3}^{(II)}=A^{(II)}$, se tendrá para el término general $B^{(N)}$ de esta potencia

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^{n}\times m(m+1)...(m+n-1)\times\frac{1}{A^{m+n}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle^{N}}{\triangle^{n}}\right)\triangle n}}{2.3...\triangle n};$$

pero se tiene en general

$$A^{(H)\Delta^n}=2.3...\Delta n\,\Sigma\frac{A_1{}^{(H)}\Delta'\Delta^n.\,A_2{}^{(H)}\Delta''\Delta^n.\,A_3{}^{(H)}\Delta'''\Delta^n}{2.3...\Delta'\Delta n\times 2.3...\Delta''\Delta n\times 2.3...\Delta'''\Delta n},$$

luego sustituyendo este valor general en la anterior suma de productos, advirtiendo que en el numerador y denominador se destruye el factor $2.3...\Delta n$, dicha suma de productos se subdivide naturalmente en el producto de tres ó mas distintas, relativas cada una á los factores $A_1{}^{(H)}\,A_2{}^{(H)}\,A_3{}^{(H)}$, en las cuales se verificará que el número de factores $A_1{}^{(H)}$ estará representado por la suma $\Sigma\Delta'\Delta n=\Delta' n=n'$, el número de factores $A_2{}^{(H)}$ estará representado por la suma $\Sigma\Delta''\Delta n=\Delta'' n=n''$, y el número de factores $A_3{}^{(H)}$ por la $\Sigma\Delta'''\Delta n=\Delta''' n=n'''$; debiendo verificarse en cualquiera combinacion la ecuacion $n'+n''+n'''=n$. Las sumas de los productos de los acentos por los esponentes relativas á las combinaciones de cada una de dichas tres clases de factores, pueden ordenadamente representarse en las siguientes ecuaciones

$$H'\Delta'\Delta' n+H''\Delta'\Delta'' n+H'''\Delta'\Delta''' n=\Delta N,$$
$$H'\Delta''\Delta' n+H''\Delta''\Delta'' n+H'''\Delta''\Delta''' n=\Delta' N,$$
$$H'\Delta'''\Delta' n+H''\Delta'''\Delta'' n+H'''\Delta'''\Delta''' n=\Delta'' N,$$

que corresponden á las

$$H'\Delta' n'+H''\Delta'' n'+H'''\Delta''' n'=\Delta N,$$
$$H'\Delta' n''+H''\Delta'' n''+H'''\Delta''' n''=\Delta' N,$$
$$H'\Delta' n'''+H''\Delta'' n'''+H'''\Delta''' n'''=\Delta'' N,$$

de cada suma de productos parciales, de modo que siempre se verifica que la suma total en dichos productos de los acentos multiplicados por los esponentes, es igual á la cantidad N. Pueden pues establecerse las fórmulas (25) y (26), en que las cantidades n', n'', n''' pueden tener todos los valores con tal que se verifique que su suma sea igual n, y del mismo modo las sumas $\Sigma\Delta^2 N$ que se refieren á los acentos de los factores de cada combinacion.

Ecuaciones y fórmulas del capítulo 1.º

1) $$P.\Sigma A^{(h)}_{(k)} = \Sigma P.\, A^{(h)}_{(k)}$$

2) $$(\Sigma A^{(h)})^m = 2.3\ldots m\, \Sigma P. \frac{A^{(h)\triangle m}}{2.3\ldots \triangle m}$$

3) $$(\Sigma A^{(h)})^{-m} = \frac{1}{(\Sigma A^{(h)})^m} = \Sigma(-1)^n \times m(m+1)\ldots(m+n-1) \times \frac{1}{A^{m+n}} \times \Sigma P. \frac{A^{(h)\triangle n}}{2.3\ldots \triangle n}$$

4) $$(\Sigma A^{(h)})^m \times (\Sigma A_1^{(h')})^{m_1} \times (\Sigma A_2^{(h'')})^{m_2} \ldots \times \&c. = 2.3\ldots m \times 2.3\ldots m_1 \times 2.3\ldots m_2 \ldots \&c. \times \Sigma P. \frac{A^{(h)\triangle m}}{2.3\ldots \triangle m} \times \Sigma P. \frac{A_1^{(h')\triangle m_1}}{2.3\ldots \triangle m_1} \times \Sigma P. \frac{A_2^{(h'')\triangle m_2}}{2.3\ldots \triangle m_2} \times \ldots \&c.$$

5) $$\frac{(\Sigma A^{(h)})^m \times (\Sigma A_1^{(h')})^{m_1} \times \Sigma A_2^{(h'')})^{m_2} \times \ldots \&c.}{(\Sigma B^{(k)})^{m'} \times (\Sigma B_1^{(k')})^{m'_1} \times (\Sigma B_2^{(k'')})^{m'_2} \times \ldots \&c.} = 2.3\ldots m \times 2.3\ldots m_1 \times 2.3\ldots m_2 \times \ldots \&c. \times \Sigma P. \frac{A^{(h)\triangle m}}{2.3\ldots \triangle m} \times \Sigma P. \frac{A_1^{(h')\triangle m_1}}{2.3\ldots \triangle m_1} \times \Sigma P. \frac{A_2^{(h'')\triangle m_2}}{2.3\ldots \triangle m_2} \times \ldots \&c. \times (-1)^n \times m'(m'+1)\ldots(m'+\triangle' n-1) \times m'_1 (m'_1+1)\ldots(m'_1+\triangle'' n-1) \times m'_2 (m'_2+1)\ldots (m'_2+\triangle''' n-1) \times \ldots \&c. \times \frac{1}{B^{m'+\triangle' n} \times B_1^{m'_1+\triangle'' n} \times \&c.} \times \Sigma P. \frac{B^{(k)\triangle\triangle' n}}{2.3\ldots \triangle\triangle' n} \times \Sigma P. \frac{B_1^{(k')\triangle\triangle'' n}}{2.3\ldots \triangle\triangle'' n} \times \ldots \&c.$$

$$6\left\{ P.\Sigma A^{(h)}_{(k)}\,.\,x^h = \Sigma x^N \times \Sigma P A^{(\triangle^N)}_{(k)} \right.$$

$$7\left\{ (\Sigma A^{(h)} x^h)^m = 2.3\ldots m\ \Sigma x^N \times \Sigma P.\ \frac{A^{\left(\frac{\triangle^N}{\triangle^m}\right)}\triangle m}{2.3\ldots\triangle m} \right.$$

$$8\left\{ \begin{array}{l} (\Sigma A^{(h)} x^h)^{-m} = \Sigma x^N \times \Sigma(-1)^n \times m(m+1)\ldots(m+n-1) \times \dfrac{1}{A^{m+n}} \\ \qquad\qquad \times \Sigma P. \dfrac{A^{\left(\frac{\triangle^N}{\triangle^n}\right)}\triangle n}{2.3\ldots\triangle n} \end{array} \right.$$

$$9\left\{ \begin{array}{l} P.(\Sigma A^{(h)}_{(k)}\,.\,x^h)^{-m_{(k)}} = \Sigma x^N \times \Sigma(-1)^n \times P. \dfrac{m_{(k)}(m_{(k)}+1)\ldots(m_{(k)}+\triangle n-1)}{A_{(k)}{}^{m_{(k)}+n}} \times \\ \times \Sigma P. \dfrac{A_{,}^{\left(\frac{\triangle^{2}N}{\triangle\triangle' n}\right)}\triangle\triangle' n}{2.3\ldots\triangle\triangle' n} \times \Sigma P. \dfrac{A_{2}^{\left(\frac{\triangle^{2}N}{\triangle\triangle'' n}\right)}\triangle\triangle'' n}{2.3\ldots\triangle\triangle'' n} \times \ldots \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

$$10\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \dfrac{1}{2.3\ldots\triangle' n \times 2.3\ldots\triangle'' n \times 2.3\ldots\triangle''' n. \times \text{ \&c.}} \\ \times \dfrac{1}{2.3\ldots\triangle' n' \times 2.3\ldots\triangle'' n' \times 2.3\ldots\triangle''' n' \times \ldots \text{\&c.}} \\ \times \dfrac{1}{2.3\ldots\triangle' n'' \times 2.3\ldots\triangle'' n'' \times 2.3\ldots\triangle''' n'' \times \text{\&c.} \times \text{\&c.}} \\ = \dfrac{2.3\ldots(n+n'+n''+\text{\&c.})}{2.3\ldots n \times 2.3\ldots n' \times 2.3\ldots n'' \times \text{\&c.} \times 2.3\ldots n_{,} 2.3\ldots n_{,}' \times 2.3\ldots n_{,}'' \times \text{\&c.}}, \\ \triangle' n + \triangle' n' + \triangle' n'' + \text{\&c.} = n_{,},\ \triangle'' n + \triangle'' n' + \triangle'' n'' + \text{\&c.} = n_{,}', \\ \text{\&c., \&c., siendo, } n_{,}, n_{,}', \text{ \&c. constantes} \end{array} \right.$$

11
$$A^{(H)}=\Sigma a^{(\Delta' H)}.\ b^{(\Delta'' H)},$$
$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)}\Delta n}{2.3...\Delta n}=$$
$$=\Sigma\frac{2.3...n'\times 2.3...n''}{2.3...(n-n')\times 2.3...(n-n'')\times 2.3...(n'+n''-n)}\times a^{n-n'}.\ b^{n-n''}$$
$$\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta'^2 N}{\Delta^{n'}}\right)}\Delta n'}{2.3...\Delta n'}\times\Sigma P.\frac{b^{\left(\frac{\Delta''^2 N}{\Delta^{n''}}\right)}\Delta n''}{2.3...\Delta n''}.$$
Se supone que no entra en combinacion el factor A^0.

12
$$\left[B'+(a+a'x+a''x^2+\&c.)(b+b'x+b''x^2+\&c.)\right]^{-m}$$
$$=M+B'x+B''x^2+\&c.$$
$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times m(m+1)...(m+n-1)$$
$$\times\frac{2.3...n'\times 2.3...n''}{2.3...(n-n')\times 2.3...(n-n'')\times 2.3...(n'+n''-n)}\times\frac{a^{n-n'}.\ b^{n-n''}}{B^{m+n}}$$
$$\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta'^2 N}{\Delta^{n'}}\right)}\Delta n'}{2.3...\Delta n'}\times\Sigma P.\ \frac{b^{\left(\frac{\Delta''^2 N}{\Delta^{n''}}\right)}\Delta n''}{2.3...\Delta n''}$$
$B=B'+ab.$

13
$$A^{(H)}=\Sigma a^{(\Delta' H)}.\ b^{(\Delta'' H)}.\ c^{\ \Delta''' H)},$$
$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)}\Delta n}{2.3...\Delta n}=$$
$$=\Sigma\frac{2.3...k\times 2.3...n'\times 2.3...n''\times 2.3...n'''}{2.3...(n-k)\times 2.3...(n'+k-n)\times 2.3...(n-n')\times 2.3...(n''+n'''-k)}$$

$$15\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2.3\ldots(k-n'')\times 2.3\ldots(k-n''')}\times a^{n-n'}.\,b^{n-n''}.\,c^{n-n'''}\\ \times\Sigma P.\dfrac{a^{\left(\frac{\Delta'^{2N}}{\Delta n'}\right)}\Delta n'}{2.3\ldots\Delta n'}\times\Sigma P.\dfrac{b^{\left(\frac{\Delta''^{2N}}{\Delta n''}\right)}\Delta n''}{2.3\ldots\Delta n''}\times\Sigma P.\dfrac{c^{\left(\frac{\Delta'''^{2N}}{\Delta n'''}\right)}\Delta n'''}{2.3\ldots\Delta n'''}.\end{array}\right.$$

Se supone que no entra en combinacion el factor A^0.

$$14\left\{\begin{array}{l}\left[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)(b+b'x+b''x^2+\&c.)\right.\\ \left.(c+c'x+c''x^2+\&c.)\right]^{-m}=M+B'x+B''x^2+\&c.,\\ B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times m(m+1)\ldots(m+n-1)\\ \times\Sigma\dfrac{2.3\ldots k\times 2.3\ldots n'\times 2.3\ldots n''\times 2.3\ldots n'''}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots(n'+k-n)\times 2.3\ldots(n-n')\times 2.3\ldots(n''+n'''-k)}\\ \times\dfrac{1}{2.3\ldots(k-n'')\times 2.3\ldots(k-n''')}\times\dfrac{a^{n-n'}.\,b^{n-n''}.\,c^{n-n'''}}{B^{m+n}}\\ \times\Sigma P.\dfrac{a^{\left(\frac{\Delta'^{2N}}{\Delta n'}\right)}\Delta n'}{2.3\ldots\Delta n'}\times\Sigma P.\dfrac{b^{\left(\frac{\Delta''^{2N}}{\Delta n''}\right)}\Delta n''}{2.3\ldots\Delta n''}\times\Sigma P.\dfrac{c^{\left(\frac{\Delta'''^{2N}}{\Delta n'''}\right)}\Delta n'''}{2.3\ldots\Delta n'''},\\ B=B_{,}+abc.\end{array}\right.$$

$$15\left\{\begin{array}{l}A^{(H)}=\Sigma a^{(\Delta'H)}.\,b^{(\Delta''H)}.\,c^{(\Delta'''H)}.\,d^{(\Delta^{IV}H)},\\ \Sigma P.\dfrac{A^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n}=\\ =\Sigma\dfrac{2.3\ldots k'\times 2.3\ldots k''\times 2.3\ldots n'\times 2.3\ldots n''\times 2.3\ldots n'''\times 2.3\ldots n^{IV}}{2.3\ldots(k'+k''-n)\times 2.3\ldots(n-k')\times 2.3\ldots(n-k'')\times 2.3\ldots(n'+n''-k')}\\ \times\dfrac{1}{2.3\ldots(n'''+n^{IV}-k'')\times 2.3\ldots(k'-n')\times 2.3\ldots(k'-n'')\times 2.3\ldots(k''-n''')}\end{array}\right.$$

15 $$\times\frac{1}{2.3...(k''-n^{IV})}\times a^{n-n'}.\,b^{n-n''}.\,c^{n-n'''}.\,d^{n-n^{IV}}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta'^{2N}}{\Delta n'}\right)}\Delta n'}{2.3...\Delta n'}$$

$$\times\Sigma P.\frac{b^{\left(\frac{\Delta''^{2N}}{\Delta n''}\right)}\Delta n''}{2.3...\Delta n''}\times\Sigma P.\frac{c^{\left(\frac{\Delta'''^{2N}}{\Delta n'''}\right)}\Delta n'''}{2.3...\Delta n'''}\times\Sigma\,P.\frac{d^{\left(\frac{\Delta^{IV2N}}{\Delta n^{IV}}\right)}\Delta n^{IV}}{2.3...\Delta n^{IV}}$$

Se supone que no entra en combinacion el factor A°.

$$\left[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)(b+b'x+b''x^2+\&c.)(c+c'x+c''x^2+\&c.)\right.$$

$$\left.(d+d'x+d''x^2+\&c.)\right]^{-m}=M+B'x+B''x^2+\&c.,$$

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times\frac{m(m+1)...(m+n-1)\times2.3...k'\times2.3...k''}{2.3...(k'+k''-n)\times2.3...(n-k')\times2.3...(n-k'')}$$

$$\times\frac{2.3...n'\times2.3...n''\times2.3...n'''\times2.3...n^{IV}}{2.3...(n'+n''-k')\times2.3...(n'''+n^{IV}-k'')\times2.3...(k'-n')\times2.3...(k'-n'')}$$

16 $$\times\frac{1}{2.3...(k''-n''')\times2.3...(k''-n^{IV})}\times\frac{a^{n-n'}.\,b^{n-n''}.\,c^{n-n'''}.\,d^{n-n^{IV}}}{B^{m+n}}$$

$$\times\Sigma\,P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta'^{2N}}{\Delta n'}\right)}\Delta n'}{2.3...\Delta n'}\times\Sigma\,P.\,\frac{b^{\left(\frac{\Delta''^{2N}}{\Delta n''}\right)}\Delta n''}{2.3...\Delta n''}\times\Sigma P.\frac{c^{\left(\frac{\Delta'''^{2N}}{\Delta n'''}\right)}\Delta n'''}{2.3...\Delta n'''}$$

$$\times\Sigma\,P.\frac{d^{\left(\frac{\Delta^{IV2N}}{\Delta n^{IV}}\right)}\Delta n^{IV}}{2.3...\Delta n^{IV}},$$

$$B=B_{,}+abcd.$$

17
$$A^{(H)}=2\Sigma a^{(\Delta' H)}\,a^{(\Delta'' H)}+a^{\left(\frac{H}{2}\right)^2},$$

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n}=\Sigma\ \frac{2^{2n-n'}\times 2.3\ldots n'}{2.3\ldots(2n-n')\times 2.3\ldots(n'-n)}$$

$$\times a^{2n-n'}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n'}\right)}\Delta n'}{2.3\ldots\Delta n'}.$$

Se supone que no entra en combinacion el factor A^0.

18
$$\left[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)^2\right]^{-m}=M+B'x+B''x^2+\&c.,$$

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times m(m+1)\ldots(m+n-1)\times\frac{2^{2n-n'}\times 2.3\ldots n'}{2.3\ldots(2n-n')\times 2.3\ldots(n'-n)}$$

$$\times\frac{a^{2n-n'}}{B^{m+n}}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n'}\right)}\Delta n'}{2.3\ldots\Delta n'},$$

$$B=B_{,}+a^2.$$

19
$$A^{(H)}=2.3\,\Sigma a^{(\Delta' H)}.\,a^{(\Delta'' H)}.\,a^{(\Delta''' H)}+3\,\Sigma a^{\left(\frac{\Delta' H}{2}\right)^2}.\,a^{(\Delta'' H)}+a^{\left(\frac{H}{3}\right)^3},$$

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n}=\Sigma\frac{3^{3n-n'-k}\times 2.3\ldots n'}{2.3\ldots k\times 2.3\ldots(3n-n'-2k)\times 2.3\ldots(n'+k-2n)}$$

$$\times a^{3n-n'}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n'}\right)}\Delta n'}{2.3\ldots\Delta n'}.$$

Se supone que no entra en combinacion el factor A^0.

20
$$\left[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)^3 \right]^{-m}=M+B'x+B''x^2+B'''x^3+\&c.$$
$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times m(m+1)\ldots(m+n-1)$$
$$\times\Sigma\frac{3^{3n-n'-k}\times 2.3\ldots n'}{2.3\ldots k\times 2.3\ldots(3n-n'-2k)\times 2.3\ldots(n'+k-2n)}\times\frac{a^{3n-n'}}{B^{m+n}}$$
$$\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n'}\right)\Delta n'}}{2.3\ldots\Delta n'}.$$
$$B=B_{,}+a^3.$$

21
$$A^{(H)}=2.3.4\,\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta H}{\Delta 4}\right)\Delta 4}}{2\ldots\Delta 4},$$
$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n}=$$
$$=\Sigma\frac{2^{2n+k-n'}\times 2.3\ldots k\times 2.3\ldots n'}{2.3\ldots(2n-k)\times 2.3\ldots(k-n)\times 2.3\ldots(2k-n')\times 2.3\ldots(n'-k)}$$
$$\times a^{4n-n'}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n'}\right)\Delta n'}}{2.3\ldots\Delta n'}.$$
Se supone que no entra en combinacion el factor A^0.

22
$$\left[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)^4\right]^{-m}=M+B'x+B''x^2+B'''x^3+\&c.,$$
$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)\times 2^{2n+k-n'}\times 2.3\ldots k\times 2.3\ldots n'}{2.3\ldots(2n-k)2.3\ldots(k-n)\times 2.3\ldots(2k-n')2.3\ldots(n'-k)}$$
$$\times\frac{a^{4n-n'}}{B^{m+n}}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n'}\right)\Delta n'}}{2.3\ldots\Delta n'},$$
$$B=B_{,}+a^4.$$

23

$$A^{(H)} = \Sigma a^{(\Delta' H)}.\, b^{(\Delta'' H)},$$

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n} =$$

$$= \Sigma \frac{2.3\ldots(n'+n''-n)\times 2.3\ldots r'\times 2.3\ldots r''}{2.3\ldots(n-n')\times 2.3\ldots(n-n'')\times 2.3\ldots(n'-r')\times 2.3\ldots(n''-r'')}$$

$$\times \frac{1}{2.3\ldots(n'+r''-n)\times 2.3\ldots(n''+r'-n)} \times a^{n-n'}.\, b^{n-n''} \times a'^{n'-r'}.\, b'^{n''-r''}$$

$$\times \Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^2(N-n'+r')}{\Delta r'}\right)}\Delta r'}{2.3\ldots\Delta r'} \times \Sigma P.\ \frac{b^{\left(\frac{\Delta^2(N-n''+r'')}{\Delta r''}\right)}\Delta r''}{2.3\ldots\Delta r''}.$$

Se supone que no entran en combinacion los factores A° ni A'.

24

$$A^{(H)} = 2\Sigma a^{(\Delta' H)}.\, a^{(\Delta'' H)} + a^{\left(\frac{H}{2}\right)^2},$$

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n} =$$

$$= \Sigma \frac{2^{2n-n'}\times 2.3\ldots 2(n'-n)\times 2.3\ldots r'}{2.3\ldots(2n-n')\times 2.3\ldots(n'-n)\times 2.3\ldots(n'+r'-2n)\times 2.3\ldots(n'-r')}$$

$$\times a^{n-n'}.\, a'^{n'-r'} \times \Sigma P.\ \frac{a^{\left(\frac{\Delta(N-n'+r')}{\Delta r'}\right)}\Delta r'}{2.3\ldots\Delta r'}.$$

Se supone que no entran en combinacion los factores A° ni A'.

25
$$\begin{cases} A^{(n)} = A_{\,1}{}^{(n)} + A_{\,2}{}^{(n)} + A_{\,3}{}^{(n)} + \&c., \\ \Sigma P. \dfrac{A^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta n}\right)} \Delta n}{2.3\ldots \Delta n} = \Sigma P. \dfrac{A_1{}^{\left(\frac{\Delta' {}^2 N}{\Delta n'}\right)} \Delta n'}{2.3\ldots \Delta n'} \\ \times \Sigma P. \dfrac{A_2{}^{\left(\frac{\Delta'' {}^2 N}{\Delta n''}\right)} \Delta n''}{2.3\ldots \Delta n''} \times \Sigma P. \dfrac{A_3{}^{\left(\frac{\Delta''' {}^2 N}{\Delta n'''}\right)} \Delta n'''}{2.3\ldots \Delta n'''} \times \&c. \\ n' + n'' + n''' + \&c. = n. \end{cases}$$

26
$$\begin{cases} \left[B + A_1' x + A_1'' x^2 + \&c. + A_2' x + A_2'' x^2 + \&c. \right. \\ \left. + A_3' x + A_3'' x^2 + \&c. \right]^{-m} = M + B' x + B'' x^2 + \&c., \\ B^{(N)} = \Sigma (-1)^n \times m(m+1)\ldots(m+n-1) \times \dfrac{1}{B^{m+n}} \times \Sigma P. \dfrac{A_1{}^{\left(\frac{\Delta' {}^2 N}{\Delta n'}\right)} \Delta n'}{2.3\ldots \Delta n'} \\ \times \Sigma P. \dfrac{A_2{}^{\left(\frac{\Delta'' {}^2 N}{\Delta n''}\right)} \Delta n''}{2.3\ldots \Delta n''} \times \Sigma P. \dfrac{A_3{}^{\left(\frac{\Delta''' {}^2 N}{\Delta n'''}\right)} \Delta n'''}{2.3\ldots \Delta n'''} \times \&c. \\ n' + n'' + n''' + \&c. = n. \end{cases}$$

CAPITULO II.

De la sustitucion de una serie en otra, y del método general para el desarrollo de las funciones.

22. Sea dada una serie

$$z=a+a'\,y+a''\,y^2+\&c.+a^{(n)}y^n+\&c.$$

y supongamos que el valor de y es dado por otra

$$y=A'x+A''x^2+A'''x^3+\&c.$$

pidiéndose el valor de z en la serie ordenada por las potencias de x. Elevando á la potencia n la que representa el valor de y, se tendrá

$$y^n=2.3...n\,\Sigma x^N\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle Y}{\triangle^n}\right)\triangle n}}{2.3...\triangle n},$$

y sustituyendo este valor de y^n en el término general $a^{(n)}\,y^n$ de la anterior, vendrá el término general de esta representado en la espresion

$$x^N\times\Sigma 2.3...n\times a^{(n)}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle Y}{\triangle^n}\right)\triangle n}}{2.3...\triangle n},$$

no pudiendo en ella ser $n>N$ porque no podria existir ningun producto en el signo $\Sigma\,P$; pero sí tener todos los valores comprendidos entre $n=1$ y $n=N$. Bajo este supuesto, la fórmula nos indica que *el término general de la serie resultante, se compone de la suma de los términos*

generales del orden N *en la primera, segunda, tercera,* &c., *potencias de la que representa el valor de* y, *multiplicados respectivamente por los coeficientes* a′, a″, a‴, &c., *que afectan estas potencias en la serie primitiva.*

El resultado anterior está contenido en la fórmula (1).

23. Si la serie que representa el valor de y tuviese un término constante, siendo

$$y=A+A'x+A''x^2+A'''x^3+\&c.,$$

el término general de la potencia y^n hubiera sido

$$y^n=\Sigma x^N\times\Sigma n(n-1)\ldots(n-k+1)\times A^{n-k}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^k}\right)}\Delta k}{2.3\ldots\Delta k},$$

el cual consta de una suma infinita de términos, pues no exigiendo otra condicion sino la de que k sea menor que N, á la otra variable n pueden designarse todos los valores que se quieran. Representando por $f(x)=z$ la serie primitiva $a+a'x+a''x^2+\&c.$, si en la espresion anterior suponemos $k=0$, cuya condicion lleva consigo la de $N=0$, y damos á n todos los valores imaginables, vendrá la serie

$$a+a'A+a''A^2\ldots+a^{(n)}A^{(n)}+\&c.=f(A).$$

Si en la misma forma suponemos $k=1$, y damos á n todos los valores imaginables, la suma de productos representada por el signo $\Sigma P.$ no contiene mas que un término, que es $A^{(N)}$, y vendrá

$$A^{(N)}\left[a'+2a''A+3a'''A^2\ldots+n.a^{(n)}A^{n-1}+\&c.\right]=\frac{d.f.(A)}{d.A}\times A^{(N)}.$$

En general, para todo valor fijo $k=k$, sacando por factor comun dicha suma de productos, se tendrá

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^k}\right)\Delta k}}{2.3...\Delta k}$$

$$\times\Big[1.2.3...k.a^{(k)}+2.3...(k+1)a^{(k+1)}A...+n(n-1)...(n-k+1)$$

$$a^{(n)}A^{n-k}+\&c.\Big]=\frac{d^kf.(A)}{d.A^k}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^k}\right)\Delta k}}{2.3...\Delta k};$$

por consiguiente, escribiendo n en vez de k viene la fórmula (2), cuyo término general será finito siempre que se conozcan bajo forma finita los coeficientes diferenciales sucesivos de la funcion que representa la serie primitiva $f(x)$.

24. El problema de sustitucion que acabamos de resolver, envuelve en sí el método general de desarrollar en serie las funciones. Para el efecto, suponiendo que se trate de una funcion compuesta, desarrollaremos su primera simple, haremos despues la suma de términos $a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.$, escepto el constante igual á una segunda variable Z', y desarrollaremos la inmediata simple, volviendo á suponer nuevamente la suma de términos $a'_{,}Z'+a''_{,}Z'^2+a'''_{,}Z'^3+\&c.=$ á otra tercera variable Z'', y continuaremos así sucesivamente hasta el fin: sustituyendo despues consecutivamente en los términos generales de las series obtenidas, en vez de las variables Z'', Z', &c., sus valores, llegaremos al término general de la definitiva que apetecemos obtener.

25. Tratemos de aplicar este método al desarrollo de las dobles potencias de que nos hemos ocupado en el capítulo primero. Sea en general la funcion

$$\Big[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)^{-m}\Big]^{-m'}=M+B'x+B''x^2+B'''x^3+\&c.:$$

haciendo $a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.=Z$ se convierte en

$$\Big[B_{,}+(a+Z)^{-m}\Big]^{-m'};$$

desarrollando el binomio $a+Z$, será

$$(a+Z)^{-m}=a^{-m}-ma^{-m-1}Z\ldots+(-1)^{H}\frac{m(m+1)\ldots(m+H-1)}{2.3\ldots H}$$
$$\times a^{-m-H}Z^{H}+\&c.;$$

llamando A', A'', A''', &c., los coeficientes de este desarrollo, y sustituyéndole en la funcion anterior, vendrá

$$\left[B_{/}+a^{-m}+A'Z+A''Z^{2}+A'''Z^{3}+\&c.\right]^{-m'}$$
$$=M+B'x+B''x^{2}+B'''x^{3}+\&c.$$

el término general del primer miembro, suponiendo $B_{/}+a^{-m}=B$, y representándole por $A_{/}^{(N')}$ es, segun sabemos,

$$A_{/}^{(N')}=\Sigma(-1)^{n}\times m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)\times\frac{1}{B^{m'+n}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N'}{\triangle n}\right)}\triangle n}{2.3\ldots\triangle n};$$

siendo $A^{\left(\frac{\triangle N'}{\triangle n}\right)}=(-1)^{\frac{\triangle N'}{\triangle n}}\times\dfrac{m(m+1)\ldots(m+\frac{\triangle N'}{\triangle n}-1)}{2.3\ldots\frac{\triangle N'}{\triangle n}}\times a^{m-\frac{\triangle N'}{\triangle n}}$,

sustituyendo esta espresion dentro del signo $\Sigma P.$ observaremos que $P.\left(a^{m-\frac{\triangle N'}{\triangle n}}\right)^{\triangle n}=a^{mn-N'}$, cuyo factor saldrá por lo tanto fuera de dicho signo, y la espresion contenida en este quedará reducida á

$$\Sigma P.\ \frac{\left[(-1)^{\frac{\triangle N'}{\triangle n}}\times m(m+1)\ldots(m+\frac{\triangle N'}{\triangle n}-1)\right]^{\triangle n}}{\left(2.3\ldots\frac{\triangle N'}{\triangle n}\right)^{\triangle n}\times 2.3\ldots\triangle n}.$$

A la suma de productos representada en esta espresion, puede dársele otra forma. Para el efecto, advirtiendo que en ella no hay coeficiente constante, es decir que $\frac{\triangle N'}{\triangle n}$ debe tener precisamente un valor igual ó >1, elevemos á la potencia n la serie

$$\left(-mx+\frac{m(m+1)}{2}x^2\ldots+\frac{(-1)^{II}m(m+1)\ldots(m+II-1)}{2.3\ldots II}.x^{II}+\&c.\right)^n$$
$$=C^{(n)}x^n+C^{(n+1)}x^{n+1}+\&c.,$$

su término general será

$$C^{(N)}=2.3\ldots n\Sigma P.\frac{\left[(-1)^{\frac{\triangle N}{\triangle n}}\times m(m+1)\ldots(m+\frac{\triangle N'}{\triangle n}-1)\right]^{\triangle n}}{\left(2.3\ldots\frac{\triangle N'}{\triangle n}\right)^{\triangle n}\times 2.3\ldots\triangle n};$$

pero esta serie es el desarrollo de la funcion $\left[-1+(1+x)^{-m}\right]^n$, puesto que contiene todos los términos del desarrollo de la potencia $(1+x)^{-m}$ escepto el primero que es 1. Desarrollando pues en serie la última funcion considerada como un binomio, vendrá

$$\left[-1+(1+x)^{-m}\right]^n=(-1)^n+n(-1)^{n-1}\times(1+x)^{-m}\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2.3\ldots k}\times(-1)^{n-k}\times(1+x)^{-mk}+\&c.$$

El término general del desarrollo de $(1+x)^{-mk}$ es

$$(-1)^N\times\frac{mk(mk+1)\ldots(mk+N'-1)}{3\ldots N'}\times x^N,$$

el cual sustituido en la espresion anterior dará

$$\left[-1+(1+x)^{-m}\right]^n = \Sigma x^{N'} \times \Sigma (-1)^{n-k+N'}$$
$$\times \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)\times mk(mk+1)\ldots(mk+N'-1)}{2.3\ldots k\times 2.3\ldots N'},$$

en donde el coeficiente que multiplica á $x^{N'}$ se compone de la suma de todos los que resulten á esta espresion haciendo variar á k desde $k=1$ hasta su límite $k=n$; pues todos los factores $(1+x)^{-mk}$ de los términos de la serie anterior darán cada uno un solo término en que x esté elevado á N'. Debiendo este coeficiente ser igual al $C^{(N)}$ que hallamos antes, por provenir ambos del desarrollo en serie de una misma funcion, igualándolos, obtendremos la ecuacion siguiente:

$$\Sigma P. \frac{\left[(-1)^{\frac{\Delta N'}{\Delta^n}} \times m(m+1)\ldots(m+\frac{\Delta N'}{\Delta^n}-1)\right]^{\Delta^n}}{\left(2.3\ldots\frac{\Delta N'}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n} \times 2.3\ldots\Delta n} = \Sigma (-1)^{n-k+N'}$$
$$\times \frac{mk(mk+1)\ldots(mk+N'-1)}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k\times 2.3\ldots N'} \ldots\ldots \quad (a)$$

y en consecuencia el término general $A_{/}^{(N)}$ podrá escribirse así

$$A_{/}^{(N)} \times Z^{N'} = Z^{N} \times \Sigma(-1)^{N-k} \times m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)$$
$$\times \frac{mk(mk+1)\ldots(mk+N'-1)}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k\times 2.3\ldots N'} \times B^{-m'-n} \times a^{-mn-N'}.$$

En fin, sustituyendo en este término general en vez de $Z^{N'}$ su espresion

$$Z^{N'} = (a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.)^{N'} = 2.3\ldots N' \Sigma x^N \times \Sigma P. \frac{a^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta N'}\right)\Delta N'}}{2.3\ldots\Delta N'},$$

se tendrá escribiendo n' en vez de N' la fórmula (5), de la cual se deduce la (4), y ambas dan los coeficientes relativos á las potencias del término constante a, reducidos á una suma que se refiere á los valores de una sola variable k.

Estas fórmulas se aplicarán á las potencias positivas designadas por el esponente m cambiando en ellas el signo de esta letra.

26. La suma de productos indicada en la ecuacion (a) del número que antecede tiene un valor sumatorio independiente de la variable k en dos casos particulares. El primero de estos casos se verifica en la segunda potencia positiva, ó cuando $m=-2$. En este caso la funcion

$$\left[-1+(1+x)^{-m}\right]^n$$

se trasforma en $(2x+x^2)^n=x^n(2+x)_n$, cuyo término general es

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2.3\ldots k}\times 2^{n-k}\times x^{n+k},$$

y haciendo $n+k=N'$, $k=N'-n$, se trasforma en

$$\frac{n(n-1)\ldots(2n-N'+1)}{2.3\ldots(N'-n)}\times 2^{2n-N'}\times x^{N'},$$

en cuya virtud la suma de productos dada en dicha ecuacion (a) es

$$\frac{2^{2n-N'}}{2.3\ldots(2n-N')\times 2.3\ldots(N'-n)},$$

y vienen las mismas fórmulas (17) y (18) obtenidas en el capítulo primero.

El segundo caso se verifica cuando $-m=-1$, ó en la primera potencia negativa, en el que la misma funcion $\left[-1+(1+x)^{-m}\right]^n$ se trasforma en

$$\left[-1+\frac{1}{1+x}\right]^n=\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n=(-x)^n\times(1+x)^{-n}$$

cuyo término general es

$$(-1)^{n+k}\times\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{2.3\ldots k}\times x^{n+k};$$

y haciendo asimismo $n+k=N'$, $k=N'-n$, se trasformará en

$$(-1)^{N'}\times\frac{n(n+1)\ldots(N'-1)}{2.3\ldots(N'-n)}\times x^{N'}=$$

$$=(-1)^{N'}\times\frac{(N'-n+1)\,(N'-n+2)\ldots(N'-1)}{2.3\ldots(n-1)}\times x^{N'},$$

pues ambos quebrados reducidos á un comun denominador tienen el mismo numerador. La suma de productos de la ecuacion (a) será ahora

$$(-1)^{N'}\times\frac{(N'-n+1)(N'-n+2)\ldots(N'-1)}{[2.3\ldots(n-1)]^2\times n},$$

y en fin, las fórmulas (3) y (4) se convertirán en las (5) y (6).

27. Si tomamos ahora tres potencias sucesivas

$$\left\{B_2+\left[B_1+(a+a'x+a''x^2+\&c.)^{-m}\right]^{-m'}\right\}^{-m''}=M+B'x+B''x^2+\&c..$$

haciendo como lo hemos indicado en la regla general, $a'x+a''x^2+\&c.=Z$, se tendrá la funcion trasformada en

$$\left\{B_2+\left[B_1+(a+Z)^{-m}\right]^{-m'}\right\}^{-m''}$$

desarrollando en ella la primera potencia simple será

$$(a+Z)^{-m}=a^{-m}\ldots+\frac{(-1)^H\times m(m+1)\ldots(m+H-1)}{2.3\ldots H}\times a^{-m-H}Z^H+\&c.,$$

y llamando A', A'', A''', &c., estos coeficientes, haciendo nuevamente $A'x+A''x^2+A'''x^3+\&c.=Z'$, $B_{,}+a^{-m}=B'$, la funcion se trasformará en la

$$\left\{B_2+(B'+Z')^{-m'}\right\}^{-m''};$$

y por último, desarrollando el binomio $(B'+Z')^{-m'}$, y haciendo $B_2+B'^{-m'}=B$, obtendremos por la serie de operaciones ejecutadas en el problema de los dos números anteriores el término general

$$A_{,}^{(N')}.Z^{N'}=Z^{N'}\times\Sigma(-1)^{N'+k}\times$$

$$\frac{m''(m''+1)...(m''+n-1)\times m'k(m'k+1)...(m'k+N'-1)}{2.3...(n-k)\times 2.3...k\times 2.3...N'}$$

$$\times B^{-m''-n}\times B'^{-m'n-N'};$$

tenemos ahora

$$Z^{N'}=2.3...N'\times\Sigma Z^{N''}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N''}{\triangle N'}\right)}\triangle N'}{2.3...\triangle N'};$$

y siendo

$$A^{(H)}=\frac{(-1)^H\times m(m+1)...(m+H-1)}{2.3...H}\quad .$$

deduciremos para la suma de productos $\Sigma\ P.$ la misma espresion contenida en la ecuacion (a) y fórmula (12), y se tendrá

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N''}{\triangle N'}\right)}\triangle N'}{2.3...\triangle N'}=\Sigma(-1)^{N''+N'+k'}$$

$$\times\frac{mk'(mk'+1)...(mk'+N''-1)}{2.3...(N'-k')\times 2.3...k'\times 2.3...N''}\times a^{-mN'-N''};$$

finalmente, haciendo las sustituciones sucesivas del valor de esta suma

de productos y del de $Z^{N'}$, cambiando N', N'', en n', n'', vendrá la fórmula (7).

28. Veamos cómo igualmente se aplica el método general enunciado al desarrollo de los productos que consideramos en el capítulo 1.°

Tomemos primeramente el producto de dos series

$$\left[B_{/}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)(b+b'x+b''x^2+\&c.)\right]^{-m}$$
$$=M+B'x+B''x^2+\&c.:$$

haciendo

$$Z=a'x+a''x^2+\&c.,\ Z'=b'x+b''x^2+\&c.,$$

se trasformará en

$$\left[B_{/}+(a+Z)(b+Z')\right]^{-m}=\left[B_{/}+ab+aZ'+bZ+ZZ'\right]^{-m};$$

desarrollando esta potencia, considerándola como una simple suma de cantidades, se tendrá, suponiendo $B_{/}+ab=B$ para el término general caracterizado por la letra n, la espresion

$$\frac{(-1)_n\times m(m+1)\ldots(m+n-1)}{B^{m+n}}\times\frac{(aZ')^{\Delta' n}\times(bZ)^{\Delta'' n}\times(ZZ')^{\Delta''' n}}{2.3\ldots\Delta' n\times 2.3\ldots\Delta'' n\times 2.3\ldots\Delta''' n}$$

$$=\frac{(-1)^n\times m(m+1)\ldots(m+n-1)}{B^{m+n}}\times\frac{a^{\Delta' n}.\ b^{\Delta'' n}\times Z^{\Delta'' n+\Delta''' n}\times Z'^{\Delta' n+\Delta''' n}}{2.3\ldots\Delta' n\times 2.3\ldots\Delta'' n\times 2.3\ldots\Delta''' n}$$

en la cual, suponiendo $\Delta' n=n-n'$, $\Delta'' n=n-n''$, será

$$\Delta'' n+\Delta''' n=n',\ \Delta' n+\Delta''' n=n'',$$
$$\text{y}\ \Delta''' n=n-\Delta' n-\Delta'' n=n'+n''-n,$$

con lo cual el término anterior toma la forma

$$\frac{(-1)^n \times m(m+1)\ldots(m+n-1)}{B^{m+n}}$$

$$\times \frac{a^{n-n'}.\ b^{n-n''} \times Z^{n'}.\ Z^{n''}}{2.3\ldots(n-n') \times 2.3\ldots(n-n'') \times 2.3\ldots(n'+n''-n)}$$

en donde sustituyendo por Z, Z' sus espresiones, viene el mismo término de la fórmula (11) del capítulo anterior.

El producto de tres series

$$\left[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)(b+b'x+b''x^2+\&c.)(c+c'x+c''x^2+\&c.)\right]^{-m}$$
$$=M+B'x+B''x^2+\&c.$$

se trasformará del mismo modo, haciendo

$$a'x+a''x^2+\&c.=Z,\ b'x+b''x^2+\&c.=Z',\ c'x+c''x^2+\&c.=Z'',$$

en

$$\left[B_{,}+(a+Z)(b+Z')(c+Z'')\right]^{-m}=$$

$$=\left[B_{,}+abc+aZ'Z''+bZZ''+cZZ'+abZ''+acZ'+bcZ+ZZ'Z''\right]^{-m},$$

y el término general caracterizado por la letra n de la potencia indicada será

$$\frac{(-1).^n m(m+1)\ldots(m+n-1)}{B^{m+n}} \times \left[\frac{(aZ'Z'')^{\Delta' n}.\ (bZZ'')^{\Delta'' n}.\ (cZZ')^{\Delta''' n}.}{2.3\ldots\Delta' n \times 2.3\ldots\Delta'' n \times 2.3\ldots\Delta''' n}\right.$$

$$\left.\times \frac{(abZ'')^{\Delta^{\text{IV}} n}.\ (acZ')^{\Delta^{\text{V}} n}.\ (bcZ)^{\Delta^{\text{VI}} n}.\ (ZZ'Z'')^{\Delta^{\text{VII}} n}}{2.3\ldots\Delta^{\text{IV}} n \times 2.3\ldots\Delta^{\text{V}} n \times 2.3\ldots\Delta^{\text{VI}} n \times 2.3\ldots\Delta^{\text{VII}} n}=\right.$$

$$=\frac{a^{\Delta' n+\Delta^{\text{IV}} n+\Delta^{\text{V}} n}.\ b^{\Delta'' n+\Delta^{\text{IV}} n+\Delta^{\text{VI}} n}.\ c^{\Delta''' n+\Delta^{\text{V}} n+\Delta^{\text{VI}} n}.}{2.3\ldots\Delta' n \times 2.3\ldots\Delta'' n \times 2.3\ldots\Delta''' n \times 2.3\ldots\Delta^{\text{IV}} n}$$

$$\left.\times \frac{Z^{\Delta'' n+\Delta''' n+\Delta^{\text{VI}} n+\Delta^{\text{VII}} n}.\ Z'^{\Delta' n+\Delta''' n+\Delta^{\text{V}} n+\Delta^{\text{VII}} n}.\ Z''^{\Delta' n+\Delta'' n+\Delta^{\text{IV}} n+\Delta^{\text{VI}} n}}{2.3\ldots\Delta^{\text{V}} n \times 2.3\ldots\Delta^{\text{VI}} n \times 2.3\ldots\Delta^{\text{VII}} n}\right]:$$

haciendo los esponentes de a, b, c

$$\triangle' n+\triangle^{IV} n+\triangle^{V} n=n-n',\ \triangle'' n+\triangle^{IV} n+\triangle^{VI} n=n-n'',$$
$$\triangle''' n+\triangle^{V} n+\triangle^{VI} n=n-n''',$$

los de Z, Z', Z'', que contienen la suma de diferencias que á estos faltan para componer la cantidad n, serán respectivamente iguales á n', n'' y n'''. En consecuencia, agregando á las tres ecuaciones que anteceden la

$$\triangle' n+\triangle'' n+\triangle''' n+\triangle^{IV} n+\triangle^{V} n+\triangle^{VI} n+\triangle^{VII} n=n$$

se tendrán cuatro ecuaciones con siete incógnitas, y quedarán tres de estas indeterminadas; practicando la eliminacion se obtienen los valores siguientes:

$$\triangle''' n=z,\ \triangle'' n=n'''-n''+\triangle^{V} n-\triangle^{IV} n+z,$$
$$\triangle^{VI} n=n-n'''-\triangle^{V} n-z,\ \triangle^{VII} n=n''+n'-n+\triangle^{IV} n-z,$$

los cuales sustituidos en el coeficiente formarán un grupo de cuatro factores variables, cuyas sumas dos á dos son constantes, y por lo tanto podrán reemplazarse por los factores que provengan de estas sumas independientes de z, haciendo al efecto uso de la fórmula (10) del capítulo anterior. Estas sumas serán

$$\triangle''' n+\triangle^{VI} n=n-n'''-\triangle^{V} n,\ \triangle''' n+\triangle^{VII} n=n''+n'-n-\triangle^{IV} n,$$
$$\triangle'' n+\triangle^{VI} n=n-n''-\triangle^{IV} n,\ \triangle'' n+\triangle^{VII} n=n'+n'''-n+\triangle^{V} n,$$
$$\triangle'' n+\triangle''' n+\triangle^{VI} n+\triangle^{VII} n=n',$$

y por lo tanto viene la misma espresion (*c*) del número (13) del capítulo anterior.

En un producto de cuatro series resultarian por este método quince términos, y por lo tanto quince diferencias; y teniendo solo cinco ecuaciones quedarian diez indeterminadas; mas estas disminuirán y el procedimiento se simplificará efectuando los productos dos á dos.

29. Vamos ahora á determinar aquello en que se convierte la suma de productos $\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3...\Delta n}$ cuando se tiene

$$A^{(H)}=\Sigma(-1)^p\times m(m+1)...(m+p-1)\times a^{-m-p}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta H}{\Delta p}\right)}\Delta p}{2.3...\Delta p}$$

y no entra en combinacion en ella el coeficiente A°, ni tampoco el A'. Supongamos para el efecto la serie

$$\left[B_{,}+ma^{-m-1}.a'x+(a+a'x+a''x^2+\&c.)^{-m}\right]^{-m'}$$
$$=M+B'x+B''x^2+\&c.;$$

al desarrollar la potencia $-m$ de la serie que está dentro del paréntesis, su segundo término es $-ma^{-m-1}.a'x$, el cual se destruirá con el que ya existe, de modo que llamando A°, A', A'', &c., los coeficientes que resulten dentro de la llave despues de desarrollada esta potencia, se tendrá $A^\circ=B_{,}+a^{-m}$, $A'=0$, y en general todos los restantes

$$A^{(H)}=\Sigma(-1)^p\times m(m+1)...(m+p-1)\times a^{-m-p}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta H}{\Delta p}\right)}\Delta p}{2.3...\Delta p}:$$

el coeficiente ó término general de la serie resultante, elevando ésta á la potencia $-m'$, tendrá como sabemos por espresion, suponiendo $B=A^\circ=B_{,}+a^{-m}$,

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^n.\ m'(m'+1)...(m'+n-1)\times\frac{1}{B^{m'+n}}\times\Sigma P.\ \frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3...\Delta n},$$

y supuesto que $A'=0$ no entrará en la combinacion de este signo ΣP, pues todos los sumandos en que pudiera entrar se reducirian á 0.

Establecido esto hagamos $a'x+a''x^2+a'''x^3+$&c.$=Z$; la espresion dada se convierte en

$$\left[B'+ma^{-m-1}.\ a'x+(a+Z)^{-m}\right]^{-m'}$$

en la cual desarrollando la potencia $(a+Z)^{-m}$, y haciendo

$$Z'=-ma^{-m-1}a'x\ldots+\frac{(-1)^p.\ m(m+1)\ldots(m+p-1)}{2.3\ldots p}\times a^{-m-p}.\ Z^p+\&c.,$$

se trasformará en la

$$(B_{,}+ma^{-m-1}.\ a'x+a^{-m}+Z')^{-m'}=(B+ma^{-m-1}.\ a'x+Z')^{-m'}:$$

el término general del orden n de esta potencia de tres términos, considerados éstos como una simple suma de cantidades, será, llamándolo $A_{,}^{(n)}$ y representando por $n-q$, q las diferencias $\triangle'n$, $\triangle''n$,

$$A_{,}^{(n)}=\Sigma(-1)^n.\ m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)\times\frac{1}{B^{m'+n}}\times\frac{(ma^{-m-1}.\ a')^{n-q}}{2.3\ldots(n-q)\times2.3\ldots q}\times x^{n-q}.\ Z'^q:$$

la espresion ó término general de la potencia Z'^q, llamándole $A_2^{(H)}$, es, como sabemos,

$$A_2^{(H)}=2.3\ldots q\times\Sigma a^{-mq-H}\times\Sigma P.\frac{\left[(-1)^{\frac{\triangle H}{\triangle q}}.\ m(m+1)\ldots(m+\frac{\triangle H}{\triangle q}-1)\right]^{\triangle q}}{\left(2.3\ldots\frac{\triangle H}{\triangle q}\right)^{\triangle q}\times2.3\ldots\triangle q}=$$

$$=\Sigma(-1)^{H+q+k}\times\frac{q(q-1)\ldots(q-k+1)\times mk(mk+1)\ldots(mk+H-1)}{2.3\ldots k\times2.3\ldots H}\times a^{-mq-H},$$

y sustituyéndole en el anterior en vez de Z'^q dará

$$A_{,}^{(n)}=\Sigma(-1)^n\times m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)\times\Sigma\frac{(-1)^{H+q+k}\times q(q-1)\ldots(q-k+1)\times mk(mk+1)\ldots(mk+H-1)}{2.3\ldots k\times2.3\ldots H\times2.3\ldots q\times2.3\ldots(n-q)}\times\frac{m^{n-q}\ a^{(-m-1)(n-q)-mq-H}\times a'^{n-q}}{B^{m'+n}}\times x^{n-q}.\ Z^H:$$

el término general de la potencia Z^{H} es

$$Z^{H}=2.3...H\times\Sigma x^{H'}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta H'}{\Delta H}\right)\Delta H}}{2.3...\Delta H},$$

ó bien ordenándole por las potencias de a', que equivale á sacar este factor fuera del signo ΣP, será

$$Z^{H}=\Sigma x^{H'}\times\Sigma\frac{2.3...H}{2.3...r'}\times a'^{r'}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta(H'-r')}{\Delta(H-r')}\right)\Delta(H-r')}}{2.3...\Delta(H-r')},$$

y finalmente, sustituido este valor de Z^{H} en el que antecede de $A_{,}^{(n)}$, vendrá para el esponente de x la suma $n-q+H'=N$, y suponiendo $H-r'=r$, $n-q+H=n'$, de donde $H'-H=N-n'$, el esponente de a es $mn-n'$, el de a', $n-q+r'=n-q+H-r=n'-r$, y la cantidad $H'-r'=H'-H+r=N-n'+r$; con lo que, haciendo $n-q=\Delta' n'$, $H=\Delta'' n'$, el término general de la espresion de que tratamos será

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^{n}.\ m'(m'+1)...(m'+n-1)$$

$$\times\Sigma\frac{(-1)^{k+n+n'}\times mk(mk+1)...(mk+\Delta''n'-1)\times m^{\Delta' n'}}{2.3...(n-\Delta' n'-k)\times 2.3...\Delta' n'\times 2.3...k\times 2.3...(\Delta'' n'-r)}$$

$$\times\frac{a^{-mn-n'}.\ a'^{n'-r}}{B'^{m+n}}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta(N-n'+r)}{\Delta r}\right)\Delta r}}{2.3...\Delta r},$$

y teniendo al mismo tiempo

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^{n}\times m'(m'+1)...(m'+n-1)\times\frac{1}{B^{m'+n}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)\Delta n}}{2.3...\Delta n}$$

se infiere la fórmula (8).

En el número 20 del capítulo anterior hemos deducido el coeficiente que corresponde al caso de que tratamos para la segunda potencia positiva, ó cuando sea m positivo $=2$. Para deducirle de la fórmula que acabamos de obtener tendremos presente que

$$\Sigma(-1)^{n+n'+k}\times\frac{-2k(-2k+1)\ldots(-2k+n'-1)}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k}=\frac{2^{2n-n'}\times 2.3\ldots n'}{2.3\ldots(2n-n')\times 2.3\ldots(n'-n)}$$

y haciendo aplicacion á la suma análoga que existe en dicha fórmula, con la diferencia de que la cantidad n es en ella $n-\triangle' n'$, y la n' es $\triangle'' n'$, la suma de que se trata, referente á la variabilidad de k, y por lo tanto independiente de esta letra, quedará reducida á

$$\frac{2^{2n-n'}}{2.3\ldots(n'-n)}\times\Sigma\frac{(-1)^{\triangle' n'}\times 2.3\ldots\triangle'' n'}{2.3\ldots(2n-n'-\triangle' n')\times 2.3\ldots\triangle' n'\times 2.3\ldots(\triangle'' n'-r)}=$$

$$=\frac{2^{2n-n'}\times 2.3\ldots 2(n'-n)\times 2.3\ldots r}{2.3\ldots(2n-n')\times 2.3\ldots(n'-n)\times 2.3\ldots(n'+r-2n)\times 2.3\ldots(n'-r)},$$

siendo el segundo miembro el coeficiente obtenido en la fórmula (24) del capítulo anterior.

En el caso particular de $-m=-1$, sabemos igualmente que se tiene

$$\Sigma(-1)^{n+n'+k}\times\frac{k(k+1)\ldots(k+n'-1)}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k}=$$

$$=\frac{(-1)^{n'}\times(n'-n+1)(n'-n+2)\ldots n'\times 2.3\ldots(n'-1)}{(2.3\ldots(n-1))^2\times n},$$

y haciendo del mismo modo aplicacion á la fórmula que nos ocupa, en el mismo supuesto de que n está representada en ella por $n-\triangle' n'$, y

n' por $\triangle''n'$, el coeficiente se convertirá en

$$\Sigma\frac{(-1)^{\triangle''n'}\times(n'-n+1)(n'-n+2)\ldots\triangle''n'\times 2.3\ldots(\triangle''n'-1)}{(n-\triangle'n')\times[2.3\ldots(n-\triangle'n'-1)]^2\times 2.3\ldots\triangle'n'\times 2.3\ldots(\triangle''n'-r)}$$

y en consecuencia podrá establecerse la fórmula (9).

30. El problema de la sustitucion resuelto en la fórmula (1) de este capítulo da, como corolario, el coeficiente diferencial del orden N de una funcion mediata en funcion de los coeficientes diferenciales de las inmediatas sucesivas de que se compone. Sea efectivamente $f(p)$ una funcion mediata en la que p es funcion de x. Suponiendo que p reciba un incremento k, se tiene

$$f(p+k)=f(p)+\frac{d.f(p)}{d.p}.\,k+\frac{1}{2}.\,\frac{d^2.f(p)}{dp^2}.\,k^2.....$$

$$+\frac{1}{2.3\ldots n}\times\frac{d.^nf(p)}{dp^n}\times k^n+\&c.;$$

llamando h el incremento de x, que produce en p el k, será igualmente

$$k=\frac{d.p}{dx}.\,h+\frac{1}{2}.\,\frac{d^2.p}{dx^2}.\,h^2\ldots+\frac{1}{2.3\ldots N}\times\frac{d^N.p}{dx^N}.\,h^N+\&c.;$$

sustituyendo esta serie en la anterior se tendrá para la espresion de su término general $B^{(N)}$, teniendo presente que los coeficientes $a^{(n)}$, $A^{(H)}$ de la fórmula (1), son ahora

$$a^{(n)}=\frac{1}{2.3\ldots n}\times\frac{d^n.\,f^{(p)}}{dp^n},\quad A^{(H)}=\frac{1}{2.3\ldots H}\times\frac{d^H.p}{dx^H},$$

$$B^{(N)}=\Sigma\frac{d^nf(p)}{dp^n}\times\Sigma P.\left[\frac{d\frac{\triangle^N}{\triangle^n}.p}{dx\frac{\triangle^N}{\triangle^n}}\right]^{\triangle^n}\times\frac{1}{\left(2.3\ldots\frac{\triangle^N}{\triangle^n}\right)^{\triangle^n}\times 2.3\ldots\triangle n};$$

mas si desde luego hubiéramos desarrollado la funcion $f(p)$ por los incrementos h de x, hubiéramos tenido

$$f(p+k)=f(p)+\frac{d.f(p)}{dx}.h+\frac{d^2.f(p)}{dx^2}h^2\ldots+\frac{1}{2.3\ldots N}\times\frac{d^N.f(p)}{dp^N}\times h_N+\&c.,$$

y por tanto

$$B^{(N)}=\frac{1}{2.3\ldots N}\times\frac{d^N.f(p)}{dx_N};$$

luego igualando ambos valores viene la fórmula (10).

Si hubiésemos supuesto p funcion de q, q de r, &c., y la última de x, por medio de sustituciones sucesivas, llegaríamos á la fórmula (11).

31. En la ecuacion (a) del número 25 hemos determinado la espresion de la suma de productos que se refiere á los coeficientes de una potencia simple, la cual reproducimos ahora en las fórmulas (12). Como estas espresiones juegan en los cálculos de la especie que estamos tratando, vamos á deducir ahora el valor de la misma suma de productos cuando los coeficientes son los que pertenecen al desarrollo de una esponencial, ó bien el valor designado en la espresion

$$\Sigma P.\frac{1}{\left(2.3\ldots\frac{\Delta^N}{\Delta n}\right)^{\Delta n}\times 2.3\ldots\Delta n}.$$

Elevando á la potencia n los dos miembros de la ecuacion

$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}\cdots+\frac{x_N}{2.3\ldots N}+\&c.,$$

y llamando A, A', A'', &c., los coeficientes de la serie resultante, será

$$(e^x-1)^n=\Sigma A^{(N)}\,x^N,$$

$$A^{(N)}=2.3...n\times\Sigma P.\frac{1}{\left(2.3...\frac{\triangle^N}{\triangle^n}\right)^{\triangle^n}\times 2.3...\triangle n};$$

pero si desarrollamos el binomio $(e^x-1)^n$, vendrá

$$(e^x-1)^n=e^{xn}-ne^{x(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}.\,e^{x(n-2)}-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}.\,e^{x(n-3)}+\&c.,$$

y desarrollando en serie sus diferentes términos será

$$e^{nx}=1+nx+\frac{n^2x^2}{2}.....+\frac{n^N.\,x^N}{2.3...N}+\&c.$$

$$ne^{x(n-1)}=n+nx(n-1)+n.\frac{(n-1)^2.\,x^2}{2}.....+n\frac{(n-1)^N.\,x^N}{2.3...N}+\&c.,$$

$$\frac{n(n-1)}{2}.\,e^{x(n-2)}=\frac{n(n-1)}{2}.....+\frac{n(n-1)}{2}.\frac{(n-2)^N.\,x^N}{2.3...N}+\&c.$$

$$\&c.,\quad \&c.,\quad \&c.,\quad \&c.;$$

luego, sumando estas series y comparando el término general que multiplica á x^N, vendrá la fórmula (13).

Ecuaciones y fórmulas del capítulo 2.°

1
$$\begin{cases} z=a+a'y+a''y^2+a'''y^3\ldots+a^{(n)}y^n+\&c., \\ y=A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(H)}x^H+\&c., \\ z=a+B'x+B''x^2+B'''x^3\ldots+B^{(N)}x^N+\&c., \\ B^{(N)}=\Sigma 2.3\ldots n\times a^{(n)}\times\Sigma P.\dfrac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)}\triangle n}{2.3\ldots\triangle n}. \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} z=a+a'y+a''y^2+a'''y^3\ldots+a_{(n)}y^{(n)}+\&c.=f(y), \\ y=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(H)}x^H+\&c., \\ z=f(A)+B'x+B''x^2+B'''x^3\ldots+B^{(N)}x^N+\&c., \\ B^{(N)}=\Sigma\dfrac{d^n.f(A)}{dA^n}\times\Sigma\ P.\dfrac{a^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)}\triangle n}{2.3\ldots\triangle n}. \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} \left[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)^{-m}\right]^{-m'}=M+B'x+B''x^2+B'''x^3+\&c., \\ B^{(N)}=\Sigma(-1)^{n'+k}\times m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)\times \\ \qquad\dfrac{mk(mk+1)\ldots(mk+n'-1)}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k}\times\dfrac{a^{-mn-n'}}{B^{m'+n}}\times\Sigma P.\dfrac{a^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n'}\right)}\triangle n'}{2.3\ldots\triangle n'}, \\ B=B_{,}+a^{-m}. \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} A^{(H)}=\Sigma(-1)^p\times m(m+1)\ldots(m+p-1)\times\dfrac{1}{a^{m+p}}\times\Sigma P.\dfrac{a^{\left(\frac{\triangle H}{\triangle p}\right)}\triangle p}{2.3\ldots\triangle p}, \\ \Sigma\ P.\dfrac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)}\triangle n}{2.3\ldots\triangle n}=\Sigma(-1)^{n+n'+k}\times\dfrac{mk(mk+1)\ldots(mk+n'-1)}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k} \\ \qquad\qquad\times a^{-mn-n'}\times\Sigma P.\dfrac{a^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n'}\right)}\triangle n'}{2.3\ldots\triangle n'}. \end{cases}$$

Se supone que no entra en combinacion el factor A°.

5)
$$\left[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)^{-1}\right]^{-m}=M+B'x+B''x^2+B'''x^3+\&c.,$$

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^{n+n'}\times m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)$$

$$\times\frac{(n'-n+1)(n'-n+2)\ldots n'\times 2.3\ldots(n'-1)}{(2.3\ldots(n-1))^2\times n}\times\frac{a^{-n-n'}}{B^{m'+n}}$$

$$\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n'}\right)}\triangle n'}{2.3\ldots\triangle n'},$$

$$B=B_{,}+\frac{1}{a}$$

6)
$$A^{(H)}=\Sigma(-1)^p\times 1.2.3\ldots p\times\frac{1}{a^{p+1}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle H}{\triangle p}\right)}\triangle p}{2.3\ldots\triangle p},$$

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)}\triangle n}{2.3\ldots\triangle n}=\Sigma(-1)^{n'}\times\frac{(n'-n+1)(n'-n+2)\ldots n'\times 2.3\ldots(n'-1)}{(2.3\ldots(n-1))^2\times n}$$

$$\times\frac{1}{a^{n+n'}}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n'}\right)}\triangle n'}{2.3\ldots\triangle n'}.$$

Se supone que no entra en combinacion el factor A^0.

7)
$$\left\{B_2+\left[B_{,}+(a+a'x+a''x^2+\&c.)^{-m}\right]^{-m'}\right\}^{-m''}=M+B'x+B''x^2+\&c.,$$

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^{n''+k+k'}\times m''(m''+1)\ldots(m''+n-1)$$

$$\times\frac{m'k(m'k+1)\ldots(m'k+n'-1)\times mk'(mk'+1)\ldots(mk'+n''-1)}{2.3\ldots(n'-k')\times 2.3\ldots k'\times 2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k}$$

$$\times B^{-m''-n}\times B^{1-m'n-n'}\times a^{-mn'-n''}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n''}\right)}\triangle n''}{2.3\ldots\triangle n''},$$

$$B'=B_{,}+a^{-m},\ B=B_2+B^{1-m'}.$$

8 $$A^{(H)}=\Sigma(-1)^p\times m(m+1)\ldots(m+p-1)\times a^{-m-p}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta H}{\Delta p}\right)}\Delta p}{2.3\ldots\Delta p},$$

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n}=$$

$$=\Sigma\frac{(-1)^{k+n+n'}\times m^{\Delta' n'}\times mk(mk+1)\ldots(mk+\Delta'' n'-1)}{2.3\ldots(n-\Delta' n'-k)\times 2.3\ldots\Delta' n'\times 2.3\ldots(\Delta'' n'-r)\times 2.3\ldots k}\times$$

$$\times a^{-mn-n'}\times a'^{n'-r}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta(N-n'+r)}{\Delta r}\right)}\Delta r}{2.3\ldots\Delta r}.$$

Se supone que no entran en combinacion los factores A° ni A'.

9 $$A^{(H)}=\Sigma(-1)^p.\ 1.2.3\ldots p\times\frac{1}{a^{p+1}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta H}{\Delta p}\right)}\Delta p}{2.3\ldots\Delta p},$$

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n}=$$

$$=\Sigma\frac{(-1)^{\Delta'' n'}\times(n'-n+1)(n'-n+2)\ldots\Delta'' n'}{(n-\Delta' n')[2.3\ldots(n-\Delta' n'-1)]^2}$$

$$\times\frac{(\Delta'' n'-r+1)(\Delta'' n'-r+2)\ldots(\Delta'' n'-1)}{2.3\ldots\Delta' n'}$$

$$\times a^{-n-n'}\times a'^{n'-r}\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta(N-n'+r)}{\Delta r}\right)}\Delta r}{2.3\ldots\Delta r}.$$

Se supone que no entran en combinacion A° ni A'.

10 $$\frac{d^N.f(p)}{dx^N}=2.3...N\,\Sigma\frac{d^n.f(p)}{dp^n}\times\Sigma P.\left[\frac{d.\frac{\Delta^N}{\Delta^n}p}{dx\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}\right]^{\Delta^n}\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}:$$

p funcion de x.

11 $$\frac{d^N.f(p)}{dx^N}=\Sigma\,2.3...N\times 2.3...N'\times 2.3...N''\times\&c.\times\frac{d^n.f(p)}{dp^n}\times$$
$$\times\Sigma P.\left[\frac{d\frac{\Delta^{N'}}{\Delta^n}p}{dq\frac{\Delta^{N'}}{\Delta^n}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^{N'}}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}$$
$$\times\Sigma P.\left[\frac{d\frac{\Delta^{N''}}{\Delta^{N'}}q}{dr\frac{\Delta^{N''}}{\Delta^{N'}}}\right]^{\Delta^{N'}}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^{N''}}{\Delta^{N'}}\right)^{\Delta^{N'}}\times 2.3...\Delta N'}\times\&c...$$
$$\times\Sigma P.\left[\frac{d\frac{\Delta^N}{\Delta^{N^{(i)}}}t}{dx\frac{\Delta^N}{\Delta^{N^{(i)}}}}\right]^{\Delta^{N^{(i)}}}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^{N^{(i)}}}\right)^{\Delta^{N^{(i)}}}\times 2.3...\Delta N^{(i)}}:$$

p funcion de q, q funcion de r, &c., y la última funcion de x.

12 $$\Sigma P.\frac{\left[(-1)^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}\times m(m+1)...(m+\frac{\Delta^N}{\Delta^n}-1)\right]^{\Delta^n}}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}=\Sigma\,(-1)^{n+k+N}$$
$$\times\frac{mk(mk+1)...(mk+N-1)}{2.3...(n-k)\times 2.3...k\times 2.3...N'}$$
$$\Sigma\,P.\frac{\left[m(m-1)...(m-\frac{\Delta^N}{\Delta^n}+1)\right]^{\Delta^n}}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}=\Sigma(-1)^{k+n}$$
$$\times\frac{mk(mk-1)...(mk-N+1)}{2.3...(n-k)\times 2.3...k\times 2.3...N}.$$

$$13\begin{cases}\Sigma P.\dfrac{1}{\left(2.3\ldots\frac{\triangle^N}{\triangle^n}\right)^{\triangle^n}\times 2.3\ldots\triangle n}= \\ =\dfrac{n^N-n(n-1)^N+\dfrac{n(n-1)}{2}(n-2)^N-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3}.(n-3)^N+\&c.}{2.3\ldots n\times 2.3\ldots N}.\end{cases}$$

CAPITULO III.

De la inversion de las series, y método para determinar sus coeficientes cuando vienen dadas en ecuaciones diferenciales.

32. Espuestos ya los medios de desarrollar en serie las funciones obteniendo sus términos generales, vamos ahora á resolver el problema de la inversion de las mismas. Supongamos la serie

$$z=a'x+a''x^2+a'''x^3...+a^{(n)}x^n+\&c.$$

que nos proponemos invertir hallando el valor de x en z dado en la

$$x=A'z+A''z^2+A'''z^3...+A^{(\nu)}z^\nu+\&c.:$$

sustituyendo esta segunda serie que tratamos de conocer en la primera, y llamando B', B'', B''', &c., los coeficientes de la resultante, será

$$z=B'z+B''z^2+B'''z^3...+B^{(N)}z^\nu+\&c.;$$

como esta ecuacion debe verificarse cualquiera que sea el valor de z, deberán ser iguales á 0 los coeficientes que multiplican las mismas potencias de esta variable. Se tendrán pues las ecuaciones

$$B'=1,\ B''=0,\ B'''=0, \text{ y en general } B^{(N)}=0:$$

escribiendo en lugar de $B^{(N)}$ su valor general dado por la fórmula (1) del capítulo que antecede, se tendrá

$$\Sigma 2.3...n\times a^{(n)}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle^N}{\triangle^n}\right)}\triangle n}{2.3...\triangle n}=0.$$

Suponiendo en la espresion del primer miembro $n=1$, dentro del signo $\Sigma P.$ habrá un solo factor, que será por lo tanto $A^{(N)}$, y el sumando correspondiente á esta espresion se reducirá á $a'\ A^{(N)}$; ninguno de los demás sumandos podrá ya contener el coeficiente $A^{(N)}$, sino que los coeficientes que contengan serán por precision de un orden ó lugar inferior al señalado por la característica N. Esto supuesto, separando dicho sumando $a'\ A^{(N)}$, y despejando $A^{(N)}$ en la ecuacion anterior, vendrá

$$A^{(N)} = -\frac{1}{a'}\Sigma 2.3...n \times a^{(n)} \times \Sigma P. \frac{A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3...\Delta n},$$

teniendo presente que en el signo $\Sigma P.$ del segundo miembro entran todas las combinaciones de factores $A^{(H)}$, cuya característica es menor que N, ó bien todos los sumandos que indican los respectivos signos escepto el $a'\ A^{(N)}$.

Ahora bien: para obtener el coeficiente $A^{(N)}$ simplemente en funcion de cantidades conocidas, se hace necesario hacer desaparecer los factores $A^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)}$ por medio de sustituciones sucesivas. En cada sustitucion irán disminuyendo en una unidad los acentos de los factores de mayor característica que entran en las nuevas combinaciones, y al cabo de un cierto número de ellas podrán todos reducirse al A': como en todas las combinaciones se ha de verificar siempre que la suma de acentos multiplicados por los esponentes sea igual á la cantidad N, resulta que cuando llegue este caso, A' vendrá elevada á la potencia N, y por lo tanto A'^{N} será un factor comun á todos los términos de la espresion resultante.

Con el fin de obtener los términos homólogos que deben provenir de las sustituciones sucesivas, ordenaremos la espresion con respecto á las potencias de $-\frac{1}{a'}$, examinando qué cantidades multiplican cada una de estas potencias. Desde luego se ve que por cada sustitucion apa-

rece cuando menos un factor $-\frac{1}{a'}$, y por consiguiente el término en

que esta cantidad venga elevada á la primera potencia, será aquel que está dado inmediatamente en A' sin practicar sustitucion alguna. Suponiendo pues que en el producto $\Sigma P.$ todos los factores son iguales á A', este producto es A'^N, y el sumando ó término correspondiente á este supuesto será

$$-\frac{1}{a'}\times 2.3...N\times a^{(N)}\times\frac{A'^N}{2.3...N}=-\frac{1}{a'}\times a^{(N)}.\ A'^N...\ (a).$$

Los términos en que $-\frac{1}{a'}$ venga elevada á la segunda potencia serán aquellos que provengan de una sola sustitucion, y para ello es preciso que el producto $P.$ se componga de dos factores, de los que el uno sea A', á fin de que solo sea preciso hacer la sustitucion en el otro. Este producto tendrá pues en general la forma $A^{(\Delta N)}.\ A'^{\Delta' N}$, con lo que el valor de n es $n=\Delta' N+1$, y la suma de términos correspondiente á esta suposicion, vendrá espresada por

$$-\frac{1}{a'}\Sigma 2.3...(\Delta N'+1)\times a^{(\Delta' N+1)}\times\frac{A'^{\Delta' N}A^{(\Delta N)}}{2.3...\Delta' N}=$$

$$=-\frac{1}{a'}\Sigma\,(\Delta' N+1)\times a^{(\Delta' N+1)}\times A'^{\Delta' N}.\ A^{(\Delta N)};$$

el término correspondiente á una sustitucion en el factor $A^{(\Delta N)}$ es por lo que hemos obtenido en (a) $-\frac{1}{a'}\times a^{(\Delta N)}\times A'^{\Delta N}$; luego verificando esta sustitucion la anterior suma se reduce á

$$A'^N\times\left(-\frac{1}{a'}\right)^2\times\Sigma(\Delta' N+1)\times a^{(\Delta' 1)N}+.\ a^{(\Delta N)}.$$

Observando que la suma de las dos cantidades $\triangle N+\triangle' N+1=N+1$, resulta que podremos significar una y otra por las diferencias de dicha $N+1$, escribiendo $\triangle'(N+1)$, $\triangle(N+1)$; con esto el término anterior toma la forma

$$A'^{N}\times\left(-\frac{1}{a'}\right)^{2}\times\Sigma(\triangle' N+1)\times a^{[\triangle'(N+1)]}.\ a^{[\triangle(N+1)]};$$

pero asi como hemos formado este término de la sustitucion en el factor $A^{(\triangle N)}$, hubiéramos formado otro enteramente homólogo de la sustitucion en el factor $A^{(\triangle' N)}$, tomando por producto primitivo el $A^{(\triangle' N+1)}$ $A'^{\triangle N-1}$; luego ha de haber precisamente dos términos homólogos de los cuales el uno tiene por coeficiente $\triangle'(N+1)$, y el coeficiente del otro será $\triangle(N+1)$: la suma de ambos es igual á $N+1$, y la espresion anterior reducida será

$$A'^{N}\times\left(-\frac{1}{a'}\right)^{2}\times(N+1).\Sigma a^{[\triangle'(N+1)]}.\ a^{[\triangle(N+1)]}.\ \ldots\ (b).$$

Los términos en que $-\frac{1}{a'}$ venga elevada á la tercera potencia, deberán provenir, ó de verificar una sola sustitucion en dos factores diferentes, ó de verificar dos sustituciones en un solo factor. En el primer caso, el producto primitivo constará de tres factores $A^{(\triangle N)}$, $A^{(\triangle' N)}$, $A'^{\triangle'' N}$, siendo $n=\triangle'' N+2$, y la suma de términos correspondiente estará espresada por

$$-\frac{1}{a'}\times\Sigma\,2.3\ldots(\triangle'' N+2)\times a^{(\triangle'' N+2)}\times\frac{A^{(\triangle N)}\ A^{(\triangle' N)}\ A'^{\triangle'' N}}{2.3\ldots\triangle'' N}=$$

$$=-\frac{1}{a'}\times\Sigma\,(\triangle'' N+1)\,(\triangle'' N+2)\times a^{(\triangle'' N+2)}\times A^{(\triangle N)}.\ A^{(\triangle' N)}.\ A'^{\triangle'' N}:$$

verificando una sustitucion en cada uno de los factores $A^{(\triangle N)}$, $A^{(\triangle' N)}$, sus términos corrrespondientes deducidos de la ecuacion (a) son: $A'^{\triangle N}$

$\times\left(-\frac{1}{a'}\right)a^{(\Delta''N)}$, $A'^{\Delta'N}\times\left(-\frac{1}{a'}\right)a^{(\Delta'N)}$, y la suma anterior se trasformará en

$$\left(-\frac{1}{a'}\right)^3\times A'^{N}\times\Sigma(\Delta''N+1)\ (\Delta''N+2)\times a^{(\Delta''N+2)}.\ a^{(\Delta''N)}.\ a^{(\Delta'N)}.$$

Observando como antes que las tres cantidades $\Delta''N+2$, ΔN y $\Delta'N$ suman la cantidad $N+2$, y por lo tanto cada una de ellas puede representarse por el signo $\Delta(N+2)=\Delta N_{,}$, haciendo $N_{,}=N+2$, la espresion anterior podrá escribirse así

$$\left(-\frac{1}{a'}\right)^3\times A'^{N}\times\Sigma\Delta''N_{,}(\Delta''N_{,}-1)\times a^{(\Delta''N_{,})}.\ a^{(\Delta'N_{,})}.\ a^{(\Delta N_{,})};$$

y como por cada una de las diferencias $\Delta'N_{,}$, $\Delta N_{,}$ podremos formar un término homólogo, la suma de los tres coeficientes de estos términos será,

$$(\Delta''N_{,})^2+(\Delta'N_{,})^2+(\Delta N_{,})^2-N_{,}.\ .\ .\ .\ .\ (u).$$

Para obtener la suma de los términos homólogos que resulte de verificar dos sustituciones en un solo factor, es preciso que el producto primitivo se componga de dos únicos factores $A^{(\Delta_{,}N)}\ A'^{\Delta''N}$, siendo como anteriormente $n=\Delta''N+1$, y la suma de términos correspondientes

$$-\frac{1}{a'}\times\Sigma(\Delta''N+1)\times a^{(\Delta''N+1)}.\times A^{(\Delta_{,}N)}.\ A'^{\Delta''N};$$

la suma que corresponde á la verificacion de dos sustituciones en el factor $A^{(\Delta_{,}N)}$ será, segun resultado obtenido en la ecuacion (b) que antecede,

$$\left(-\frac{1}{a'}\right)^2\times A'^{\Delta_{,}N}\times\Sigma(\Delta_{,}N+1)\times a^{[\Delta(\Delta_{,}N+1)]}.\ a^{[\Delta'(\Delta_{,}N+1)]};$$

sustituyendo esta espresion en la anterior en vez del factor $A^{(\Delta_{,}N)}$, vendrá

$$\left(-\frac{1}{a'}\right)^2 \times A'^N \times \Sigma(\triangle''N+1)\,(\triangle_{,}N+1) \times a^{(\triangle''N+1)} \times a^{[\triangle(\triangle_{,}N+1)]}.$$

$$\times a^{[\triangle'(\triangle_{,}N+1)]}.$$

Ahora bien, las dos diferencias $\triangle(\triangle_{,}N+1)$, $\triangle'(\triangle_{,}N+1)$, que marcan los acentos ó el lugar en la serie de los dos últimos factores, suman $\triangle_{,}N+1$, cuya cantidad añadida á la $\triangle''N+1$ que marca el lugar en la serie del otro factor, da por suma total $N+2=N_{,}$, y por lo tanto podemos representarlas por los signos $\triangle N_{,}$, $\triangle' N_{,}$, $\triangle'' N_{,}$, haciendo $\triangle''N+1=\triangle'' N_{,}$, $\triangle'(\triangle_{,}N+1)=\triangle' N_{,}$, y $\triangle(\triangle_{,}N+1)=\triangle N_{,}$, con lo que será $\triangle_{,}N+1=\triangle N_{,}+\triangle' N_{,}$, y la espresion anterior se trasformará en

$$\left(-\frac{1}{a'}\right)^3 \times A'^N \times \Sigma \triangle'' N_{,}(\triangle' N_{,}+\triangle N_{,}) \times a^{(\triangle'' N_{,})}.\ a^{(\triangle' N_{,})}.\ a^{(\triangle N_{,})},$$

y como por cada una de las diferencias $\triangle N_{,}$, $\triangle' N_{,}$ hemos de obtener otro término homólogo, resultan tres cuya suma de coeficientes será,

$$\triangle N_{,}(\triangle' N_{,}+\triangle'' N_{,})+\triangle' N_{,}(\triangle N_{,}+\triangle'' N_{,})+\triangle'' N_{,}(\triangle N_{,}+\triangle' N_{,})=$$
$$2\triangle N_{,}\triangle' N_{,}+2\triangle N_{,}\triangle'' N_{,}+2\triangle' N_{,}\triangle'' N_{,}:$$

sumando este coeficiente con el (u) deducido anteriormente, tomando un producto de tres factores, se ve que la suma de los tres cuadrados de aquel con estos tres duplos componen el cuadrado $(\triangle N_{,}+\triangle' N_{,}+\triangle'' N_{,})^2=N_{,}^2$, y la suma total de ambos coeficientes es $N_{,}^2-N_{,}=N_{,}(N_{,}-1)=(N+1)\,(N+2)$, con lo que la de los términos que multiplican la tercera potencia de $-\frac{1}{a'}$ viene definitivamente representada por

$$\left(-\frac{1}{a'}\right)^3 \times A'^N \times (N+1)\,(N+2) \times \Sigma\, a^{[\triangle(N+2)]}.\ a^{[\triangle'(N+2)]}.\ a^{[\triangle''(N+2)]}..(c).$$

Los términos en que $-\frac{1}{a'}$ esté elevada á la cuarta potencia se obtendrán análogamente tomando en primer lugar una combinacion pri-

mitiva de cuatro factores distintos, de los que uno sea $A'\Delta'''^{N}$, y verificando una sustitucion en cada uno de los otros tres, se obtendrá por el mismo camino seguido antes, que la suma de coeficientes, suponiendo $N_{,}=N+3$ será

$$\Delta'''N_{,}(\Delta'''N_{,}-1)(\Delta'''N_{,}-2)+\Delta''N_{,}(\Delta''N_{,}-1)(\Delta''N_{,}-2)+$$
$$+\Delta'N_{,}(\Delta'N_{,}-1)(\Delta'N_{,}-2)+\Delta N_{,}(\Delta N_{,}-1)(\Delta N_{,}-2).$$

Despues tomaremos un producto de tres factores, verificando en uno de los acentuados una sustitucion dada en (a), y en el otro dos dadas en (b) alternativamente, y resultará, tomando todas las combinaciones diferentes que producen un mismo producto homólogo, que la suma de coeficientes de éste vendrá dada por

$$\Delta'''N_{,}(\Delta'''N_{,}-1)\left[2\Delta N_{,}+2\Delta'N_{,}+2\Delta''N_{,}\right]+$$
$$+\Delta''N_{,}(\Delta''N_{,}-1)\left[2\Delta N_{,}+2\Delta'N_{,}+2\Delta'''N_{,}\right]+$$
$$+\Delta'N_{,}(\Delta'N_{,}-1)\left[2\Delta N_{,}+2\Delta''N_{,}+2\Delta'''N_{,}\right]+$$
$$+\Delta N_{,}(\Delta N_{,}-1)\left[2\Delta'N_{,}+2\Delta''N_{,}+2\Delta'''N_{,}\right]=$$
$$=2\Delta'''N_{,}(\Delta'''N_{,}-1)(N_{,}-\Delta'''N_{,})+2\Delta''N_{,}(\Delta''N_{,}-1)(N_{,}-\Delta''N_{,})$$
$$+2\Delta'N_{,}(\Delta'N_{,}-1)(N_{,}-\Delta'N_{,})+2\Delta N_{,}(\Delta N_{,}-1)(N_{,}-\Delta N_{,}).$$

Finalmente, se tomará un producto de dos factores sustituyendo en el $A^{(\Delta,N)}$ la espresion (c), que pertenece á tres sustituciones sucesivas, con lo que obtendremos la siguiente tercera suma de coeficientes

$$\Delta'''N_{,}(N_{,}-\Delta'''N_{,})(N_{,}-\Delta'''N_{,}-1)+\Delta''N_{,}(N_{,}-\Delta''N_{,})(N_{,}-\Delta''N_{,}-1)$$
$$+\Delta'N_{,}(N_{,}-\Delta'N_{,})(N_{,}-\Delta'N_{,}-1)+$$
$$+\Delta N_{,}(N_{,}-\Delta N_{,})(N_{,}-\Delta N_{,}-1).$$

Verificando ahora la suma total de las tres obtenidas vendrá

$$N_{,}^{2}(\triangle'''N_{,}+\triangle''N_{,}+\triangle'N_{,}+\triangle N_{,})-$$
$$-3N_{,}(\triangle'''N_{,}+\triangle''N_{,}+\triangle'N_{,}+\triangle N_{,})+2(\triangle'''N_{,}+\triangle''N_{,}+\triangle'N_{,}+\triangle N_{,})$$
$$=N_{,}^{3}-3N_{,}+2N_{,}=N_{,}(N_{,}-1)(N_{,}-2)=(N+1)(N+2)(N+3).$$

En consecuencia, la suma de términos que multiplica la cuarta potencia de $-\frac{1}{a'}$ estará representada por

$$A'^{N}\times\left(-\frac{1}{a'}\right)^{4}\times(N+1)(N+2)(N+3).\times$$
$$\times\Sigma a^{[\triangle(N+3)]}.\ a^{[\triangle'(N+3)]}.\ a^{[\triangle''(N+3)]}.\ a^{[\triangle'''(N+3)]}.$$

Percibiéndose ya con claridad la ley que guardan estas espresiones, puede establecerse por analogía que la suma de términos que multiplicará la potencia m de $-\frac{1}{a'}$ estará representada por

$$A'^{N}\times\left(-\frac{1}{a'}\right)^{m}\times(N+1)(N+2)...(N+m-1)\times$$
$$\times\Sigma a^{[\triangle(N+m-1)]}.\ a^{[\triangle'(N+m-1)]}.\ a^{[\triangle''(N+m-1)]}.\ .\ .\ .\ .\times\&c.$$

En los cálculos anteriores hemos supuesto que todas las diferencias $\triangle(N+m-1)\ \triangle'(N+m-1)$...&c., son desiguales; mas si algunas fuesen iguales, viniendo el factor correspondiente elevado á una potencia $\triangle m$, entonces el producto deberá estar dividido por $2.3...\triangle m$. Esta propiedad debe ser comun á todos los casos en que se trate de sumas de combinaciones distintas análogas á las que consideramos, porque si tomamos una combinacion de factores

$$a^{(h)}.\ b^{(h')}.\ c^{(h'')}.\ d^{(h''')}.\ .\ .\ .\ .\&c.,$$

y apetecemos obtener todas las sumas de productos distintos en el supuesto de que haya igual número de cantidades a acentuadas, b acen-

tuadas, &c., resulta que en la combinacion que hemos puesto por ejemplo podrán formarse tantos productos diferentes cuanto sea el número de permutaciones que puedan efectuarse con los factores a, b, c, &c., mudando al efecto las características del número de acentos h, h', h''... &c., de a á b, de b á c...&c., y por lo tanto, este número de productos vendrá dado por $2.3...R$, siendo R el de factores; mas desde luego que los factores abc... &c. sean iguales, ya no podremos formar mas que una combinacion distinta, de modo que el número de productos diferentes obtenido en un caso al obtenido en otro está en razon de $1 : 2.3...R$. Si varias de las características h, h', h'', &c., fuesen iguales, el número de productos distintos que pueden obtenerse en la combinacion puesta por ejemplo, deberia tambien disminuir en razon del número de permutaciones que pueden efectuarse con dichas h, h', h''... &c., y por lo tanto el número de sumandos sería $2.3...r$ veces menor que el anterior, suponiendo que sea r el número de características iguales h, h', h''...&c.; mas en este caso, si las cantidades abc..., &c., se convierten todas en a, vendrá un factor $a^{(h)r}$, el que, para que la relacion entre el número de sumandos permanezca la misma, deberá estar dividido por $2.3...r$. Asi se comprueba en efecto, pues la suma de productos de que tratamos equivale al producto

$$(a+a'+a''...+a^{(H)})(b+b'+b''...+b^{(H)})(c+c'+c''...+c^{(H)})\times...\&c.,$$

que cuando las $a\,b$, &c., acentuadas son respectivamente iguales, se convierte en

$$(a+a'+a''...+a^{(H)})^R=2.3...R\times\frac{a^{(h)r}.\,a^{(h')r'}.\,a^{(h'')r''}...\&c.}{2.3...r\times2.3...r'\times2.3...r''\times\&c.},$$

en donde quitando el factor $2.3...R$, quedan las respectivas potencias divididas por $2.3...r$, $2.3...r'$...&c.

Aunque la consideracion que acaba de hacerse parece suficiente, sin embargo, afirmaremos el resultado del caso que nos ocupa examinando lo que sucede en los cálculos anteriormente hechos, cuando las características de los acentos que afectan los factores a son iguales.

Cuando obtuvimos el coeficiente relativo á la combinacion de dos factores $a^{[\Delta'(N+1)]}$. $a^{[\Delta(N+1)]}$, vimos que esta combinacion podia provenir de dos productos primitivos diferentes $A'^{\Delta' N}\, A^{(\Delta N)}$ y $A'^{\Delta N-1}\, A^{(\Delta' N+1)}$; cuando sea $\Delta'(N+1)=\Delta(N+1)$, se verificará que $\Delta' N=\Delta N-1$, y ambos productos no serán mas que uno $A'^{\Delta N-1}\, A^{(\Delta N)}$; por lo tanto, de los dos sumandos que entonces dedujimos, cuya adicion componia la cantidad $N+1$, en el caso presente solo quedará un sumando y un coeficiente $=\frac{N+1}{2}$.

Si en el producto que obtuvimos de tres factores suponemos igualmente que $\Delta'(N+1)=\Delta''(N+1)$, ó $\Delta' N_{,}=\Delta N_{,}$ los productos primitivos que den esta combinacion serán primero el $A'^{\Delta'' N}\times\frac{A^{(\Delta N)2}}{2}$ que produce el coeficiente $\Delta'' N_{,}(\Delta'' N_{,}-1)$, el cual deberá estar dividido por 2; y segundo el $A'^{\Delta N-2}\, A^{(\Delta Y)}\, A^{(\Delta'' N+2)}$, quedará un solo coeficiente $\Delta N(\Delta N-1)$; y como antes teníamos dos, debiendo en este caso ser iguales, resulta que cada uno será igual á la mitad de la suma; por lo tanto, pues, el coeficiente total producido por la combinacion que estamos considerando, será tambien la mitad del total que entonces obtuvimos. Igualmente, si en el producto $A^{(\Delta, N)}\, A'^{\Delta'' N}$, que tomamos para verificar las dos sustituciones, suponemos que las dos diferencias cuya suma era $\Delta, N+1$ sean iguales, el coeficiente que les corresponde dar se hallará dividido por dos; y si suponemos que una de estas diferencias reemplaza á la $\Delta'' N+1$, pasando á ser el esponente de A', en vez de dos combinaciones, y por lo tanto dos sumandos, solo obtendremos uno; y como estos sumandos habrian de ser iguales, resulta siempre el coeficiente igual á la mitad de la suma.

En fin, si en la misma combinacion de tres factores suponemos que $\Delta'' N+2=\Delta N=\Delta' N$, el producto primitivo será $A'^{(\Delta N-2)}\frac{A^{(\Delta N)2}}{2}$ (advirtiendo que el valor absoluto de ΔN, en la hipótesis que adopta-

mos, es tal que $3\triangle N=N+2$); y no pudiendo haber otro mas que este que produzca acentos iguales en los factores $a^{(\triangle''N_{,})}$ $a^{(\triangle'N_{,})}$ $a^{(\triangle N_{,})}$, tendremos un solo sumando en vez de tres, los que resultando iguales equivaldrá cada uno al tercio de la suma; y como al propio tiempo dicho producto primitivo está dividido por 2, vendrá el coeficiente dividido por 2.3. En la combinacion de dos factores se verificará igualmente, suponiendo $\triangle''N+1=\triangle'(\triangle_{,}N+1)=\triangle''(\triangle_{,}N+1)$, que en lugar de tres combinaciones diferentes que formamos reemplazando el esponente $\triangle''N$ de A' por las otras dos diferencias, ahora solo podemos obtener una, resultando del mismo modo un sumando en vez de tres; y como la diferencia $\triangle_{,}N$ se refiere á otros dos que son iguales, y por lo tanto el coeficiente relativo á las dos sustituciones ha de estar dividido por 2, resultará siempre el total partido por 2.3.

Estas consideraciones pueden hacerse estensivas á mayor número de factores iguales, y en consecuencia podremos establecer la fórmula (1), que resuelve el problema propuesto, teniendo presente que $A'=\frac{1}{a'}$.

33. Supongamos ahora dos series iguales

$$\&c.+b'''y^3+b''y^2+b'y=a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.,$$

y tratemos de obtener el valor de y en x. Igualando para el efecto ambas series á una tercera variable z, se tendrá, por la fórmula de inversion acabada de hallar, el valor de y en z en la serie

$$y=B'z+B''z^2+B'''z^3\ldots+B^{(N')}z^{N'}+\&c.,$$

en la cual la espresion del término general $B^{(N')}$ es

$$B^{(N')}=\Sigma(-1)^m\times(N'+1)(N'+2)\ldots(N'+m-1)\times\frac{1}{b'^{N'+m}}$$

$$\times\Sigma P.\frac{b^{\left(\frac{\triangle^{(N'+m-1}}{\triangle^m}\right)}}{2.3\ldots\triangle m}$$

Sustituyendo en esta serie el valor de z en x dado por el segundo miembro de la primitiva, se tendrá por la fórmula de sustitucion (1), capítulo anterior,

$$y=\Sigma 2.3...N'\times B^{(N')}\times \Sigma P.\frac{a\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^{N'}}\right)\Delta N'}{2.3...\Delta N'}\times x^N,$$

de que sustituyendo en vez de $B^{(N')}$ el valor que precede, se obtendrá la fórmula (2), que contiene la solucion del problema.

Hemos supuesto en los dos problemas que anteceden que en las series respectivas no existe término constante; mas si lo hubiese, en el primero de ellos se pasaria al primer miembro haciendo $z'=z-a$, y en la serie hallada por la fórmula (1) se repondria por z' este valor, siendo como ya sabemos los coeficientes de la resultante los diferentes coeficientes diferenciales de ella cuando la variable se convierte en $-a$. Con respecto al último problema se tiene

$$\&c.+b'''y^3+b''y^2+b'y=a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.$$

Invertiríamos del mismo modo la serie

$$z=b'y+b''y^2+b'''y^3+\&c.,$$

sustituyendo por z su valor en la resultante, cuyo valor, conteniendo un término constante, deberíamos aplicar la fórmula (2) del capítulo anterior para obtener la definitiva que nos proponemos.

34. La fórmula general (1) deducida por la inversion de las series en el número (32) que antecede, es aplicable á todos los casos en que exista el término $a'x$ en la serie que se trata de invertir; pero cuando éste falte todos los términos de la serie inversa toman una forma inasignable, por cuanto el coeficiente a' aparece en todos ellos como denominador, y se reducirán al ∞ si $a'=0$. Tratemos, pues, de hallar la solucion conveniente á este caso particular: sea

$$z=ax^P+a'x^{P+1}+a''x^{P+2}...+a^{(h)}x^{P+h}+\&c.,$$

la serie que nos proponemos invertir. Sacando en ella el factor comun x^p, y estrayendo la raiz p, será

$$z^{\frac{1}{p}}=z'=x\left[a+a'x+a''x^2...+a^{(h)}x^h+\&c.\right]^{\frac{1}{p}}=$$
$$A_{,}'x+A_{,}''x^2+A_{,}'''x^3+\&c.,$$

en la cual deberá verificarse, que efectuando el desarrollo de la potencia $\frac{1}{p}$, y llamando $A^{(H)}$ su término general sea

$$A_{,}^{(H+1)}=A^{(H)}=\Sigma(-1)^{n'}\times-\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}+1\right)...\left(-\frac{1}{p}+n'-1\right)\times a^{\frac{1}{p}-n'}$$
$$\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\triangle H}{\triangle n'}\right)\triangle n'}}{2.3...\triangle n'};$$

invirtiendo la serie anterior y llamando $B^{(N)}$ su término general será,

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^m\times(N+1)(N+2)...(N+m-1)\times\frac{1}{A_{,}'^{N+m}}$$
$$\times\Sigma P.\frac{A_{,}^{\left(\frac{\triangle(N+m-1)}{\triangle m}\right)\triangle m}}{2.3...\triangle m}:$$

ahora bien, sustituyendo en este término general en vez de los factores $A_{,}^{(H)}$ los $A^{(H)}$, observaremos que estos son los mismos que aquellos, con la sola diferencia de que se refieren á un valor anterior de la variable, es decir, que aquellos son una funcion de la característica H, que designa su lugar en la serie, y estos son igual funcion de la misma característica, con la diferencia de que sus valores se han de to-

mar asignando á esta los correspondientes inferiores en una unidad. Esto supuesto, si en el signo $\Sigma P.$ de la espresion que precede se escribe $A^{(H-1)}$ en vez de los factores $A_{,}^{(H)}$ suponiendo $\frac{\triangle(N+m-1)}{\triangle m}=H$,

la espresion de dicho signo tomará la forma $\Sigma P.\frac{A^{(H-1)\triangle m}}{2.3...\triangle m}$, y la suma

de los productos de los acentos por los esponentes de estos nuevos factores será $\Sigma H\triangle m-\Sigma\triangle m$; mas como en el producto de los factores anteriores se tenia $\Sigma H\triangle m=N+m-1$, resultará para la nueva suma el valor $\Sigma H\triangle m-\Sigma\triangle m=N+m-1-m=N-1$. El coeficiente general $B^{(N)}$ será, pues,

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^m\times(N+1)(N+2)...(N+m-1)\times\frac{1}{A^{N+m}}\times\Sigma P.\ \frac{A^{\left(\frac{\triangle(N-1)}{\triangle m}\right)}}{2.3...\triangle m}$$

sustituyendo por los factores $A^{(H)}$ que entran en este valor de $B^{(N)}$ sus espresiones en funcion de los coeficientes $a'\ a''$... &c., de la serie primitiva, que son las correspondientes al desarrollo de la potencia $\frac{1}{p}$, la

suma de productos indicada por el signo $\Sigma P.$ tendrá un valor análogo al deducido en general para estos casos en la fórmula (4) del capítulo 2.°, y será

$$\Sigma P.\ \frac{A^{\left(\frac{\triangle(N-1)}{\triangle m}\right)\triangle m}}{2.3...\triangle m}=\Sigma(-1)^{m+n+k}$$

$$\times\frac{-\frac{k}{p}\left(-\frac{k}{p}+1\right)...\left(-\frac{k}{p}+n-1\right)}{2.3...(m-k)\times2.3...k}\times a^{\frac{1}{p}m-n}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle(N-1)}{\triangle n}\right)\triangle n}}{2.3...\triangle n},$$

sustituyendo esta espresion en el anterior valor de $B^{(N)}$, y teniendo presente que $A=a^{\frac{1}{p}}$ será este

$$B^{(N)}=\Sigma(-1)^{n+k}\times(N+1)(N+2)\ldots(N+m-1)$$
$$\times\frac{-\frac{k}{p}(-\frac{k}{p}+1)\ldots(-\frac{k}{p}+n-1)}{2.3\ldots(m-k)\times 2.3\ldots k}\times\frac{1}{a^{\frac{N}{p}+n}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta(N-1)}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n};$$

en cuya espresion, siendo los esponentes independientes de la cantidad m, el valor que corresponda al coeficiente numérico por cada uno determinado de n debe componerse de la suma de todos los que se pueden obtener, considerando m y k variables entre sus límites respectivos, que son $m<n$ y $k<m$. Mas si en la espresion de $B^{(N)}$ de la fórmula (3) del capítulo 2.° se supone $B_{,}=0$, la cantidad B de dicha espresion se convierte en a^{-m}, y viene $a^{mm'-mn+mn-n'}=a^{mm'-n'}$, en cuyo caso el coeficiente numérico que corresponda á cada combinacion de esponentes en la tal espresion, debe tambien componerse de la suma de todos los que se obtengan, dando á n y k todos los valores posibles entre sus límites. Pero en este caso la funcion primitiva de que proviene esta espresion se convierte en $(a+a'x+a''x^2+\&c.)^{mm'}$, cuyo término general conocemos, y en el que el coeficiente numérico correspondiente á cada combinacion de esponentes es $mm'(mm'-1)\ldots(mm'-n'+1)$; luego se tendrá en general

$$\Sigma m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)\times\frac{(-1)^{n'+k}\times mk(mk+1)\ldots(mk+n'-1)}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k}=$$
$$=mm'(mm'-1)\ldots(mm'-n'+1).$$

El primer miembro de esta ecuacion es enteramente igual á aquel cuya suma nos proponemos determinar cambiando m' en N, m en $-\frac{1}{p}$,

n en m y n' en n, con la única diferencia de que carece del factor $m'=N$, el que siendo constante, y multiplicando todos los sumandos, multiplicará igualmente la suma. Se tendrá, pues,

$$\Sigma(-1)^{n+k}\times(N+1)(N+2)\ldots(N+m-1)\times$$

$$\times\frac{-\frac{k}{p}\left(-\frac{k}{p}+1\right)\ldots\left(-\frac{k}{p}+n-1\right)}{2.3\ldots(m-k)\times 2.3\ldots k}=$$

$$=\frac{1}{N}\times\frac{N}{p}\left(-\frac{N}{p}-1\right)\ldots\left(-\frac{N}{p}-n+1\right),$$

y el término general que buscamos vendrá dado en la fórmula (3). Esta fórmula es la mas general, y contiene la (1) haciendo en ella $p=1$.

35. Debiendo la fórmula que se acaba de hallar verificarse siempre cualquiera que sea el valor de p, aun cuando se le suponga negativo ó $=-p$, se infieren varias series que representarán el mismo valor de x. Tomando en efecto la

$$z=a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.,$$

si la dividimos por x^p será

$$\frac{z}{x^p}=\frac{a'}{x^{p-1}}+\frac{a''}{x^{p-2}}\ldots\ldots+a^{(p)}+a^{(p+1)}x+a^{(p+2)}x^2\ldots\ldots+a^{(p+h)}x^h+\&c.,$$

suponiendo que el término constante $a^{(p)}$ se divida en dos partes, de las que una sea α, y á la otra la conservemos la representacion $a^{(p)}$, se tendrá, despejando dicha α,

$$\alpha=z\times x^{-p}-a'x^{-p+1}-a''x^{-p+2}\ldots-a^{(p)}-a^{(p+1)}x-a^{(p+2)}x^2\ldots-a^{(p+h)}x^h-\&c.,$$

é invirtiendo esta serie por medio de la fórmula que acabamos de hallar (3), se tendrá

$$x=\Sigma x^{\frac{N'}{-p}}\times\frac{1}{N'}\Sigma(-1)^n\times\frac{N'}{-p}\left(\frac{N'}{-p}+1\right)\ldots\left(\frac{N'}{-p}+n-1\right)\times\frac{1}{z^{\frac{N'}{-p}+n}}$$

$$\times\Sigma P.\ \frac{a^{\left(\frac{\Delta(N'-1)}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n},$$

cambiando en esta espresion los signos de los factores $\frac{N'}{-p}$, $\frac{N'}{-p}+1$, $\frac{N'}{-p}+n-1$, que son en número de n, vendrá el factor $(-1)^n$, el qué, multiplicado por el $(-1)^n$ que ya existe, dará $+1$; mas como los coeficientes $-a^{(II)}$, que se hallan dentro del signo ΣP, son todos negativos, y equivalen por lo tanto á $-1\times a^{(II)}$, resulta que los productos indicados por este signo darán siempre $(-1)^n$, el cual podremos sacar fuera del mismo signo haciendo los factores positivos. En consecuencia, pues, se tendrá la ecuacion

$$x=\Sigma\frac{1}{a^{\frac{N'}{p}}}\times\frac{1}{N'}\times\Sigma(-1)^n\times\frac{N'}{p}\left(\frac{N'}{p}-1\right)\ldots\left(\frac{N'}{p}-n+1\right)\times z^{\frac{N'}{p}-n}$$

$$\times\Sigma\ P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta(N'-1)}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n}\ldots\ldots\ldots(a),$$

escrita en la fórmula (4), que da el valor de x ordenado por las potencias de $a^{\frac{1}{P}}$. Si queremos ordenar esta espresion por las potencias de $z^{\frac{1}{P}}$ deberemos suponer $N'-pn$ constante $e'=N$ en cada término, con lo que $N'=N+pn$, y sustituyendo, el factor $\frac{N'}{p}-1$ se convierte en

$\frac{N+pn}{p}-1=\frac{N}{p}+n-1$, y sucesivamente los demás en $\frac{N}{p}+n-2, \frac{N}{p}+$

$n-3$, &c., hasta el último, que será $\frac{N+pn}{p}-n+1=\frac{N}{p}+1$: luego el valor de x ordenado segun nos proponemos será el escrito en la fórmula (4'). Por cada potencia determinada de $z^{\frac{1}{p}}$, ó por cada valor fijo de N, puede tomar en esta fórmula n todos los valores imaginables, pues la única condicion que podrá limitar estos es la de $N+pn-1>n$, la cual se verifica siempre dando á n valores tan grandes como se quiera: además N puede tambien tener valores negativos, puesto que dicha condicion da únicamente $N>-n\ (p-1)+1$, y quedará satisfecha con valores negativos de N menores que los del segundo miembro de esta desigualdad. Resulta pues: 1.° que los coeficientes de las potencias de $z^{\frac{1}{p}}$ son series indefinidas, y 2.° que hay dos series, la una que se refiere á las potencias positivas de $z^{\frac{1}{p}}$, y la otra á las potencias negativas de la misma.

Si en la serie anterior escrita en la fórmula (4') suponemos $p=1$ y $\alpha=a'$, en cuyo caso dicha a' no entrará en la composicion del signo ΣP, vendrá exactamente la fórmula (1) mudando n en m; y si suponemos en la misma espresion $\alpha=1$, $p=1$, siendo a' el coeficiente de la primera potencia de x, vendrá la fórmula escrita en (4'').

36. Tomando el término general para la inversion obtenido en la fórmula (2), que cuando $p=1$ es

$$z^N B^{(N)}=z^N\times\Sigma(-1)^n\times(N+1)\,(N+2)\ldots(N+n-1)\times\frac{1}{a^{N+n}}$$

$$\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^{(N-1)}}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n}$$

si suponemos en él n constante, resultará que por cada valor fijo de esta cantidad vendrá un número infinito de sumandos, que provendrán de los sucesivos que se den á N desde $N=n+1$ hasta el ∞. Integrando n—1 veces esta suma, por cada integracion desaparecerá uno de los factores $N+1$, $N+2$, &c., y al cabo de las n—1 integraciones habrán desaparecido todos. Se tendrá pues, representando dicha suma indefinida mirándola como funcion de z por la característica $\varphi^{(n)} z$

$$\int^{n-1} \varphi^{(n)} z . dz^{n-1} = \Sigma(-1)^n \times \frac{z^{N+n-1}}{a^{N+n}} \times \Sigma P. \frac{a^{\left(\frac{\Delta(N-1)}{\Delta^n}\right)} \Delta n}{2.3...\Delta n} =$$

$$= (-1)^n . \frac{z^n}{a^{n+1}} \times \Sigma \frac{z^{N-1}}{a^{N-1}} \times \Sigma P. \frac{a^{\left(\frac{\Delta(N-1)}{\Delta^n}\right)} \Delta n}{2.3...\Delta n} \ldots\ldots (c).$$

Ahora bien, si en la serie primitiva

$$z = f(x) = ax + a'x^2 + a''x^3 ... + a^{(h-1)} x^h + \&c.$$

á que se refiere la inversion que consideramos, se sustituye $\frac{z}{a}$ en vez de x, se trasformará en

$$Z = f\left(\frac{z}{a}\right) = a \times \frac{z}{a} + a' \times \frac{z^2}{a^2} + a'' \times \frac{z^3}{a^3} ... + a^{(h-1)} \times \frac{z^h}{a^h} + \&c.$$

ó bien pasando el primer término del segundo miembro al primero y dividiendo ambos por $\frac{z}{a}$ en

$$a\left(\frac{Z-z}{z}\right) = a' \times \frac{z}{a} + a'' \times \frac{z^2}{a^2} ... + a^{(h)} \times \frac{z^h}{a^h} + \&c.$$

elevando á la potencia n ambos miembros de esta ecuacion vendrá

$$a^n \times \left(\frac{Z-z}{z}\right)^n = 2.3...n \Sigma \frac{z^{N'}}{a^{N'}} \times \Sigma P. \frac{a^{\left(\frac{\Delta N'}{\Delta^n}\right)} \Delta n}{2.3...\Delta n},$$

y como la cantidad variable que afecta el signo Σ tiene absolutamente la misma forma que la de la espresion (*c*) que antecede, con la única diferencia de estar representada por N' la cantidad genérica que allí lo está por $N-1$, se inferirá, sustituyendo en dicha espresion en vez de la referida suma variable el primer miembro de la ecuacion anterior, que

$$\int^{n-1} \varphi^{(n)} z.d.z^{n-1} = \frac{1}{a} \times \frac{(-1)^n}{2.3...n} \times (Z-z)^n,$$

y volviendo á diferenciar $n-1$ veces esta ecuacion será

$$\varphi^{(n)} z = \frac{1}{a} \times \frac{(-1)^n}{2.3...n} \times \frac{d^{n-1}(Z-z)^n}{dz^{n-1}}.$$

Ahora bien, el valor de x despues de invertida la serie se compone del primer término $\frac{z}{a}$ mas la suma indefinida de todas las funciones $\varphi' z$, $\varphi'' z ... \varphi^{(n)} z$, &c., correspondiente cada una á alguno de los infinitos valores que deben atribuirse á n; luego se tendrá la ecuacion 1.ª de las (5).

Siendo $(Z-z)^n$ una funcion mediata, aplicaremos para obtener su coeficiente diferencial del orden $n-1$ la fórmula 10 del capítulo 2.°, y será

$$\frac{d^{n-1}(Z-z)^n}{dz^{n-1}} = 2.3...(n-1) \times \Sigma \frac{d^r (Z-z)^n}{d(Z-r)^r}$$

$$\times \Sigma P. \left[\frac{d^{\frac{\Delta(n-1)}{\Delta r}} (Z-z)}{dz^{\frac{\Delta(n-1)}{\Delta r}}} \right]^{\Delta r} \times \frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta(n-1)}{\Delta r}\right)^{\Delta r} \times 2.3... \Delta r}$$

en cuya espresion se tiene que el primer coeficiente diferencial de los que se hallan dentro del signo Σ*P*. es

$\frac{d.(Z-z)}{d.z}=\frac{dZ}{d.z}-1$, y los restantes son en general $\frac{d^h(Z-z)}{dz^h}=\frac{d^hZ}{dz^h}$,

y la espresion del coeficiente diferencial que se halla fuera de dicho signo es

$$\frac{d^r(Z-z)^n}{d.(Z-z)^r}=n(n-1)\ldots(n-r+1)\times(Z-z)^{n-r};$$

luego sustituyendo estos nuevos valores en la espresion anterior, y sacando fuera del signo $\Sigma P.$ las potencias del primer coeficiente diferencial $\frac{d.Z}{dz}-1$, será

$$x=\frac{z}{a}+\frac{1}{a}\Sigma(-1)^n\times(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1).(Z-z)^{n-r}\times\frac{\left(\frac{dZ}{dz}-1\right)^{r-n'}}{2.3\ldots(r-n')}$$

$$\times\Sigma P.\left[\frac{d^{\left(\frac{\Delta^{(n-r+n'-1)}}{\Delta^{n'}}\right)}Z}{dz^{\left(\frac{\Delta^{(n-r+n'-1)}}{\Delta^{n'}}\right)}}\right]^{\Delta^{n'}}\times\frac{1}{\left(2.3\ldots\frac{\Delta^{(n-r+n'-1)}}{\Delta^{n'}}\right)^{\Delta^{n'}}\times 2.3\ldots\Delta n'}$$

en cuya espresion haciendo $n-r=N$, y cambiando r en n da la fórmula 2.ª de las (5), en la que multiplicando ambos miembros por a, y pasando z al 1.°, sería este $ax-z$, y la cantidad contenida en el signo Σ del segundo miembro quedaria en un todo semejante á la de la fórmula (4″); luego debe inferirse una relacion análoga á la de la serie que dió origen á esta, y por lo tanto se tendrá la ecuacion 3.ª de las (5), la cual reproduce la relacion $z=f\left(\frac{z+ax-z}{a}\right)=f(x)$, de que partimos. Esta conformidad puede mirarse como un comprobante de la exactitud de la fórmula general (1), relativa á la inversion que hemos obtenido por analogía, observando la ley de los términos de que se compone el general.

Si en la ecuacion 2.ª de las (5) se desarrolla la potencia $(z-Z)^N$, ordenando despues la serie por las potencias sucesivas de z, se tendrá otra espresion de x en z, y en los coeficientes de la primitiva cuando se sustituye en ella z en vez de x.

37. Si tenemos la serie

$$a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.=0,$$

y la elevamos á la potencia m, será

$$(a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.)^m=0.$$

Siempre que m sea positivo, el valor de x dado por esta ecuacion debe ser idéntico al dado por la anterior; mas si el esponente fuese negativo no se verificará lo mismo, porque entonces se tendrá

$$(a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.)^{-1}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Suponiendo m negativa, el término general de la potencia que antecede es, llamándole $A^{(N)}$,

$$A^{(N)}=\Sigma(-1)^p\times m(m+1)...(m+p-1)\times\frac{1}{a^{m+p}}\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta p}\right)}\Delta p}{2.3...\Delta p}.$$

El término constante de esta potencia será $\frac{1}{a^m}$, el cual pasándole al segundo miembro, y suponiendo que en este hubiese una cantidad z', vendrá á ser $z'-\frac{1}{a^m}=z$, y la ecuacion se trasformará en la siguiente:

$$A'x+A''x^2+A'''x^3...+A^{(H)}x^H+\&c.=z;$$

invirtiendo esta serie, y llamando $B^{(N')}$ el término general, será

$$B^{(N')}=\Sigma(-1)^n(N'+1)(N'+2)\ldots(N'+n-1)\times\frac{1}{A'^{N'+n}}$$

$$\times\Sigma P.\ \frac{A^{\left(\frac{\Delta(N'+n-1)}{\Delta^n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n},$$

si en esta espresion sustituimos por los factores $A^{(H)}$ sus valores, es fácil ver que nos hallamos en un caso idéntico al de la fórmula (8) del capítulo que precede, y por lo tanto se tendrá

$$\Sigma P.\ \frac{A^{\left(\frac{\Delta(N'+n-1)}{\Delta^n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n}=$$

$$=\Sigma\frac{(-1)^{n+k+n'}\times m\Delta'^{n'}\times mk(mk+1)\ldots(mk+\Delta''n'-1)}{2.3\ldots(n-\Delta'n'-k)\times 2.3\ldots\Delta'n'\times 2.3\ldots(\Delta''n'-r)\times 2.3\ldots k}\times$$

$$\times a^{-mn-n'}\times a'^{n'-r}\times\Sigma P.\ \frac{a^{\left(\frac{\Delta(N'+n-n'+r-1)}{\Delta^r}\right)}\Delta r}{2.3\ldots\Delta r}$$

sustituyendo este valor en vez de la suma de productos de la espresion anterior, y teniendo presente que el coeficiente A' que entra en ella es igual á $-ma^{-m-1}.\ a'$, y en consecuencia

$$\frac{1}{A'^{N'+n}}=\frac{(-1)^{N'+n}\times a^{(m+1)(N'+n)}}{m^{N'+n}.\ a'^{N'+n}}$$

vendrá

$$z^{N'}B^{(N')}=\Sigma(-1)^{N'+n+n'+k}\times(N'+1)\,(N'+2)\ldots(N'+n-1)$$

$$\times\frac{mk(mk+1)\ldots(mk+\triangle''n'-1)}{m^{N'+n-\triangle'n'}\times 2.3\ldots(n-\triangle'n'-k)\times 2.3\ldots\triangle'n'\times 2.3\ldots(\triangle''n'-r)\times 2.3\ldots k}$$

$$\times\frac{a^{N'(m+1)+n-n'}}{a'^{N'+n-n'+r}}\times\Sigma P.\ \frac{a^{\left(\frac{\triangle(N'+n-n'+r-1)}{\triangle r}\right)\triangle r}}{2.3\ldots\triangle r}\times z^{N'};$$

si en el valor que se ha supuesto á z se hace $z'=0$ será $z=-\frac{1}{a^m}$, y

$z^{N'}=(-1)^{N'}\times a^{-N'm}$, sustituido este valor en la espresion que se acaba de obtener el esponente de a se reduce á $N'+n-n'$, y haciendo esta cantidad $=N$, vendrá por fin dado el valor de x en la fórmula (6).

Si en vez de ser negativo el esponente m lo hubiéramos supuesto positivo, la fórmula (6) deberá tener lugar del mismo modo, mas en este caso la ecuacion á que se refiere estrayendo la raiz m se reduce á la

$$a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.=0$$

en la cual si pasamos a al primer miembro y la invertimos, vendrá

$$x=\Sigma(-1)^{N+r}\times(N+1)\ldots(N+r-1)\times\frac{a^N}{a'^{N+r}}\times\Sigma P.\ \frac{a^{\left(\frac{\triangle(N+r-1)}{\triangle r}\right)\triangle r}}{2.3\ldots\triangle r}.$$

Los coeficientes dados en esta espresion para la misma combinacion de esponentes deben ser iguales á los dados en dicha fórmula (6), puesto que ambos valores de x deben ser idénticos cualquiera que sea el de m: luego cambiando el signo de esta letra se tendrá igualándolos

$$\Sigma(-1)^{N+n+n'+k}$$

$$\times \frac{(N+n'-n+1)(N+n'-n+2)\ldots(N+n'-1)\times mk(mk-1)\ldots(mk-\triangle''n'+1)}{m^{N+\triangle''n'}\times 2.3\ldots(n--\triangle'n'-k)\times 2.3\ldots\triangle'n'\times 2.3\ldots(\triangle''n'-r)\times 2.3\ldots k}$$

$$=(-1)^{N+r}\times(N+1)\,(N+2)\ldots(N+r-1).$$

La suma significada en el primer miembro de esta ecuacion es indefinida ó ilimitada, por cuanto pueden asignarse todos los valores que se quieran á n y n', debiendo tan solo verificarse que $n<n'$. Esta suma ilimitada de términos debe dar por resultado la cantidad contenida en el segundo miembro, cualquiera que sea el valor de m, siempre que sea positivo; mas desde luego que se haga negativo dicha suma ilimitada cambiará de valor, debiendo sin embargo conservar uno mismo cualquiera que sea el valor absoluto de m, puesto que estrayendo del mismo modo la raiz indicada por este esponente se vendrá siempre á la ecuacion

$$(a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.)^{-1}=0$$

si pues en la fórmula hallada (6) suponemos m negativo é igual á -1, se trasformará en la (7), escribiendo en lugar del coeficiente que hemos empleado en ella el dado por la fórmula (9) del capítulo anterior. La solucion contenida en esta fórmula (7) debe en general ser inasignable, por cuanto si en las ecuaciones $\frac{1}{a+a'x}=0$, $\frac{1}{a+a'x+a''x^2}=0$, &c. se despeja x, se hallará $x=\frac{1}{0}-\frac{a}{a'}$, y en general una serie ordenada por las potencias del binomio $\frac{1}{0}-\frac{a}{a'}$. En consecuencia parece inferirse que no puede resolverse directamente una ecuacion de la forma

$$\frac{1}{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c.}=0.$$

y que cuando los problemas envuelvan alguna condicion de esta especie, como los geométricos que contengan la de *tang.* $= \frac{1}{0}$, será preciso recurrir á otra equivalente, como la de *sen.* $= 1$.

38. El método de sustituciones que hemos seguido en el número (32) para obtener el término general de la serie inversa, puede aplicarse igualmente á la determinacion de los coeficientes de series desconocidas dadas en ecuaciones diferenciales. Nos limitaremos únicamente á aplicar esta teoría á las ecuaciones diferenciales de segundo orden, pero el método que observemos podrá aplicarse igualmente á ecuaciones de un orden superior. Para empezar por el caso mas sencillo supondremos que la ecuacion propuesta no contiene el primer coeficiente diferencial, en cuyo caso su representacion general será

$$\varphi\left(x,\ y,\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0;$$

despejando el coeficiente diferencial de segundo orden se tendrá

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F.(y,x).$$

Para resolver esta ecuacion presupondremos á y una serie indeterminada, tal como

$$y=A+A'x+A''x^2+A'''x^3+\&c.,$$

y sustituyéndola en la ecuacion anterior, si hacemos

$$z=A'x+A''x^2+A'''x^3+\&c.,$$

y desarrollamos en serie la funcion por el método general esplicado en

el capítulo 2.°, el término general de esta serie estará genéricamente representado en

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\Sigma f(N', n).\ x^{N'}.\ z^n$$

en el que $f(N', n)$ representará en general una suma de términos en que entrarán elevados á varios esponentes los parámetros del problema ó funciones suyas, tales como las $B_1+a^{-m}=B'$, $B_2+B^{1-m'}=B$ de la fórmula (7) del mismo capítulo, ú otras cualesquiera. Esto supuesto, sustituyendo por z^n su valor, se tendrá

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\Sigma f(N', n)\times 2.3...n\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^{N''}}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3...\Delta n}\times x^{N'+N''}$$

el valor de la cantidad $\frac{d^2y}{dx^2}$, que forma el primer miembro, se deducirá de la serie presupuesta á y diferenciándola dos veces: sustituyendo, pues, el resultado de esta diferenciacion, y comparando los términos que afectan una misma potencia de la variable x, se tendrá, suponiendo $N=N'+N''$

$$(N+1)(N+2).\ A^{(N+2)}=\Sigma f(N', n)\times 2.3...n\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^{N''}}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3...\Delta n},$$

de donde

$$A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N', n)\times 2.3...n\times\Sigma P.\frac{a^{\left(\frac{\Delta^{(N''-2)}}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3...\Delta n}...\ (p),$$

en la referida serie presupuesta al valor de y deben considerarse como conocidas las cantidades A, A' y A''; las dos primeras porque representarán las constantes arbitrarias de la integracion, y la tercera A''

porque será el valor que tome $\frac{d^2y}{dx^2}$ en la ecuacion dada cuando se suponga en ella $x=0$, y por tanto $y=A$. Esto supuesto, si la suma de productos indicada por el signo ΣP. de la espresion que antecede, la suponemos compuesta únicamente de estas cantidades, se obtendrá una porcion de sumandos del término general, todos conocidos, que serán,

$$S.^{dos}\ A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N',\ n)\times 2.3...n$$

$$\Sigma\times\frac{A'^{\Delta'(N''-2)}\quad A''^{\frac{\Delta''(N''-2)}{2}}}{2.3...\Delta'(N''-2)\times 2.3...\frac{\Delta''(N''-2)}{2}}$$

verificándose en esta espresion las dos ecuaciones

$$\Delta'(N''-2)+\frac{\Delta''(N''-2)}{2}=n,\ \Delta'(N''-2)+\Delta''(N''-2)=N''-2,$$

de las que se sacará, despejando ambas diferencias,

$$\Delta'(N''-2)=2n-N''+2,\ \frac{\Delta''(N''-2)}{2}=N''-2-n,$$

y sustituyendo estos valores en los esponentes de $A'\ A''$, se trasformará en

$$S.^{dos}\ A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N',n)\times\frac{2.3...n}{2.3...(2n-N''+2)\times 2.3...(N''-n-2)}$$

$$\times A'^{2n-N''+2}\ A''^{N''-2-n}.....(a).$$

Para determinar una nueva serie de sumandos, consideremos que en la suma de productos de la espresion primitiva (p), además de los

dos factores conocidos A' A'', existe otro factor cualquiera desconocido, $A^{[\triangle_{,}(N''-2)]}$. La indicada suma de productos será

$$\Sigma \frac{A'^{\triangle'(N''-2)} \quad A''^{\frac{\triangle''(N''-2)}{2}} \quad A^{[\triangle_{,}(N''-2)]}}{2.3...\triangle'(N''-2)\times 2.3...\frac{\triangle''(N''-2)}{2}},$$

y estableciendo las hipótesis

$$\triangle'(N''-2)+\frac{\triangle''(N''-2)}{2}=n',\ \triangle'(N''-2)+\triangle''(N''-2)='\triangle(N''-2)$$

de que se saca

$$\triangle'(N''-2)=2n'-'\triangle(N''-2),\ \frac{\triangle''(N''-2)}{2}='\triangle(N''-2)-n',$$

se tendrá, para la espresion de la suma que nos proponemos, teniendo presente que la cantidad general $n=n'+1$,

$$S.^{dos}\ A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N_{,}', n'+1)$$

$$\times\frac{2.3...(n'+1)\times A'^{2n'-'\triangle(N_{,}''-2)}A''^{\,'\triangle(N''-2)-n'}\,A^{[\triangle_{,}(N_{,}''-2)]}}{2.3...[2n'-'\triangle(N_{,}''-2)]\times 2.3...['\triangle(N_{,}''-2)-n']}.$$

La suma de sumandos conocidos del factor $A^{[\triangle_{,}(N''-2)]}$ es, segun la espresion (a),

$$S.^{dos}\ A^{[\triangle_{,}(N''-2)]}=\frac{1}{\triangle_{,}(N_{,}''-2)[\triangle_{,}(N_{,}''-2)-1]}\times\Sigma f(\triangle_{,}'(N_{,}''-2), n'')$$

$$\times\Sigma\frac{2.3...n''\times A'^{2n''-\triangle_{,}''(N_{,}''-2)+2}\,A''^{\triangle_{,}''(N_{,}''-2)-2-n''}}{2.3...[2n''-\triangle_{,}''(N_{,}''-2)+2]\times 2.3...[\triangle_{,}''(N_{,}''-2)-2-n'']},$$

designándose por $\triangle_{,}'(N_{,}''-2)$, $(\triangle_{,}''(N_{,}''-2)$ dos partes ó sumandos de $\triangle_{,}(N_{,}''-2)$.

Si se hace la sustitucion, ó bien, lo que es lo mismo, se efectúa el producto de las dos últimas espresiones, y establecemos los supuestos

$$N_{,}'=\triangle'N',\ \triangle_{,}'(N_{,}''-2)=\triangle''N'$$

$$'\triangle(N_{,}''-2)+\triangle_{,}''(N_{,}''-2)-2='\triangle(N_{,}''-2)+\triangle_{,}(N_{,}''-2)-\triangle_{,}'(N_{,}''-2)-2=$$

$$=N_{,}''-4-\triangle''N'=N-N_{,}'-\triangle''N'-4=N-N'-4=N''-4$$

$'\triangle(N_{,}''-2)=\triangle'(N''-4)=s'$, $\triangle_{,}''(N_{,}''-2)-2=s''$, y por tanto

$$\triangle_{,}(N_{,}''-2)=\triangle''N'+s''+2;$$

designando asimismo por $\triangle'n$, $\triangle''n$, las cantidades n', n'', vendrá la espresion siguiente:

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(\triangle'N',\ \triangle'n+1)\times f(\triangle''N',\ \triangle''n)$$

$$\times\frac{2.3...(\triangle'n+1)}{2.3...(2\triangle'n-s')\times 2.3...(s'-\triangle'n)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle''N'+s''+1)(\triangle''N'+s''+2)}\times\frac{2.3...\triangle''n}{2.3...(2\triangle''n-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''n)}$$

$$\times A'^{2n-N''+4}\times A''^{N''-4-n}.\ .\ .\ .\ .(b).$$

El coeficiente, pues, de los factores A', A'' se obtendrá dando á las diferencias de este producto todos los valores posibles, y sumando los productos particulares que se obtengan; debiendo advertirse que entre estos valores debe comprenderse el de $\triangle'n=0$, porque esta suposicion equivale á considerar que en el producto primitivo existe solo el factor $A^{[\triangle_{,}(N_{,}''-2)]}$, que es en tal caso $A^{(N_{,}''-2)}$, practicando en él la sustitucion correspondiente, lo que puede suceder: mas no puede suponerse $\triangle''n=0$, porque esto equivaldria á suprimir de la combi-

nacion dicho factor $A^{[\Delta_r(N_r''-2)]}$, y por lo tanto se recaeria en la suma de productos conocidos dada en la espresion (a).

Continuando el mismo camino, para obtener la tercera suma de productos, tomaremos primeramente una combinacion en que existan dos factores desconocidos, y practicaremos una sustitucion en valores conocidos en cada uno. Sea, pues, esta combinacion

$$\frac{A'^{\Delta'(N_r''-2)}\ A''^{\frac{\Delta''(N_r''-2)}{2}}\ A^{[\Delta_r(N_r''-2)]}\ A^{[\Delta_{rr}(N_r''-2)]}}{2.3...\Delta'(N_r''-2)\times 2.3...\frac{\Delta''(N_r''-2)}{2}}$$

y estableciendo como en el caso anterior las hipótesis

$$\Delta'(N_r''-2)+\frac{\Delta''(N_r''-2)}{2}=n',\ \Delta'(N_r''-2)+\Delta''(N_r''-2)={}'\Delta(N_r''-2)$$

se tendrá para la espresion de la suma propuesta, teniendo presente que la cantidad general n es ahora $n'+2$

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\Sigma f(N_r', n'+2)$$

$$\times\frac{2.3...(n'+2)\times A'^{2n'-{}'\Delta(N_r''-2)}\ A''^{{}'\Delta(N_r''-2)-n'}\ A^{[\Delta_r(N_r''-2)]}\ A^{[\Delta_{rr}(N_r''-2)]}}{2.3...[2n'-{}'\Delta(N_r''-2)]\times 2.3...[{}'\Delta(N_r''-2)-n']};$$

la espresion en sumandos conocidos de $A^{[\Delta_r(N_r''-2)]}\ A^{[\Delta_{rr}(N_r''-2)]}$ será análogamente

$$S.^{dos}A^{[\Delta_r(N_r''-2)]}=\frac{1}{\Delta_r(N_r''-2)[\Delta_r(N_r''-2)-1]}\times\Sigma f(\Delta_r'(N_r''-2), n'')$$

$$\times\frac{2.3...n''\times A'^{2n''-\Delta_r''(N_r''-2)+2}\times A''^{\Delta_r''(N_r''-2)-2-n''}}{2.3...[2n''-\Delta_r''(N_r''-2)+2]\times 2.3...[\Delta_r''(N_r''-2)-2-n'']}$$

$$S.^{dos}\ A[\triangle_{//}(N_{/}''-2)]=\frac{1}{\triangle_{//}(N_{/}''-2)[\triangle_{//}(N_{/}''-2)-1]}\times\Sigma f(\triangle'_{//}(N_{/}''-2),n''')$$

$$\times\frac{2.3...n'''\times A'^{2n'''-\triangle_{//}''(N_{/}''-2)+2}\,A''\triangle_{//}''(N_{/}''-2)-2-n'''}{2.3...[2n'''-\triangle_{//}''(N_{/}''-2)+2]\times 2.3...[\triangle_{//}''(N_{/}''-2)-2-n''']},$$

y verificando el producto de estas tres espresiones, estableciendo antes los supuestos

$$N_{/}'=\triangle' N',\ \triangle_{/}'(N_{/}''-2)=\triangle'' N',\ \triangle_{//}'(N_{/}''-2)=\triangle''' N'$$

$$'\triangle(N_{/}''-2)+\triangle_{/}''(N_{/}''-2)-2+\triangle_{//}''(N_{/}''-2)-2=$$

$$='\triangle(N_{/}''-2)+\triangle_{/}(N_{/}''-2)+\triangle_{//}(N_{/}''-2)-\triangle_{/}'(N_{/}''-2)-\triangle_{//}'(N_{/}''-2)-4=$$

$$=N_{/}''-2-\triangle'' N'-\triangle''' N'-4=N-N_{/}'-\triangle'' N'-\triangle''' N'-6=$$

$$=N-N'-6=N''-6$$

$$'\triangle(N_{/}''-2)=\triangle'(N''-6)=s',\ \triangle_{/}''(N_{/}''-2)-2=\triangle''(N''-6)=s'',$$

$$\triangle_{//}''(N_{/}''-2)-2=\triangle'''(N''-6)=s''',$$

con lo que $\triangle_{/}(N_{/}''-2)=\triangle'' N'+s''+2,\ \triangle_{//}(N_{/}''-2)=\triangle''' N'+s'''+2$, vendrá sustituyendo $\triangle' n,\ \triangle'' n,\ \triangle''' n$ á las tres cantidades $n',\ n'',\ n'''$, la espresion

$$S.^{dos}\ A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma f(\triangle' N',\ \triangle' n+2)\times f(\triangle'' N',\ \triangle'' n)\times f(\triangle''' N',\ \triangle''' n)$$

$$\times\frac{2.3...(\triangle' n+2)}{2.3...(2\triangle' n-s')\times 2.3...(s'-\triangle' n)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle''N'+s''+1)(\triangle''N'+s''+2)}\times\frac{2.3...\triangle''n}{2.3...(2\triangle''n-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''n)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle'''N'+s'''+1)(\triangle'''N'+s'''+2)}\times\frac{2.3...\triangle'''n}{2.3...(2\triangle'''n-s''')\times 2.3...(s'''-\triangle'''n)}$$

$$\times A'^{2n-N''+6}\times A''^{N''-6-n}.\ldots.(c).$$

Se tendrá presente que en esta espresion, asi como en la (*b*) y todas las demás de esta especie, debe comprenderse el valor $\triangle'n=0$, mas los menores que podrán designarse á las otras dos diferencias, son $\triangle''n=1$, $\triangle'''n=1$.

En segundo lugar, para obtener otra suma de productos homólogos correspondiente al caso en que nos hallamos, tomarémos en la combinacion general un producto que contenga un solo factor desconocido, y practicarémos por él la sustitucion de segundo órden contenida en la espresion (*b*); se tendrá, pues,

$$S.^{dos}\ A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N_{,}',n'+1)$$

$$\times\frac{2.3...(n'+1)\times A'^{2n'-'\triangle(N_{,}''-2)}\ A'''^{\triangle(N_{,}''-2)-n'}\ A^{[\triangle_{,}(N_{,}''-2)]}}{2.3...[2n'-'\triangle(N_{,}''-2)]\times 2.3...['\triangle(N_{,}''-2)-n']}$$

$$S.^{dos}\ A^{[\triangle_{,}(N_{,}''-2)]}=\frac{1}{\triangle_{,}(N_{,}''-2)[\triangle_{,}(N_{,}''-2)-1]}$$

$$\times\Sigma\frac{f(\triangle'\triangle_{,}'(N_{,}''-2),\triangle'n''+1).f(\triangle''\triangle_{,}'(N_{,}''-2),\triangle''n'')\times 2.3...(\triangle'n''+1)}{2.3...(2\triangle'n''-s'')\times 2.3...(s''-\triangle'n'')}$$

$$\times\frac{1}{[\triangle''\triangle_{,}'(N_{,}''-2)+s'''+1][\triangle''\triangle_{,}'(N_{,}''-2)+s'''+2]}$$

$$\times\frac{2.3...\triangle''n''}{2.3...(2\triangle''n''-s''')\times 2.3...(s'''-\triangle''n'')}$$

$$\times A'^{2n''-\triangle_{,}''(N_{,}''-2)+4}\times A''^{\triangle_{,}''(N_{,}''-2)-4-n''},$$

y verificando la sustitucion, ó bien el producto de estas dos espresiones, estableciendo antes las hipótesis análogas á las de los casos anteriores

$$N_{,}'=\triangle' N',\ \triangle'\triangle_{,}'(N_{,}''-2)=\triangle'' N',\triangle''\triangle_{,}'(N_{,}''-2)=\triangle''' N'$$

$$'\triangle(N_{,}''-2)+\triangle_{,}''(N_{,}''-2)-4='\triangle(N_{,}''-2)+\triangle_{,}(N_{,}''-2)-\triangle_{,}'(N_{,}''-2)-4$$

$$=N_{,}''-2-\triangle'' N'-\triangle''' N'-4=N-N_{,}'-\triangle'' N'-\triangle''' N'-6=$$

$$=N-N'-6=N''-6$$

$$'\triangle(N_{,}''-2)=\triangle'(N''-6)=s',\ \triangle_{,}''(N_{,}''-2)-4=$$

$$=\triangle'(N''-6)+\triangle''(N''-6)=s''+s'''$$

$$\triangle_{,}(N_{,}''-2)=\triangle_{,}'(N_{,}''-2)+\triangle_{,}''(N_{,}''-2)=\triangle'' N'+\triangle''' N'+s''+s'''+4$$

representando por el signo $\sigma\triangle N'$ la suma parcial de las dos diferencias $\triangle'' N'+\triangle''' N'$, y por S la suma $s''+s'''$, escribiendo $\triangle' n$, $\triangle'' n$, $\triangle''' n$ en vez de n', $\triangle' n''$, $\triangle'' n''$, resultará la espresion

$$S.^{dos}\ A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma f(\triangle' N',\triangle' n+1).\ f(\triangle'' N',\triangle'' n+1).\ f(\triangle''' N',\triangle''' n)$$

$$\times\frac{2.3...(\triangle' n+1)}{2.3...(2\triangle' n-s')\times 2.3...(s'-\triangle' n)}$$

$$\times\frac{1}{(\sigma\triangle N'+S+3)(\sigma\triangle N'+S+4)}\times\frac{2.3...(\triangle'' n+1)}{2.3...(2\triangle'' n-s'')\times 2.3...(s''-\triangle'' n)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle'''N'+s'''+1)(\triangle'''N'+s'''+2)}\times\frac{2.3...\triangle'''n}{2.3...(2\triangle'''n-s''')\times 2.3...(s'''-\triangle'''n)}$$

$$\times A'^{2n-N''+6}\,A''^{N''-6-n}.....(d).$$

reuniendo esta espresion á la anterior (c) se tendrá la total que corresponde al tercer órden.

Debe observarse, que las combinaciones de valores s'', s''', que han de asignarse para obtener el coeficiente (c) relativo á la sustitucion en dos factores desconocidos, deben ser todas diferentes, así como lo son las combinaciones dobles $A^{[\triangle_{,}(N_{,}''-2)]}\,A^{[\triangle_{,,}(N_{,}''-2)]}$ que pueden formarse con los factores de que proceden. Cuando $s''=s'''$ será asimismo $\triangle_{,}(N_{,}''-2)=\triangle_{,,}(N_{,}''-2)$, y el doble producto anterior se convertirá en un cuadrado que en la espresion general deberá hallarse dividido por 2; mas como el valor del factor $A^{[\triangle_{,}(N_{,}''-2)]}$, á que se reducen en este caso los dos que consideramos, consta de varios términos ó sumandos, al elevarlo al cuadrado se habrá de tomar el duplo de los productos diferentes de estos términos, y por lo tanto desaparecerá el denominador 2, que únicamente deberá conservarse cuando todas las cantidades $\triangle''n=\triangle'''n$, $\triangle''N'=\triangle'''N'$, sean iguales respectivamente, correspondiendo entonces al cuadrado de un término particular. Esta observacion es general para las segundas, terceras, cuartas, &c., potencias de factores iguales.

Observando atentamente la marcha y resultados que hemos obtenido, podremos generalizar sin dificultad la espresion del coeficiente. Supongamos que se trate de obtener el del orden t; considerando para el efecto $t-1$ dividido en t' partes ó diferencias $\triangle'(t-1)$, $\triangle''(t-1)$ &c., se deberian tomar en la espresion general (p) t' factores desconocidos, verificando despues en cada uno las sustituciones correspondientes á su órden respectivo $\triangle'(t-1)$, $\triangle''(t-1)$ &c. Por cada sustitucion, ó bien por cada unidad que aumenta el órden de éstas, la cantidad N'', que afecta los esponentes de A', A'', disminuye dos unidades, de modo que en el órden t la cantidad á que se refieren las partes ó diferencias que se han representado por s', s'', s''', &c., será $N''-2t$: las carac-

terísticas $\triangle_{/}(N_{/}''-2)$, $\triangle_{//}(N_{/}''-2)$...&c., que representarán en general los acentos de los factores desconocidos, equivaldrán por la misma razon á la suma de diferencias $\triangle N'$ añadida á la suma de partes s en número de $\triangle(t-1)$, que corresponda al órden de sustitucion que se verifique, mas $2\triangle(t-1)$ unidades que deben agregarse á esta suma de partes. Esto supuesto, si prescindiendo del factor $\frac{1}{N(N-1)}$ designamos en general por $C^{(\triangle(t-1))}$ el coeficiente que corresponde al órden $\triangle(t-1)$, la espresion del coeficiente general de que tratamos podrá contenerse en la fórmula (8), atendiendo á que varias de las diferencias $\triangle(t-1)$ podrán ser iguales, debiendo en tal caso dividirse por el factor $2.3...\triangle t'$.

39. Pueden calcularse preventivamente tablas que contengan los valores de las sumas de coeficientes relativamente á la variabilidad de $N''-2t$, ó bien de las partes de esta cantidad s', s'', &c., que entran en la espresion general hallada, las cuales pueden aplicarse á la resolucion de todos los problemas de la naturaleza del que hemos considerado. Con este objeto se formarán primeramente las sumas de coeficientes que afectan los productos dobles $f(\triangle' N', \triangle' n+1)\ f(\triangle'' N', \triangle'' n)$ del modo siguiente. Supóngase que se quiere obtener la suma que afecta al producto $f(\triangle' N', n=8)\ f(\triangle'' N', n=5)$; se hará para ello en primer lugar $\triangle' n=7$ y $\triangle'' n=5$, y con estos valores se darán á s' y s'' todos los posibles, atendiendo á que han de estar comprendidos entre los límites $s'<14$ y >7, $s''<10$ y >5; para cada combinacion particular se formará el coeficiente

$$\frac{1}{2.3...(2\triangle' n-s')\times 2.3...(s'-\triangle' n)\times(\triangle'' N'+s''+1)(\triangle'' N'+s''+2)\times 2.3...(2\triangle'' n-s'')2.3...(s''-\triangle'' n)}$$

sumando despues todos los valores obtenidos. Acto contínuo se supondrá $\triangle' n=4$ y $\triangle'' n=8$, dando del mismo modo á s' y s'' todos los valores posibles, formando los respectivos coeficientes por la fórmula anterior, á diferencia de sustituirse en ella $\triangle'' N'$ á la $\triangle' N'$, se verificará su suma y se agregará esta á la suma anteriormente obtenida, formándose asi la total que corresponde al producto propuesto.

Halladas por el procedimiento que se acaba de esplicar las sumas que corresponden á todas las combinaciones de dobles productos, se procederá á obtener las que corresponden á los productos triples. Propóngase por ejemplo el $f(\triangle' N', n=8)$. $f(\triangle'' N', n=7)$. $f(\triangle''' N', n=5)$, se obtendrán primeramente las combinaciones que corresponden á la verificacion de una sustitucion de primer órden en dos factores distintos, haciendo sucesivamente

$$\triangle' n=6,\ \triangle'' n=7,\ \triangle''' n=5$$
$$\triangle' n=5,\ \triangle'' n=8,\ \triangle''' n=5$$
$$\triangle' n=3,\ \triangle'' n=8,\ \triangle''' n=7$$

y dando á s', s'', s''' todos los valores de que sean susceptibles, en cada una de estas tres combinaciones se calculará el coeficiente relativo á cada sistema particular de dichos valores, y se efectuará del mismo modo la suma total de ellos. Acto contínuo se procederá á obtener la suma que corresponde al supuesto de considerar un solo factor desconocido, verificando en él una sustitucion de 2.° órden. Se supondrá para este efecto primeramente $\triangle' n=7$, $\triangle_1 n=12$, en el supuesto de que $\triangle_1 n$ represente la suma $\triangle'' n+\triangle''' n$, y se darán igualmente á s' y S todos los valores distintos que quepan; para cada sistema de estos, se formará el factor

$$\frac{1}{2.3\ldots(2\triangle' n-s')\times 2.3\ldots(s'-\triangle' n)\times(_7\triangle N'+S+2)(_7\triangle N'+S+3)},$$

y buscando en la tabla ya formada, que contiene las sumas de coeficientes relativas á los productos dobles, el que corresponda al producto $f(\triangle'' N', n=7)\, f(\triangle''' N', n=5)$ y valor particular que tenga S, se multiplicará el factor que antecede por esta suma. Despues se supondrá $\triangle' n=6$, $\triangle_1 n=13$, y dando del mismo modo á s' S los valores posibles, se formará para cada sistema el factor escrito anteriormente, á diferencia de sustituir en él $\triangle'' N'$ á la $\triangle' N'$, y se multiplicará por la suma que corresponde en la tabla de dobles productos al $f(\triangle' N',$

$n=8)\ f(\triangle'''N', n=5)$, y valor particular de S que se considere. Finalmente, se hará $\triangle' n=4$, $\triangle_{,} n=15$, procediéndose de un modo absolutamente semejante. Obtenidas del modo esplicado las sumas que corresponden á los distintos supuestos de dos sustituciones de primer órden en dos factores y una de segundo órden en un factor, se verificará la suma total de las seis halladas, la que representará el coeficiente que corresponde al producto propuesto.

Para el cuarto órden, tomando por ejemplo el producto $f(\triangle' N', n=10)\ f(\triangle'' N', n=8)\times f(\triangle''' N', n=7).\ f(\triangle^{IV} N', n=5)$, se procederá de un modo análogo, obteniendo las sumas que corresponden al supuesto de considerar tres factores distintos, verificando en cada uno una sustitucion de primer órden, suponiendo para el efecto alternativamente $\triangle' n=7$, $\triangle' n=5$, $\triangle' n=4$ y $\triangle' n=2$, asignando á $\triangle'' n$, $\triangle''' n$, $\triangle^{IV} n$ los restantes valores que en cada uno de estos supuestos les corresponden, se darán asimismo á s', s'', s''', s^{IV} todos aquellos de que son susceptibles, y se formarán las sumas respectivas. Practicado esto se formarán las mismas sumas que corresponden al supuesto de considerar dos factores desconocidos, verificando en uno de ellos una sustitucion de primer órden, y en el otro una del segundo; para este efecto, suponiendo en primer lugar $\triangle' n=8$, se hará alternativamente $\triangle'' n=8$ y $\triangle_{,} n=12$, $\triangle'' n=7$ y $\triangle_{,} n=13$; en fin, $\triangle'' n=5$ y $\triangle_{,} n=15$, formando para cada sistema de estos valores los coeficientes correspondientes por el procedimiento ya indicado, dándose para ello á s', s'' y S todos los valores posibles. Por último, se establecerán los coeficientes que corresponden al supuesto de considerar un solo factor desconocido, y verificar en él una sustitucion de tercer órden: suponiéndose primeramente para este fin $\triangle' n=9$, $\triangle_{,} n=20$, se formará el factor

$$\frac{1}{2.3\ldots(2\triangle' n-s')\times 2.3\ldots(s'-\triangle' n)\times(_{\sigma}\triangle N'+S+5)(_{\sigma}\triangle N'+S+6)},$$

y multiplicándolo por la suma ya obtenida, que se refiere al producto dado de tercer orden y valor particular de S, se determinará el coefi-

ciente correspondiente, y lo mismo se ejecutará suponiendo despues alternativamente $\triangle' n=7$, $\triangle' n=6$, $\triangle' n=4$. Verificando por último la suma total de todos los coeficientes obtenidos, se determinará el que corresponde al producto de que se trata.

Sin ir mas lejos en esta esplicacion se percibe ya con claridad el órden general que debe seguirse en este cálculo. Asi, pues, para un 5.° producto se obtendrán primero los coeficientes que resultan de suponer cuatro factores desconocidos, verificando en cada uno una sustitucion de primer órden; 2.° los que resulten de suponer tres factores desconocidos, verificando en dos de ellos alternativamente una sustitucion de primer órden, y en el otro una del segundo; 3.° los que resulten de suponer dos factores desconocidos, verificando en ambos una sustitucion del segundo órden; 4.° los que resulten de suponer tambien dos factores desconocidos, verificando alternativamente en uno de ellos una sustitucion de primer órden y en el otro una de tercero; y 5.° y último, los que resultan de suponer un solo factor desconocido, verificando en él la sustitucion de cuarto órden. Por un método análogo se obtendrán los coeficientes que corresponden á los productos sestos, séptimos, &c.

Cuando algunas de las diferencias $\triangle'' n$, $\triangle''' n$, &c., ó bien $\triangle_{,} n$, $\triangle_{,,} n$, &c., sean iguales, siéndolo asimismo los valores de s'', s''', &c., ó S', S'', &c., que se les refieren, de modo que venga la espresion de un coeficiente elevado al cuadrado, cubo, &c., deberá entonces ser dividido por 2, 2.3, &c.

40. Calculadas por el método que se acaba de esplicar las tablas correspondientes á los varios productos de la funcion $f(N', n)$, relativamente á la variabilidad de la cantidad $N''-2t$, ó bien de S, para obtener la serie que espresa el valor de y en la ecuacion propuesta, cuando ella se refiera á un problema particular, tan solo será necesario formar la funcion general $f(N', n)$, desarrollando en serie su segundo miembro por los métodos esplicados en el capítulo 2.°, y despues por cada valor particular de N', n formar los dobles, triples, &c., productos $f(\triangle' N', \triangle' n)$ $f(\triangle'' N', \triangle'' n)$, $f(\triangle' N', \triangle' n)$ $f(\triangle'' N', \triangle'' n)$ $f(\triangle''' N', \triangle''' n)$, &c., obteniendo en cada uno de estos el coeficiente

numérico que multiplica una combinacion determinada de los parámetros ó sus funciones elevadas á los respectivos esponentes; multiplicando este coeficiente por el que corresponda en la tabla al producto respectivo, y sumando despues todos estos productos, referentes á la indicada combinacion, se obtendrá el coeficiente total que la corresponde.

41. Es fácil percibir que los procedimientos empleados para resolver la ecuacion diferencial del segundo órden, propuesta en el número anterior (39), pueden aplicarse á la resolucion de la ecuacion diferencial del tercer órden, y á los órdenes superiores. Sea dicha ecuacion del tercer órden

$$\frac{d^3y}{dx^3}=F.(x,y).$$

Presuponiendo á y una serie indeterminada, sustituyéndola como anteriormente, y verificando la igualacion de los coeficientes de las mismas potencias de la variable x, se tendrá la relacion

$$A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\times\Sigma f(N',n)\times 2.3...n\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta(N''-3)}{\Delta^n}\right)}\Delta n}{2.3...\Delta n}$$

que no se diferencia de la obtenida en el citado número 39, sino en que, en lugar de dos factores, hay ahora tres en el denominador del coeficiente que multiplica el signo Σ, y en que la cantidad $N''-2$ se ha convertido en $N''-3$. En vez de dos factores conocidos A', A'' (prescindiendo del A) que entonces teníamos, tendremos ahora tres, los dos primeros A', A'' serán constantes de la integracion, y el tercero A''' será aquello en que se convierte la funcion dada cuando se haga en ella $x=0$, $y=A$. Los esponentes de estos tres factores conocidos podrán representarse respectivamente por $\Delta'(N_{,}''-3)$, $\frac{\Delta''(N_{,}''-3)}{2}$, $\frac{\Delta'''(N_{,}''-3)}{3}$, teniéndose las ecuaciones

$$\Delta'(N_{,}''-3)+\frac{\Delta''(N_{,}''-3)}{2}+\frac{\Delta'''(N_{,}''-3)}{3}=n$$

$$\Delta'(N_{,}''-3)+\Delta''(N_{,}''-3)+\Delta'''(N_{,}''-3)={}'\Delta(N_{,}''-3)$$

que resolviéndolas, suponiendo $\frac{\Delta'''(N_{,}''-3)}{3}=p$, darán

$$\Delta'(N_{,}''-3)=2n+p-{}'\Delta(N_{,}''-3),$$

$$\frac{\Delta''(N_{,}''-3)}{2}={}'\Delta(N_{,}''-3)-n-2p,\ \frac{\Delta'''(N_{,}''-3)}{3}=p$$

y verificando sustituciones sucesivas obtendríamos resultados análogos relativos á estos tres esponentes, á los que allí obtuvimos relativos á los dos que entonces existian. La cantidad N'' disminuirá tres unidades en vez de que antes disminuia dos por cada sustitucion, de modo que, al cabo de t de estas se tendria $S=N''-3t$, y los factores

$$\frac{1}{(\sigma\Delta N'+S+2\Delta(t-1))(\sigma\Delta N'+S+2\Delta(t-1)-1)}$$

que entonces obtuvimos, serán ahora

$$\frac{1}{[\sigma\Delta N'+S+3\Delta(t\text{-}1)][\sigma\Delta N'+S+3\Delta(t\text{-}1)\text{-}1][\sigma\Delta N'+S+3\Delta(t\text{-}1)\text{-}2]}$$

Las diferencias que se refieren á los esponentes de A', A'', A''', pueden tambien significarse del modo que lo están en las siguientes ecuaciones.

$$\Delta'\Delta'(N''-3t)+\frac{\Delta'\Delta''(N-3t)}{2}+\frac{\Delta'\Delta'''(N-3t)}{3}=\Delta'n$$

$$\triangle''\triangle'(N''-3t)+\frac{\triangle''\triangle''(N-3t)}{2}+\frac{\triangle''\triangle'''(N-3t)}{3}=\triangle''n$$

$$\triangle'''\triangle'(N''-3t)+\frac{\triangle'''\triangle''(N-3t)}{2}+\frac{\triangle'''\triangle'''(N-3t)}{3}=\triangle'''n$$

&c., &c., &c.

Las consideraciones que acabamos de hacer pueden estenderse de un modo análogo á ecuaciones diferenciales de otros órdenes superiores.

42. Pasemos ahora al caso mas general y dificil, que es aquel en que la ecuacion diferencial de segundo órden sea completa, ó bien que contenga en su segundo miembro el coeficiente diferencial de primer órden mezclado con las variables x é y. Sea esta ecuacion

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F\left(x,\ y,\frac{dy}{dx}\right)$$

presuponiendo á y una serie indeterminada se tendrá

$$y=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots A^{(h)}x^h+\&c.=A+z$$

$$\frac{dy}{dx}=A'+2A''x+3A'''x^2\ldots\ldots\ldots+(h+1)\,A^{(h+1)}.\,x^h+\&c.=A'+z'$$

y sustituyendo estas series en la ecuacion propuesta, y desarrollando el segundo miembro, será

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\Sigma f(N',p,q).\,x^{N'}.\,z^p.\,z'^q$$

en fin, sustituyendo en esta espresion por z^p, z'^q, las espresiones que les corresponden en la serie presupuesta, sustituyendo tambien por $\frac{d^2y}{dx^2}$ el resultado de diferenciar dos veces dicha serie presupuesta, y comparando en ambos miembros los coeficientes que multiplican la

misma potencia de la variable x, se tendrá, prescindiendo de los factores $2.3...p$, $2.3...q$, que pueden considerarse incluidos en el símbolo general $f(N', p, q)$, la ecuacion siguiente:

$$A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N', p, q)\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta(N_r''-1)}{\Delta p}\right)\Delta p}}{2.3...\Delta p}$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left(\frac{\Delta(N_r'''-1)}{\Delta q}+1\right)\Delta q.\,A^{\left(\frac{\Delta(N_r'''-1)}{\Delta q}+1\right)\Delta q}}{2.3...\Delta q}.....(a)$$

Si el producto de las dos sumas indicadas por los signos $\Sigma P.$, compuestas de cantidades homólogas, pudiera reducirse á una sola suma, los procedimientos se simplificarian notablemente. Adoptando la marcha seguida en el capítulo primero, para obtener el coeficiente de un producto dado, cuando proviene de dos sumas de ellos, tomemos una combinacion general de cuatro factores

$$A^{(h')\Delta p}.\,A^{(h'')\Delta'' p}\times(h'A^{(h')})^{\Delta' q}\times(h''A^{(h'')})^{\Delta'' q},$$

en que los respectivos á cada una de las sumas que consideramos tengan unos mismos acentos; dicha combinacion se reducirá al producto de dos factores

$$A^{(h')\Delta' p+\Delta' q}\times A^{(h'')\Delta'' p+\Delta'' q}\times h'^{\Delta' q}.\,h''^{\Delta'' q},$$

é ínterin las sumas $\Delta' p+\Delta' q$, $\Delta'' p+\Delta'' q$ sean constantes, este último producto producido por los cuatro factores propuestos, permanecerá invariable. En consecuencia, el coeficiente total que lo multiplique se compondrá de la suma de todos los que corresponden á cada una de las dichas combinaciones de cuatro factores que lo producen. Será, pues,

$$\Sigma\frac{h'^{\Delta' q}.\,h''^{\Delta'' q}}{2.3...\Delta' p\times 2.3...\Delta'' p\times 2.3...\Delta' q\times 2.3...\Delta'' q},$$

y si esta espresion pudiera reducirse á un término sumatorio de la forma

$$\varphi(p, q)\times\varphi'(p+q, \Delta'p+\Delta'q, \Delta''p+\Delta''q)$$

comprendiendo el factor $\varphi(p, q)$ en el símbolo general $f(N', p, q)$, reduciríamos ambas sumas de productos de la espresion general (a) á una sola, á la cual se referirian las sustituciones sucesivas. La suma anterior es la misma de que se compone el término general del producto $(1+x)^p.\ (h'+h''x)^q$ que no puede reducirse á un término sumatorio único.

Si se supone que en la espresion general (a) no entran mas que las cantidades conocidas A', A'', el doble producto indicado por los dos signos $\Sigma P.$ será en general

$$\frac{A'^{\Delta'(N_1''-1)}\ A''^{\frac{\Delta''(N_1''-1)}{2}}\times(2A'')^{\frac{N_1'''-1+q}{2}}}{2.3...\Delta'(N_1''-1)\times 2.3...\frac{\Delta''(N_1''-1)}{2}\times 2.3...\frac{N_1'''-1+q}{2}}$$

y se tendrán las tres ecuaciones

$$\frac{N_1'''-1+q}{2}=q,\ \Delta'(N_1''-1)+\frac{\Delta''(N_1''-1)}{2}=p,$$

$$\Delta'(N_1''-1)+\Delta''(N_1''-1)=N_1''-1,$$

de las cuales se saca

$$N_1'''=q+1,\ \Delta'(N_1''-1)=2p-N_1''+1,\ \frac{\Delta''(N_1''-1)}{2}=N_1''-1-p,$$

y haciendo $N_1''+N_1'''=N-N'=N''$, los esponentes de A', A'' serán respectivamente $2p+q-N''+2$, $N''-p-2$, y la espresion general de los sumandos del valor de $A^{(N)}$, en cantidades conocidas, será

$$S.^{dos}\, A^{(N)} = \frac{1}{N(N-1)} \times \Sigma f(N', p, q)$$

$$\times \frac{2^q \times A'^{2p+q-N''+2} \cdot A''^{N''-p-2}}{2.3...q \times 2.3...(2p+q-N''+2) \times 2.3...(N''-p-q-2)} \ldots\ldots (b).$$

Como en la espresion que se acaba de hallar no hay mas que dos cantidades indeterminadas A', A'', y en los valores de sus esponentes vienen tres N'', p, q, se concibe que á cada combinacion fija de estos esponentes, corresponderá una suma de coeficientes determinada por la variabilidad de una de dichas tres cantidades. Si hacemos $N''-p-2 = M$, será $N' = N-M+p+2$; y si hacemos tambien $p+q=n$, $p=\triangle' n$, $q=\triangle'' n$, la suma de que hemos hecho mencion estará contenida en la espresion

$$\frac{1}{N(N-1)} \times \Sigma \frac{f(N-M+\triangle' n+2,\ \triangle' n,\ \triangle'' n) \cdot 2^{\triangle'' n} \times A'^{n-M} A''^{M}}{2.3...\triangle'' n \times 2.3...(n-M) \times 2.3...(M-\triangle'' n)},$$

y se obtendrá dando á $\triangle' n$, $\triangle'' n$ todas las combinaciones de valores posibles.

Considerando ahora que en la espresion general (a), además de los factores conocidos, exista uno desconocido, podremos establecer dos hipótesis: 1.ª que éste haga parte del producto que se refiere á las diferencias de p; y 2.ª que haga parte del producto que se refiere á las diferencias de q. En la primera de estas hipótesis la espresion general (a), aplicada á este caso particular, tomará la forma siguiente.

$$S.^{dos} A^{(N)} = \frac{1}{N(N-1)} \times \Sigma f(N'_{/}, p'+1, q')$$

$$\times \frac{A'^{2p'-{}'\triangle('N''-1)} \cdot A'''^{{}'\triangle('N''-1)-p'} \times A^{[\triangle_{/}('N''-1)]} \times (2A'')^{q'={}'N''-1}}{2.3...q' \times 2.3...\left(2p'-{}'\triangle('N''-1)\right) \times 2.3...\left({}'\triangle('N''-1)-p'\right)}$$

y como $'N''=N-N_{,}'-'N'''=N_{,}''-q'-1$, siendo $N_{,}'+N_{,}''=N$, esta espresion podrá escribirse asi,

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N_{,}', p'+1, q')$$

$$\times\frac{2^{q'}\times A'^{2p'-'\triangle(N_{,}''-q'-2)}.A''^{'\triangle(N_{,}''-q'-2)-p'+q'}.A^{[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)]}}{2.3...q'\times 2.3...\left(2p'-'\triangle(N_{,}''-q'-2)\right)\times 2.3...\left('\triangle(N_{,}''-q'-2)-p'\right)},$$

La espresion en sumandos conocidos del factor $A^{[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)]}$ es por la fórmula (b)

$$S.^{dos}A^{[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)]}=\frac{1}{\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)-1]}$$

$$\times\Sigma\frac{f(\triangle_{,}'(N_{,}''-q'-2), p'', q'')\times 2^{q''}}{2.3...q''\times 2.3...[2p''+q''-\triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)+2]}\times$$

$$\times\frac{A'^{2p''+q''-\triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)+2}A''^{\triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)-p''-2}}{2.3...[\triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)-p''-q''-2]},$$

y verificando la multiplicacion de estas dos espresiones, estableciendo para ello las hipótesis

$$N_{,}'=\triangle'N',\ \triangle_{,}'(N_{,}''-q'-2)=\triangle''N',$$

$$'\triangle(N_{,}''-q'-2)+\triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)-2='\triangle(N_{,}''-q'-2)$$

$$+\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)-\triangle''N'-2=N_{,}''-q'-2-\triangle''N'-2=$$

$$=N-N'-q'-4=N''-q'-4$$

$'\triangle(N_{,}''-q'-2)=s'-q'$, $\triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)-2=s''$, con lo que $s'+s''=N''-4$, y

$$\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)=\triangle''N'+s''+2$$

y escribiendo $\triangle'p$, $\triangle''p$ en vez de p', p'', y $\triangle'q$, $\triangle''q$ en vez de q', q'', vendrá

$$S.^{dos}\,A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{f(\triangle'N',\ \triangle'p+1,\ \triangle'q)\times f(\triangle''N',\ \triangle''p,\ \triangle''q)\times 2^q}{2.3\ldots\triangle'q\times 2.3\ldots(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3\ldots(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle''N'+s''+1)(\triangle''N'+s''+2)}$$

$$\times\frac{1}{2.3\ldots\triangle''q\times 2.3\ldots(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times 2.3\ldots(s''-\triangle''p-\triangle''q)}$$

$$\times A'^{2p+q-N''+1}\times A''^{N''-1-p}.\ldots.(c').$$

Pasando á la segunda hipótesis de que el factor desconocido haga parte del producto que se refiere á q, la espresion general (a) tomará la forma

$$S.^{dos}\,A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N_{,}',\ p',\ q'+1)$$

$$\times\frac{A'^{2p'-N_{,}''+1}\quad A''^{N_{,}''-1-p'}.(2A'')^{\frac{'\triangle(N_{,}'''+q')}{2}}\times\triangle_{,}(N_{,}'''+q')A^{[\triangle_{,}(N_{,}'''+q')]}}{2.3\ldots(2p'-N_{,}''+1)\times 2.3\ldots(N_{,}''-1-p')\times 2.3\ldots\frac{'\triangle(N_{,}'''+q')}{2}}$$

siendo $\frac{'\triangle(N_{,}'''+q')}{2}=q'$, de donde $'\triangle(N_{,}'''+q')=2q'$ y $\triangle_{,}(N_{,}'''+q')$ $=N_{,}'''+q'-2q'=N_{,}'''-q'$, cuyos valores sustituidos trasformarán esta espresion en

$$S.^{dos}\,A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N_{,}',\ p',\ q'+1)$$

$$\times\frac{2^{q'}\times A'^{2p'-N_{,}''+1}A''^{N_{,}''-1-p'+q'}\times(N_{,}'''-q')\,A^{(N_{,}'''-q')}}{2.3\ldots q'\times 2.3\ldots(2p'-N_{,}''+1)\times 2.3\ldots(N_{,}''-1-p')};$$

la espresion del factor $A^{(N_{,}'''-q')}$ en cantidades conocidas es, fórmula (b)

$$S.^{dos}\, A^{(N_{,}'''-q')}=\frac{1}{(N_{,}'''-q')(N_{,}'''-q'-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{f(\triangle'(N_{,}'''-q'),p'',q'')\times A'^{2p''+q''-\triangle''(N_{,}'''-q')+2}.\ A''^{\triangle''(N_{,}'''-q')-p''-2}\times 2^{q''}}{2.3...q''\times 2.3...[2p''+q''-\triangle''(N_{,}'''-q')+2]\times 2.3...[\triangle''(N_{,}'''-q')-p''-q''-2]}$$

y estableciendo de un modo análogo al caso anterior las hipótesis

$$N_{,}'=\triangle'N',\ \triangle'(N_{,}'''-q')=\triangle''N'$$

$$N_{,}''-1+\triangle''(N_{,}'''-q')-2=N_{,}''+N_{,}'''-q'-\triangle''N'-3=N-N_{,}'-\triangle''N'-q'-3$$

$$=N''-q'-3$$

$N_{,}''-1=s'-q'$, $\triangle''(N_{,}'''-q')-2=s''$, con lo que $s'+s''=N''-3$ y $N_{,}'''-q'=\triangle''N'+s''+2$, escribiendo tambien $\triangle'p$, $\triangle''p$, $\triangle'q$, $\triangle''q$ por p', p'', q', q'', será

$$S.^{dos}\, A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{f(\triangle'N',\triangle'p,\triangle'q+1)\times f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q)\times 2^{q}}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{1}{\triangle''N'+s''+1}$$

$$\times\frac{1}{2.3...\triangle''q\times 2.3...(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''p-\triangle''q)}$$

$$\times A'^{2p+q-N''+3}\times A''^{N''-3-p}.\ .\ .\ .\ .(c'').$$

Los denominadores de esta espresion y de la (c') son iguales en su forma, mas hay la diferencia de que las cantidades s', s'' suman en la (c') $N''-4$, y en esta $N''-3$. Pueden, sin embargo, hacerse homólo-

gas las dos espresiones, escribiendo en aquella $N'-1$ en vez de N', pues aumentando por este medio una unidad á N', y conservando siempre la suma $N'+N''=N$, tendrá que disminuir otra unidad N'', y por lo tanto, la cantidad $N''-4$ se reducirá á $N''-5$. Verificando, pues, la suma de ambas espresiones, será

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{2^{\gamma}[f(\triangle'N'-1,\triangle'p+1,\triangle'q)\times f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q)+}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)\times}...$$

$$...\frac{+(\triangle''N'+s''+2).f(\triangle'N',\triangle'p,\triangle'q+1)f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q)]}{\times(\triangle''N'+s''+1)(\triangle''N'+s''+2)}$$

$$\times\frac{1}{\times 2.3...\triangle''q\times 2.3...(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''p-\triangle''q)}$$

$$\times A'^{2p+q-N'+3}\times A''^{N'-3-p}.\ .\ .\ .\ .(c).$$

sin embargo, para efectuar el cálculo de la suma de coeficientes que corresponde á cada uno de los productos de esta espresion, dando valores á s', s'', es preciso tomar ambos productos separadamente uno del otro.

Pasemos ahora á considerar en la espresion (a) dos factores desconocidos, practicando en cada uno una sustitucion de primer órden.

Puede suponerse que ambos factores hagan parte del producto relativo á p, ó bien del producto relativo á q, y en fin, que el uno haga parte del un producto y el otro del otro; lo cual dará tres combinaciones distintas. En el primer caso la espresion general (a) será, observando que $q'=N_{/}'''-1$,

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N_{/}',p'+2,q')$$

$$\times\frac{2^{q'}\times A'^{2p'-'\triangle(N_{,}''-q'-2)}A''^{'\triangle(N_{,}''-q'-2)-p'+q'}A[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)]A[\triangle_{,,}(N_{,}''-q'-2)]}{2.3...q'\times 2.3...[2p'-'\triangle(N_{,}''-q'-2)]\times 2.3...[\,'\triangle(N_{,}''-q'-2)-p']},$$

y es fácil ver que, sustituyendo en vez de los factores desconocidos $A[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)]$, $A[\triangle_{,,}(N_{,}''-q'-2)]$, sus espresiones en cantidades conocidas dadas por la ecuacion (b), y haciendo supuestos análogos á los del caso que precede, se llegará á la espresion siguiente:

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{2^{q}\times f(\triangle'N',\triangle'p+2,\triangle'q)\times f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q)\times f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q)}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle''N'+s''+1)(\triangle''N'+s''+2)}$$

$$\times\frac{1}{2.3...\triangle''q\times 2.3...(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''p-\triangle''q)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle'''N'+s'''+1)(\triangle'''N'+s'''+2)}$$

$$\times\frac{1}{2.3...\triangle'''q\times 2.3...(2\triangle'''p+\triangle'''q-s''')\times 2.3...(s'''-\triangle'''p-\triangle'''q)}$$

$$\times A'^{2p+q-N'+6}\times A''^{N''-6-p}.....(d')$$

Si los dos factores desconocidos hacen parte del segundo signo $\Sigma P.$ relativo á q, la espresion general (a) tendrá la forma

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N_{,}', p', q'+2)$$

$$\times\frac{A'^{2p'-N_{,}''+1}\times A''^{N_{,}''-p'-1}(2A'')^{\frac{'\triangle(N_{,}'''+q'+1)}{2}}}{2.3...(2p'-N_{,}''+1)\times 2.3...(N_{,}''-1-p')}$$

$$\times\frac{h'.h''^{[\triangle_{,}(N_{,}'''+q'+1)]}\times A^{[\triangle_{,,}(N_{,}'''+q'+1)]}}{2.3...\frac{'\triangle(N_{,}'''+q'+1)}{2}}$$

y siendo $\frac{'\triangle(N_{,}'''+q'+1)}{2}=q'$, se tendrá $\triangle_{,}(N_{,}'''+q'+1)+$

$+\triangle_{,,}(N_{,}'''+q'+1)=N_{,}'''-q'+1$, pudiendo, por lo tanto, significarse estos dos sumandos como $\triangle^{s}$ de $N_{,}'''-q'+1$, y la espresion se trasformará en

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N_{,}', p', q'+2)$$

$$\times\frac{2^{q'}A'^{2p'-N_{,}''+1}A''^{N_{,}''-1-p'+q'}}{2.3...q'\times 2.3...(2p'-N_{,}''+1)2.3...(N_{,}''-1-p')}\times$$

$$\times\triangle_{,}(N_{,}'''-q'+1).A^{[\triangle_{,}(N_{,}'''-q'+1)]}\times\triangle_{,,}(N_{,}'''-q'+1)A^{[\triangle_{,,}(N_{,}'''-q'+1)]}$$

sustituyendo por los dos factores desconocidos sus espresiones

$$S.^{dos}A^{[\triangle_{,}(N_{,}'''-q'+1)]}=\frac{1}{[\triangle_{,}(N_{,}'''-q'+1)][\triangle_{,}(N_{,}'''-q'+1)-1]}$$

$$\times\Sigma f(\triangle_{,}'(N'''-q'+1), p'', q'')$$

$$\times\frac{2^{q''}A'^{2p''+q''-\triangle_{,}''(N_{,}'''-q'+1)+2}A''^{\triangle_{,}''(N_{,}'''-q'+1)-p''-2}}{2.3...q''\times 2.3...[2p''+q''-\triangle_{,}''(N_{,}'''-q'+1)+2]\times 2.3...[\triangle_{,}''(N_{,}'''-q'+1)-p''-q''-2]}$$

$$S.^{dos}A^{[\triangle_{,,}(N_{,}'''-q'+1)]}=\frac{1}{[\triangle_{,,}(N_{,}'''-q'+1)][\triangle_{,,}(N_{,}'''-q'+1)-1]}$$

$$\Sigma f(\triangle_{//}'(N_{/}'''-q'+1),p''',q''')$$

$$\times\frac{2^{q'''}A'^{2p'''+q'''-\triangle_{//}''(N_{/}'''-q'+1)+2}A''^{\triangle_{//}''(N_{/}'''-q'+1)-p'''-2}}{2.3...q'''\times 2.3...[2p'''+q'''-\triangle_{//}''(N_{/}'''-q'+1)+2]\times 2.3...[\triangle_{//}''(N_{/}'''-q'+1)-p'''-q'''-2]}$$

y suponiendo

$$N_{/}'=\triangle'N',\triangle_{/}'(N_{/}'''-q'+1)=\triangle''N',\triangle_{//}'(N_{/}'''-q'+1)=\triangle'''N'$$

$$N_{/}''-1-\triangle_{/}''(N_{/}'''-q'+1)-2+\triangle_{//}''(N_{/}'''-q'+1)-2=$$

$$=N_{/}''+N_{/}'''-q'+1-\triangle''N'-\triangle'''N'-3=N''-q'-4$$

$$N_{/}''-1=s'-q',\ \triangle_{/}''(N_{/}'''-q'+1)-2=s'',\ \triangle_{//}''(N_{/}'''-q'+1)-2=s''',$$

con lo que $s'+s''+s'''=N''-4$, será

$$S.^{dos}\ A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{f(\triangle'N',\triangle'p,\triangle'q+2)\times f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q)\times f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q)}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{1}{\triangle''N'+s'+1}$$

$$\times\frac{1}{2.3...\triangle''q\times 2.3...(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''p-\triangle''q)}$$

$$\times\frac{1}{\triangle'''N'+s'''+1}$$

$$\times\frac{1}{2.3...\triangle'''q\times 2.3...(2\triangle'''p+\triangle'''q-s''')\times 2.3...(s'''-\triangle'''p-\triangle'''q)}$$

$$\times A'^{2p+q-N''+1}\times A''^{N''-4-p}.....(d'').$$

Considerando, por último, que el uno de los dos factores desconocidos

hace parte del producto relativo á p, y el otro del relativo á q, la fórmula general (a) sería haciendo la modificacion conveniente

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N_{,}',\ p'+1,\ q'+1)$$

$$\times\frac{2^{q'}\times A'^{2p'-'\Delta(N_{,}''-1)}A'''^{\Delta(N_{,}''-1)-p'+q'}A^{[\Delta_{,}(N_{,}''-1)]}(N_{,}'''-q')\,A^{(N_{,}'''-q')}}{2.3...q'\times 2.3...[2p'-'\triangle(N_{,}''-1)]\times 2.3...['\triangle(N_{,}''-1)-p']}$$

y en fin, sustituyendo en vez de los factores desconocidos $A^{[\Delta_{,}(N_{,}''-1)]}$ $A^{(N_{,}'''-q')}$, sus espresiones dadas por la ecuacion (b), y haciendo supuestos análogos á los del caso anterior, vendrá la espresion siguiente.

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{f(\triangle'N',\triangle'p+1,\triangle'q+1)\times f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q)\times f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q)}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle''N'+s''+1)(\triangle''N'+s''+2)}$$

$$\times\frac{1}{2.3...\triangle''q\times 2.3...(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''p-\triangle''q)}$$

$$\times\frac{1}{\triangle'''N'+s'''+1}$$

$$\times\frac{1}{2.3...\triangle'''q\times 2.3...(2\triangle'''p+\triangle'''q-s''')\times 2.3...(s'''-\triangle'''p-\triangle'''q)}$$

$$\times A'^{2p+q-N''+5}\times A''^{N''-5-p}.....(d''').$$

Como los factores desconocidos que se refieren á las partes s'', s''', pueden cambiar de lugar, perteneciendo el que se refiere á s'' al producto relativo á q, y el que se refiere á s''' al producto relativo á p,

deberá haber otro sumando igual al anterior cambiando los oficios de estas letras. Esto quiere decir, que para determinar la suma de coeficientes que multiplica el producto de la espresion anterior, se han de dar primeramente á s'', s''' todos los valores sucesivos que les quepan bajo la forma que está escrita, y despues se han de cambiar los oficios de $\triangle''N'$ y $\triangle'''N'$, escribiendo ésta donde está aquella y aquella donde está ésta, y volviendo á asignar á s'', s''' todos los valores que les quepan, se sumarán ambos resultados para obtener dicho coeficiente.

Si análogamente á lo que practicamos en el caso de considerar un factor desconocido, escribimos en la primera de las espresiones halladas (d') $\triangle'N'-2$ en vez de $\triangle'N'$, suponiendo que se aumenten dos unidades á N', y en la tercera de las mismas (d'''), $\triangle'N'-1$ en vez de $\triangle'N'$, suponiendo aumentada una unidad á la misma N', y escribimos todas las tres mencionadas espresiones bajo la forma de una suma, se tendrá la espresion total

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{2q.f(\triangle''N',\ \triangle''p,\ \triangle'q)\times f(\triangle'''N',\ \triangle'''p,\ \triangle'''q)\times[f(\triangle'N'-2,\ \triangle'p+2,\ \triangle'q)+}{2.3...\triangle'q\times2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)\times}\ldots$$

$$\ldots\frac{+(\triangle''N'+s'''+2+\triangle''N'+s''+2).f(\triangle'N'-1,\ \triangle'p+1,\ \triangle'q+1)+}{\times(\triangle''N'+s''+1)(\triangle''N'+s''+2)\times2.3...\triangle''q\times2.3...(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times2.3...(s''-\triangle''p-\triangle''q)\times}\ldots$$

$$\ldots\frac{+(\triangle'''N'+s'''+2)(\triangle''N'+s''+2).f(\triangle'N',\ \triangle'p,\ \triangle'q+2)]}{\times(\triangle'''N'+s'''+1)(\triangle'''N'+s'''+2)\times2.3...\triangle'''q\times2.3...(2\triangle'''p+\triangle'''q-s''')\times2.3...(s'''-\triangle'''p-\triangle'''q)}$$

$$\times A'^{2p+q-N'+4}\times A''^{N'-4-p}.\ldots\ldots\ldots(d).$$

Pasemos ahora á considerar en la espresion general (a) un solo factor desconocido, verificando en él una sustitucion del segundo órden, el cual podremos suponer sucesivamente que haga parte del producto relativo á p ó del producto relativo á q. Considerando el primer caso será

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\Sigma f(N',p'+1,q')\times$$

$$\times\frac{A'^{2p'-'\triangle(N_{,}''-q'-2)}A'''^{\triangle(N_{,}''-q'-2)-p'}(2A'')^{q'}\times A[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)]}{2.3\ldots q'\times 2.3\ldots[2p'-'\triangle(N_{,}''-q'-2)]\times 2.3\ldots['\triangle(N_{,}''-q'-2)-p']}$$

el valor del factor $A[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)]$ dado en la espresion general (c), consta de dos términos ó sumandos relativos á dos productos diferentes; y llamando C'', $C_{,}''$ la suma de coeficientes relativa á los valores de las partes s', s'' que multiplican cada uno de dichos productos, la referida espresion (c) podrá escribirse del modo siguiente;

$$S.^{dos}A[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)]=\frac{1}{\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)[\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)-1]}$$

$$\times\Sigma[f('\triangle'\triangle_{,}'(N_{,}''-q'-2)-1,\ \triangle'p''+1,\ \triangle'q'')$$

$$\times f(\triangle''\triangle_{,}'(N_{,}''-q'-2),\ \triangle''p'',\ \triangle''q'')\times C''$$

$$+f('\triangle'\triangle_{,}'(N_{,}''-q'-2),\ \triangle'p'',\ \triangle'q''+1)$$

$$\times f(\triangle''\triangle_{,}'(N_{,}''-q'-2),\ \triangle''p'',\ \triangle''q'')\times C_{,}'']$$

$$\times A'^{2p''+q''-\triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)+3}\times A'''^{\triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)-3-p''}$$

efectuando la sustitucion ó multiplicacion, y haciendo

$$N_{,}'=\triangle'N',\ \triangle'\triangle_{,}'(N_{,}''-q'-2)=\triangle''N',\ \triangle''\triangle_{,}'(N_{,}''-q'-2)=\triangle'''N'$$

$$'\triangle(N_{,}''-q'-2)+\triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)-3$$

$$='\triangle(N_{,}''-q'-2)+\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)-\triangle''N'-\triangle'''N'-3$$

$$=N_{,}''-q'-2-\triangle''N'-\triangle'''N'-3=N''-q'-5$$

$$'\triangle(N_{,}''-q'-2)=s'-q',\ \triangle_{,}''(N_{,}''-q'-2)-3=s''+s''',$$

con lo que $\triangle_{,}(N_{,}''-q'-2)=\triangle''N'+\triangle'''N'+s''+s'''+3=_{7}\triangle N'+S+3$

y suponiendo como en los dos casos anteriores, que se aumente una unidad á N' disminuyéndola á N'', vendrá la espresion

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{2^q\times f(\triangle'N'-1,\triangle'p+1,\triangle'q)}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{1}{(\sigma\triangle N'+S+2)(\sigma\triangle N'+S+3)}$$

$$\times[f(\triangle''N'-1,\triangle''p+1,\triangle''q).f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q)\times C''+$$

$$+f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q+1).f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q)\times C_{,}'']$$

$$\times A'^{2p+q-N''+4}\times A''^{N''-4-p}.....(d_{,}).$$

Considerando el segundo caso, de que el factor desconocido haga parte del producto relativo á q, la espresion general (a) tendrá la forma

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N+1)}\times\Sigma f(N_{,}',p',q'+1)$$

$$\times\frac{2^{q'}\times A'^{2p'-N_{,}''+1}A''^{N_{,}''-p'-1+q'}\times(N_{,}'''-q')\,A^{(N_{,}'''-q')}}{2.3...q'\times 2.3...(2p'-N_{,}''+1)\times 2.3...(N_{,}''-1-p')}$$

la espresion del factor desconocido $A^{(N_{,}'''-q')}$ será

$$S.^{dos}A^{(N_{,}'''-q')}=\frac{1}{(N_{,}'''-q')(N_{,}'''-q'-1)}$$

$$\times\Sigma[f(\triangle'\triangle'(N_{,}'''-q')-1,\triangle'p''+1\triangle'q'').f(\triangle''\triangle'(N_{,}'''-q'),\triangle''p'',\triangle''q'')\times C''+$$

$$+f(\triangle'\triangle'(N_{,}'''-q'),\triangle'p'',\triangle'q''+1).f(\triangle''\triangle'(N_{,}'''-q'),\triangle''p'',\triangle''q'')\times C_{,}'']$$

$$\times A'^{2p''+q''-\triangle''(N_{,}'''-q')+3}\times A''^{\triangle''(N_{,}'''-q')-3-p''}$$

y verificando la sustitucion, haciendo supuestos análogos á los del caso anterior, vendrá

$$S.^{dos}\, A^{(N)} = \frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times \Sigma \frac{f(\triangle' N', \triangle' p, \triangle' q+1)}{2.3\ldots\triangle' q \times 2.3\ldots(2\triangle' p+\triangle' q-s') \times 2.3\ldots(s'-\triangle' p-\triangle' q)}$$

$$\times \frac{1}{{}_{\sigma}\triangle N'+S+2}$$

$$\times [f(\triangle'' N'-1, \triangle'' p+1, \triangle'' q).f(\triangle''' N', \triangle''' p, \triangle''' q) \times C'' +$$

$$+ f(\triangle'' N', \triangle'' p, \triangle'' q+1).f(\triangle''' N', \triangle''' p, \triangle''' q) \times C_{/}'']$$

$$\times A'^{2p+q-N''+1} \times A''^{N''-1-p}. \ldots . (d_{//}).$$

y reuniendo ambas espresiones $(d_{//})(d_{/})$ en una sola será, por último,

$$S.^{dos}\, A^{(N)} = \frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times \Sigma \left[\frac{2^{q}.f(\triangle' N'-1, \triangle' p+1, \triangle' q).f(\triangle'' N'-1, \triangle'' p+1, \triangle'' q).f(\triangle''' N', \triangle''' p, \triangle''' q)}{2.3\ldots\triangle' q \times 2.3\ldots(2\triangle' p+\triangle' q-s') \times 2.3\ldots(s'-\triangle' p-\triangle' q)} \right.$$

$$\times \frac{C''}{(\sigma\triangle N'+S+2)(\sigma\triangle N'+S+3)} +$$

$$+ \frac{f(\triangle' N'-1, \triangle' p+1, \triangle' q).f(\triangle'' N', \triangle'' p, \triangle'' q+1).f(\triangle''' N', \triangle''' p, \triangle''' q)}{2.3\ldots\triangle' q \times 2.3\ldots(2\triangle' p+\triangle' q-s') \times 2.3\ldots(s'-\triangle' p-\triangle' q)}$$

$$\times \frac{C_{/}''}{(\sigma\triangle N'+S+2)(\sigma\triangle N'+S+3)} +$$

$$\left. + \frac{f(\triangle' N', \triangle' p, \triangle' q+1).f(\triangle'' N'-1, \triangle'' p+1, \triangle'' q).f(\triangle''' N', \triangle''' p, \triangle''' q)}{2.3\ldots\triangle' q \times 2.3\ldots(2\triangle' p+\triangle' q-s') \times 2.3\ldots(s'-\triangle' p-\triangle' q)} \right.$$

$$\times\frac{C''}{\sigma\triangle N'+S+3}+$$

$$+\frac{f(\triangle'N',\triangle'p,\triangle'q+1).f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q+1).f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q)}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{C_{,}''}{\sigma\triangle N'+S+3}\Big]$$

$$\times A'^{2p+q-N''+4}.\ A''^{N''-4-p}.\ldots.(''d).$$

El producto que forma el primer término de esta espresion es homólogo con el que asimismo forma el primer término de la espresion $('d)$. Los productos que forman los términos segundo y tercero son homólogos entre sí y al que forma el segundo término de dicha espresion $('d)$; en fin, el producto que forma el cuarto término es asimismo homólogo al que forma el tercero en la citada $('d)$. Luego si representamos por C''', $C_{,}'''$, $C_{,,}'''$ las sumas de coeficientes que respectivamente corresponden, dando valores á s', s'', s''', á estos tres productos distintos, la espresion total que se refiere al caso que nos ocupa, podrá escribirse abreviadamente del modo que sigue:

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\Sigma[f(\triangle'N'-2,\triangle'p+2,\triangle'q).C'''+f(\triangle'N'-1,\triangle'p+1,\triangle'q+1).C_{,}'''$$

$$+f(\triangle'N',\triangle'p,\triangle'q+2).C_{,,}'''\,]\times f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q)\times f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q)$$

$$\times A'^{2p+q-N''+4}\times A''^{N''-4-p}.\ldots.(d).$$

La marcha que debe seguirse para los productos de mayor número de factores, y aun la forma de los resultados, se deja ya bastante percibir. En los productos de cuatro factores, por ejemplo, el numerador

de la espresion $('d)$ se compondria del producto de las funciones $f(\Delta''N',\Delta''p,\Delta''q).f(\Delta'''N',\Delta'''p,\Delta'''q).f(\Delta^{IV}N',\Delta^{IV}p,\Delta^{IV}q)$ multiplicado por un polinomio cuyo primer término sería la funcion $f(\Delta'N-3,\Delta'p+3,\Delta'q)$; el segundo la suma de las cantidades $\Delta''N'+s''+2+\Delta'''N'+s'''+2+\Delta^{IV}N'+s^{IV}+2$ multiplicada por la funcion $f(\Delta'N'-2,\Delta'p+2,\Delta'q+1)$; el tercero la suma de los productos de las mismas cantidades tomadas dos á dos multiplicada por la funcion $f(\Delta'N-1,\Delta'p+1,\Delta'q+2)$; y en fin, el cuarto el producto de las tres citadas cantidades por la funcion $f(\Delta'N',\Delta'p,\Delta'q+3)$. En la suposicion de considerar dos factores desconocidos, verificando en uno de ellos una sustitucion del primer órden y en el otro una del segundo, si ambos hacen parte del producto relativo á p, darán dos términos homólogos á los dos primeros del polinomio anterior, que serán

$$\frac{f(\Delta'N'-2,\Delta'p+2,\Delta'q).f(\Delta''N',\Delta''p,\Delta''q).f(\Delta^{IV}N',\Delta^{IV}p,\Delta^{IV}q)}{2.3...\Delta'q\times 2.3...(2\Delta'p+\Delta'q-s')\times 2.3...(s'-\Delta'p-\Delta'q)}$$

$$\times\frac{1}{(\Delta''N'+s''+1)(\Delta''N'+s''+2)}$$

$$\frac{[f(\Delta'''N'-1,\Delta'''p+1,\Delta'''q).C''+f(\Delta'''N',\Delta'''p,\Delta'''q+1).C_{,}'']}{\times 2.3...\Delta''q\times 2.3...(2\Delta''p+\Delta''q-s'')\times 2.3...(s''-\Delta''p-\Delta''q)}$$

$$\times\frac{1}{(_{7}\Delta N'+S+2)(_{9}\Delta N'+S+3)}$$

Si el primero de los dos factores, en el que se verifique la sustitucion del segundo órden, hace parte del producto relativo á p, y el otro del producto relativo á q, vendrán otros dos términos homólogos al segundo y tercero del polinomio citado, que serán

$$\frac{f(\Delta'N'-1,\Delta'p+1,\Delta'q+1).f(\Delta''N',\Delta''p,\Delta''q).f(\Delta^{IV}N',\Delta^{IV}p,\Delta^{IV}q)}{2.3...\Delta'q\times 2.3...(2\Delta'p+\Delta'q-s')\times 2.3...(s'-\Delta'p-\Delta'q)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle''N'+s'+1)}$$

$$\times\frac{[f(\triangle'''N'-1,\triangle'''p+1,\triangle'''q).C''+f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q+1).C_{,}'']}{\times 2.3...\triangle''q\times 2.3...(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''p-\triangle''q)}$$

$$\times\frac{1}{(\cdot\triangle N'+S+2)(\cdot\triangle N'+S+3)}.$$

Si por el contrario el factor en que se ha de verificar la sustitucion del primer órden pertenece al producto relativo á p, y en el que se ha de verificar la del segundo al producto relativo á q, vendrán igualmente dos términos homólogos tambien al segundo y tercero de la suma ó polinomio de que tratamos, que serán

$$\frac{f(\triangle'N'-1,\triangle'p+1,\triangle'q+1).f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q).f(\triangle^{IV}N',\triangle^{IV}p,\triangle^{IV}q)}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle''N'+s''+1)(\triangle''N'+s''+2)}\times$$

$$\frac{[f_{,}\triangle'''N'-1,\triangle'''p+1,\triangle'''q).C''+f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q+1).C_{,}'']}{2.3...\triangle''q\times 2.3...(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''p-\triangle''q)}$$

$$\times\frac{1}{(\cdot\triangle N'+S+2)}$$

En fin, si ambos factores pertenecen al producto relativo á q, los dos sumandos homólogos al tercero y cuarto de la misma suma ó polinomio serán

$$\frac{f(\triangle'N',\triangle'p,\triangle'q+2).f(\triangle''N',\triangle''p,\triangle''q).f(\triangle^{IV}N',\triangle^{IV}p,\triangle^{IV}q)}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{1}{(\triangle''N'+s''+1)}$$

$$\times\frac{[f(\triangle'''N'-1,\triangle'''p+1,\triangle'''q).C''+f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q+1)C_{,}'']}{2.3...\triangle''q\times 2.3...(2\triangle''p+\triangle''q-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''p-\triangle''q)}.$$

$$\times\frac{1}{(\sigma\triangle N'+S+2)}.$$

Considerando luego un solo factor desconocido que haga parte del producto relativo á p, y verificando la sustitucion del tercer órden por la fórmula (d), dará tres términos homólogos á los tres primeros del polinomio á que nos referimos, que serán

$$\frac{f(\triangle'^{V}-1,\triangle'p+1,\triangle'q).f(\triangle'''^{V},\triangle'''p,\triangle'''q)\,f(\triangle^{IV}N',\triangle^{IV}p,\triangle^{IV}q)}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle q'-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{[f(\triangle''N'-2,\triangle''p+2,\triangle''q).C'''+f(\triangle''N'-1,\triangle''p+1,\triangle''q+1).C_{,}'''+f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q+2).C_{2}''']}{(\sigma\triangle N'+S+3)(\sigma\triangle N'+S+4)}.$$

Por último, si el factor desconocido hace parte del producto relativo á q, los tres términos homólogos al segundo, tercero y cuarto del mismo polinomio serán:

$$\frac{f(\triangle'N',\triangle'p,\triangle'q+1)\,f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q).f(\triangle^{IV}N',\triangle^{IV}p,\triangle^{IV}q)}{2.3...\triangle'q\times 2.3...(2\triangle'p+\triangle'q-s')\times 2.3...(s'-\triangle'p-\triangle'q)}$$

$$\times\frac{[f(\triangle''N'-2,\triangle''p+2,\triangle''q).C'''+f(\triangle''N'-1,\triangle''p+1,\triangle''q+1)\,C_{,}'''+f(\triangle'''N',\triangle'''p,\triangle'''q+2).C_{2}''']}{(\sigma\triangle N'+S+3)}$$

Se ve, pues, que tomando todas las combinaciones distintas posibles de estas espresiones, y dando en cada una á s', s'', s''', &c., todos los valores que les quepan, pueden, de la misma manera que espresamos en el número (39), tratando de la ecuacion diferencial que care-

cia del primer coeficiente $\frac{dy}{dx}$, calcularse todas las sumas de coeficientes que correspondan á los distintos productos de la funcion genérica $f(N', p, q)$, y formarse tablas que los contengan. Construidas éstas para resolver los problemas particulares, solo restará el efectuar dichos productos, obteniendo en cada uno el coeficiente que corresponda á una combinacion dada de los esponentes de las cantidades indeterminadas ó parámetros que entren en dicha funcion genérica, el cual se multiplicará por el que se halle escrito en la tabla; y verificando luego la suma de los resultados, se obtendrá el coeficiente numérico total que multiplica la combinacion de esponentes elegida. Con este objeto deberian comprenderse unidos y ordenados sucesivamente en estas tablas los productos distintos que multiplican una combinacion determinada de los esponentes de los factores $A'^{2p-q-N''+t}A''^{N''-t-p}$.

Despues de calculados de este modo los coeficientes que corresponden como hemos dicho á una combinacion dada de los esponentes de todas las cantidades indeterminadas que entran en el problema, se igualarán los tales esponentes á cantidades fijas m, m', m'', &c. Si verificado esto hubiese mas ecuaciones que cantidades N', p, q, t, &c., entren en la composicion de los mismos esponentes, deberá quedar subsistente alguna relacion entre ellos, representados ya por las letras m, m', &c.; mas si el número de ecuaciones citado fuese menor, quedando alguna indeterminada, el coeficiente numérico total que corresponda á la referida combinacion m, m', m'', &c., se compondrá todavía de una suma que se obtendrá tomando todos los valores posibles de la antedicha indeterminada ó indeterminadas.

43. La resolucion que acabamos de dar de la ecuacion diferencial completa

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ y,\frac{dy}{dx}\right)$$

es una combinacion de las que corresponderian á las dos ecuaciones incompletas

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\ y),\ \frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ \frac{dy}{dx}\right)$$

cuya solucion particular se inferirá asimismo de ella, convirtiendo la funcion $f(N',\ p,\ q)$ en $f(N',\ n)$, y suprimiendo en las sumas de productos distintos que hemos determinado, todos aquellos términos en que entren por factores las funciones que contengan á $\triangle p+1$, $\triangle p+2$, &c., ó bien á $\triangle q+1$, $\triangle q+2$, &c., segun sea la segunda ó la primera de las ecuaciones propuestas la que se considere, y por lo tanto deba suprimirse el producto relativo á p, ó el relativo á q.

Si en la funcion genérica $f(N',\ p,\ q)$ entrasen sumandos en N' independientes de p y de q, y al contrario, deberá tenerse en cuenta el modo con que puedan combinarse para formar los productos dobles, triples, &c., de que se ha hecho mencion. Contrayéndonos al caso de la ecuacion incompleta resuelta en el número (38), supongamos que tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F'(x)+F''(y).$$

La ecuacion general que establece la relacion entre los coeficientes será

$$A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}\times\left[f'(N-2)+\Sigma f''(n).\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle(N-2)}{\triangle^n}\right)\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n}\right]$$

y por lo tanto, la funcion genérica $f(N',\ n)$ consta de dos sumandos independientes uno de otro, de manera, que ó ha de tenerse $n=0$, convirtiéndose dicha funcion en $f'(N')$, ó ha de tenerse $N'=0$ y convertirse la funcion en $f''(n)$. Bajo este supuesto, en los productos dobles $f(\triangle' N',\ \triangle' n+1)$. $f(\triangle'' N',\ \triangle'' n)$, deberá suponerse precisamente $\triangle' N'=0$, reduciéndose, por lo tanto, el primer factor á $f''(\triangle n+1)$, porque de suponer $\triangle' n=0$, quedaria aún en él á la característica general n, el valor 1; y en efecto, la presencia de este factor, dado en funcion de n, consigna la sustitucion que se supone efectuada en un

factor desconocido. Mas en el segundo factor $f(\triangle''N', \triangle''n)$ puede suponerse alternativamente $\triangle''N'=0$, y $\triangle''n=0$, cada uno de los cuales supuestos dará una combinacion y resultarán dos, que serán

$$S.^{dos}\, A^{(N)} = \frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma \frac{f'(N').f''(n+1)}{2.3\ldots(2n-N''+4)\times 2.3\ldots(N''-4-n)\times(N'+1)(N'+2)}$$

$$\times A'^{2n-N''+4}\, A''^{N''-4-n}.$$

$$S.^{dos}\, A^{(N)} = \frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma \frac{f''(\triangle'n+1).f''(\triangle''n)}{2.3\ldots(2\triangle'n-s')\times 2.3\ldots(s'-\triangle'n)\times(s''+1)(s''+2)\times 2.3\ldots(2\triangle''n-s'')\times 2.3\ldots(s''-\triangle''n)}$$

$$\times A'^{2n-N+4}\, A''^{N-4-n}.$$

Del mismo modo, en el producto triple $f(\triangle'N', \triangle'n+2).f(\triangle''N', \triangle''n) \times f(\triangle'''N', \triangle'''n)$, no puede suponerse $\triangle'n+2=0$, porque este primer factor consigna las dos sustituciones que se suponen efectuadas en factores desconocidos; mas sí podrá suponerse $\triangle''n=0$ y $\triangle'''n=0$, resultando tres combinaciones que son

$$S.^{dos}\, A^{(N)} = \frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma \frac{f''(n+2).f'(\triangle''N').f'(\triangle'''N')}{2.3\ldots(2n-N''+2)\times 2.3\ldots(N''-2-n)}$$

$$\times \frac{A'^{2n-N''+6}\, A''^{N''-6-n}}{(\triangle''N'+1)(\triangle''N'+2)\times(\triangle'''N'+1)(\triangle'''N'+2)},$$

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{f''(\triangle'n+2).f''(\triangle''n).f'(N')\times A'^{2n-N'+6}\,A''^{N''-6-n}}{2.3...(2\triangle'n-s')\times 2.3...(s'-\triangle'n)\times(s''+1)(s''+2)\times 2.3...(2\triangle''n-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''n)\times(N'+1)(N'+2)}$$

$$S.^{dos}A^{(N)}=\frac{1}{N(N-1)}$$

$$\times\Sigma\frac{f''(\triangle'n+2).f''(\triangle''n).f''(\triangle'''n)}{2.3...(2\triangle'n-s')\times 2.3...(s'-\triangle'n)\times(s''+1)(s''+2)\times 2.3...(2\triangle''n-s'')\times 2.3...(s''-\triangle''n)}$$

$$\times\frac{A'^{2n-N+6}\,A''^{N-6-n}}{(s'''+1)(s'''+2)\times 2.3...(2\triangle'''n-s''')\times 2.3..(s'''-\triangle'''n)}.$$

Por un órden análogo se deducirian las combinaciones relativas á los productos cuádruplos, quíntuplos, &c.

Puede tambien hallarse mezclada en la ecuacion diferencial del segundo órden alguna integral, sea por ejemplo la

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F'.\left(x,\,y,\,\frac{dy}{dx}\right)+\int F''\left(x,\,y,\,\frac{dy}{dx}\right).\,dx$$

desarrollando en serie el segundo miembro, é integrando su segundo término, será

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{\Sigma f'(N',\,p,\,q)\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N''}{\triangle p}\right)\triangle p}}{2.3...\triangle p}\right.$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[\frac{\triangle(N''+q)}{\triangle q}\,A^{\left(\frac{\triangle(N''+q)}{\triangle q}\right)}\right]^{\triangle q}}{2.3...\triangle q}+$$

$$+\frac{1}{N}\Sigma f''(N_{,},\,p_{,},\,q_{,})\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle(N_{,}-1)}{\triangle p_{,}}\right)\triangle p_{,}}}{2.3...\triangle p_{,}}$$

$$\times\Sigma P.\left\{\frac{\left[\frac{\Delta(N_{III}+q_I)}{\Delta q_I}\,A^{\left(\frac{\Delta(N_{III}+q_I)}{\Delta q_I}\right)}\right]^{\Delta q_I}}{2.3...\Delta q_I}\right\}x^N$$

siendo $N'+N''+N'''=N$, $N_I+N_{II}+N_{III}=N$.

La resolucion de esta ecuacion sería una combinacion de las que se obtuviesen formando dos ecuaciones distintas con cada uno de sus términos; y es de advertir que la solucion referente al segundo término es la misma que se obtendria de una ecuacion diferencial del tercer órden: y en efecto, diferenciando los dos miembros de la propuesta se recaerá en una ecuacion de dicho tercer órden. En general, el camino mas conveniente para obtener la resolucion de estas ecuaciones será el de hacer desaparecer las integrales por medio de la diferenciacion.

En algunos casos podrá reducirse la ecuacion general que establece la relacion entre los coeficientes desconocidos relativa á una ecuacion diferencial completa del segundo órden á la forma de la (a) del número (38), que se refiere á la ecuacion incompleta $\frac{d^2y}{x.d^2}=F(x,\ y)$, y esto podrá suceder cuando sea posible verificar una primera integracion. Supongamos que se tenga la ecuacion

$$\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{d^2y}{d.x^2}=F.(x,\ y)$$

si hacemos el primer coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}=z$, esta ecuacion tomará la forma

$$\varphi.\ (z).\frac{dz}{dx}=F.(x,\ y),\ \text{ó}\ \varphi(z)d.z=F.(x,\ y)d.x;$$

si el primer miembro es integrable, sustituyendo en vez de y la serie

que se le haya supuesto, y verificando la integracion, se llegará á una ecuacion de la forma siguiente

$$\varphi'(z)=\varphi'\left(\frac{dy}{dx}\right)=\Sigma\frac{1}{N}\times x^{N}\times\Sigma f(N',n).\,\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta(N''-1)}{\Delta^{n}}\right)}\Delta n}{2.3...\Delta n},$$

en la que despejando á $\frac{dy}{dx}$, sustituyéndole la serie presupuesta á y despues de diferenciada, é igualando los coeficientes de las mismas potencias de la variable x, se llegará en gran parte de los casos á una ecuacion de la forma de la citada (a) del número (38).

Ecuaciones y fórmulas del capítulo 3.º

1
$$\begin{cases} z=a'x+a''x^2+a'''x^3\ldots+a^{(h)}x^h+\&c. \\ x=A'z+A''z^2+A'''z^3\ldots+A^{(N)}z^N+\&c. \\ A^{(N)}=\Sigma(-1)^m\times(N+1)(N+2)\ldots(N+m-1)\times\dfrac{1}{a'^{N+m}} \\ \qquad\qquad \times\Sigma P.\ \dfrac{a^{\left(\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta m}\right)}\Delta m}{2.3\ldots\Delta m} \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} \&c.+b'''y^3+b''y^2+b'y=a'x+a''x^2+a'''x^3+\&c. \\ y=A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(N)}x^N+\&c. \\ A^{(N)}=\Sigma(-1)^m\times1.2.3\ldots(N'+m-1)\times\dfrac{1}{b'^{N'+m}} \\ \qquad\qquad \times\Sigma P.\ \dfrac{b^{\left(\frac{\Delta(N'+m-1)}{\Delta m}\right)}\Delta m}{2.3\ldots\Delta m}\times\Sigma P.\ \dfrac{a^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta N'}\right)}\Delta N'}{2.3\ldots\Delta N'}, \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} z=ax^p+a'x^{p+1}+a''x^{p+2}\ldots a^{(h)}x^{p+h}+\&c. \\ x=B'z^{\frac{1}{p}}+B''z^{\frac{2}{p}}+B'''z^{\frac{3}{p}}\ldots+B^{(N)}z^{\frac{N}{p}}+\&c. \\ B^{(N)}=\Sigma(-1)^n\times\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{N}{p}+1\right)\left(\dfrac{N}{p}+2\right)\ldots\left(\dfrac{N}{p}+n-1\right)\times\dfrac{1}{a^{\frac{N}{p}+n}} \\ \qquad\qquad \times\Sigma P.\dfrac{a^{\left(\frac{\Delta(N-1)}{\Delta n}\right)}\Delta n}{2.3\ldots\Delta n} \end{cases}$$

4

$$\begin{cases} z=a'x+a''x^2+a'''x^3\ldots+(a+a^{(p)})x^p+a^{(p+1)}x^{p+1}+\&c. \\ x=\Sigma\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{N}{p}}\times\Sigma(-1)^n\times\frac{1}{p}\left(\frac{N}{p}-1\right)\left(\frac{N}{p}-2\right)\ldots\left(\frac{N}{p}-n+1\right).\ z^{\frac{N}{p}+n} \\ \qquad\times\Sigma P.\ \frac{a^{\left(\frac{\Delta(N-1)}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n} \end{cases}$$

4′

$$\begin{cases} x=\Sigma z^{\frac{N}{p}}\times\Sigma(-1)^n\times\frac{1}{p}\left(\frac{N}{p}+1\right)\left(\frac{N}{p}+2\right)\ldots\left(\frac{N}{p}+n-1\right)\times\frac{1}{a^{\frac{N}{p}+n}} \\ \qquad\times\Sigma P.\ \frac{a^{\left(\frac{\Delta(N+pn-1)}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n} \end{cases}$$

4″

$$\begin{cases} x=\Sigma z^N\times\Sigma(-1)^n\times(N+1)(N+2)\ldots(N+n-1)\times\frac{(a'-1)^{n-n'}}{2.3\ldots(n-n')} \\ \qquad\times\Sigma P.\ \frac{a^{\left(\frac{\Delta(N+n'-1)}{\Delta^{n'}}\right)\Delta n'}}{2.3\ldots\Delta n'} \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} z=ax+a'x^2+a''x^3\ldots+a^{(h-1)}x^h+\&c.=f(x) \\ Z=z+a'.\frac{z^2}{a^2}+a''.\frac{z^3}{a^3}\ldots+a^{(h-1)}.\frac{z^h}{a^h}+\&c.=f\left(\frac{z}{a}\right) \\ 1.^{\circ}\ x=\Sigma\frac{1}{a}\times\frac{(-1)^n}{2.3\ldots n}\times\frac{d^{n-1}(Z-z)^n}{dz^{n-1}} \\ 2.^{\circ}\ x=\frac{1}{a}.\ z+\frac{1}{a}\Sigma(z-Z)^N\times\Sigma(-1)^n\times(N+1)(N+2)\ldots(N+n-1) \\ \qquad\times\frac{\left(\frac{dZ}{dz}-1\right)^{n-n'}}{2.3\ldots(n-n')} \end{cases}$$

$$5\left\{\begin{array}{l} \times \Sigma P.\left[\dfrac{d^{\left(\frac{\Delta(N+n'-1)}{\Delta n'}\right)}Z}{d.z^{\frac{\Delta(N+n'-1)}{\Delta n'}}}\right]^{\Delta n'} \times \dfrac{1}{\left(2.3\ldots\frac{\Delta(N+n'-1)}{\Delta n'}\right)^{\Delta n'} \times 2.3\ldots\Delta n'} \\ 3.^{a}\}\, z-Z=\dfrac{d.Z}{dz}(ax-z)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d^2.Z}{dz^2}\cdot(ax-z)^2+\dfrac{1}{2.3}\dfrac{d^3.Z}{dz^3}\cdot(ax-z)^3+\&c. \\ z=f\left(\dfrac{z+ax-z}{a}\right)=f(x) \end{array}\right.$$

$$6\left\{\begin{array}{l} (a+a'x+a''x^2+a'''x^3\ldots+a^{(h)}x^h+\&c.)^{-m}=0 \\ x=\Sigma(-1)^{n+n'+k}\times\dfrac{(N+n'-n+1)(N+n'-n+2)\ldots(N+n'-1)}{2.3\ldots(n-\Delta' n'-k)\times 2.3\ldots\Delta' n'} \\ \qquad\times\dfrac{mk(mk+1)\ldots(mk+\Delta'' n'-1)}{2.3\ldots(\Delta'' n'-r)\times 2.3\ldots k\times m^{N+\Delta'' n'}} \\ \qquad\times\dfrac{a^N}{a'^{N+r}}\times\Sigma P.\dfrac{a^{\left(\frac{\Delta(N+r-1)}{\Delta r}\right)}\Delta r}{2.3\ldots\Delta r} \end{array}\right.$$

$$7\left\{\begin{array}{l} (a+a'x+a''x^2+a'''x^3\ldots+a^{(h)}x^h+\&c.)^{-1}=0 \\ x=\Sigma(-1)^{\Delta'' n'}\times\dfrac{(N+n'-n+1)(N+n'-n+2)\ldots(N+n'-1)}{[2.3\ldots(n-\Delta' n'-1)]^2\times(n-\Delta' n')} \\ \times\dfrac{(n'-n+1)(n'-n+2)\ldots\Delta'' n'\times(\Delta'' n'-r+1)(\Delta'' n'\ r+2)\ldots(\Delta'' n'-1)}{2.3\ldots\Delta' n'} \\ \qquad\times\dfrac{a^N}{a'^{N+r}}\times\Sigma P.\dfrac{a^{\left(\frac{\Delta(N+r-1)}{\Delta r}\right)}\Delta r}{2.3\ldots\Delta r} \end{array}\right.$$

$$8\left\{\begin{array}{l} C^{(t)}=\dfrac{f(\triangle' N',\ \triangle' n+t')\times 2.3\ldots(\triangle' n+t')}{2.3\ldots(2\triangle' n-s')\times 2.3\ldots(s'-\triangle' n)} \\ \qquad \times\Sigma P\left[\dfrac{C^{\left(\frac{\triangle(t-1)}{\triangle' t'}\right)}}{\left(\sigma\triangle N'+S+\frac{^2\triangle(t-1)}{\triangle' t'}\right)\left(\sigma\triangle N'+S+\frac{^2\triangle(t-1)}{\triangle' t'}-1\right)}\right]^{\triangle' t'} \\ \qquad \times\dfrac{1}{2.3\ldots\triangle' t'} \end{array}\right.$$

CAPITULO IV.

Sobre la determinacion de los valores aproximados de las Series.

44. La materia de este capítulo es de suma importancia, por cuanto no siendo posible en los problemas que ofrecen alguna complicacion ó dificultad obtener los valores de la incógnita bajo otra forma que la de una serie ordenada por las potencias de las cantidades conocidas, ó parámetros, resulta que en último análisis, la cuestion se reducirá al cálculo de los valores aproximados de esta serie, si se quieren determinar los referidos de la incógnita. Nosotros espondremos aquello que nos ha sugerido nuestra investigacion sobre este punto, que creemos fundado en principios esactos y verdaderos; mas sin embargo, el pleno establecimiento de esta teoría, exigiria el exámen particular dirigido á series determinadas de diversa naturaleza comparando sus resultados, pero la ejecucion de esta tarea conduce á cálculos penosos, que á juzgar por los que presentaremos en este capítulo, no ofrecen una regularidad segura en los resultados.

En los tratados de la ciencia se enseña un método para obtener los valores aproximados de las integrales, cuando estas no se conocen bajo forma finita. Este método consiste en dividir la cantidad h, supuesta la diferencia entre los límites que quieren asignarse á la variable en partes muy pequeñas α, α', α'', &c., con lo cual se consigue que la serie que representa el valor de la integral con respecto á estas partes, consideradas ellas mismas como diferencias de límites respectivos entre dos valores consecutivos de la variable comprendidos entre el mayor a y el menor b, sean convergentes, y por lo tanto se obtengan sus valores con suficiente aproximacion: despues de lo cual, sumando los resultados, se obtiene el valor total que corresponde á la diferencia tambien total h entre los mencionados límites a y b. Este mé-

todo supone que las cantidades $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$, &c., que forman los coeficientes de la serie que representa el valor de la integral, son funciones conocidas bajo forma finita, de las que puede por consiguiente obtenerse el valor exacto, asignando á x el que corresponda: mas en muchos problemas, y tales son generalmente aquellos cuyas condiciones vienen establecidas en ecuaciones diferenciales, no se conocen estas funciones sino por la via de una serie, y es entonces insuficiente este método; hay además en él otra escepcion, que tiene lugar cuando corresponde á la integral un valor ∞ por uno intermedio de la variable entre los antedichos límites a y b. Para aclarar estos estremos consideremos la funcion $\frac{1}{1-x}$ como una integral desconocida, cuyo valor tratamos de determinar. Sus coeficientes diferenciales sucesivos son, como sabemos, $\frac{1}{(1-x)^2}$, $\frac{2}{(1-x)^3}$, $\frac{2.3}{(1-x)^4}$, &c.; y suponiendo que x reciba un incremento h, vendrá el desarrollo

$$\frac{1}{1-x-h}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}.\,h+\frac{1}{(1-x)^3}.\,h^2+\frac{1}{(1-x)^4}.\,h^3+\&c.\ldots.\ (a)$$

tratándose ahora de hallar un valor aproximado de esta integral entre los límites $a<1$, y $b>1$, de modo que entre ambos hay un valor de la variable que reduce el de la funcion al ∞, se tendrá

$$\frac{1}{1-b}-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}.\,h+\frac{1}{(1-a)^3}h^2+\frac{1}{(1-a)^4}h^3+\&c.$$

Por el método de que tratamos, se deberá primeramente sustituir en la ecuacion general (a) en vez de x, a en las funciones que representan los coeficientes diferenciales sucesivos, y en vez del incremento h, α muy pequeña, calculando el valor de la serie entre a y $a+\alpha$; despues deberá sustituirse en los mismos coeficientes diferenciales su-

cesivos de la ecuacion general (a) en vez de x, $a+\alpha=a'$, y en vez de h, α' tambien muy pequeña, calculando del mismo modo un nuevo valor de la serie entre a' y $a'+\alpha'$, y se proseguirá asi sucesivamente hasta terminar en el límite b. Supongamos que se ha llegado á un valor $a^{(n)}$ muy próximo de la unidad, los coeficientes

$$\frac{1}{(1-a^{(n)})^2},\quad \frac{1}{(1-a^{(n)})^3},\quad \frac{1}{(1-a^{(n)})^4},\ \&c.,$$

serán muy grandes, y aumentarán en una progresion escesivamente creciente, de modo que el nuevo incremento $\alpha^{(n)}$ tendremos que suponerlo sumamente pequeño, y tal que sea siempre menor que la diferencia que haya entre $a^{(n)}$ y la unidad, si la serie ha de ser convergente: por manera que con este procedimiento jamás podremos pasar del valor ∞ de la integral. El mismo resultado obtendremos si, empezando por el límite b, venimos hácia el a, haciendo sucesivamente $b-\alpha=b'$, $b'-\alpha'=b''$, &c.; de donde se infiere que el método que nos ocupa es insuficiente en este caso.

45. Si por este método nos proponemos determinar el valor de la serie general

$$z=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots A^{(n)}x^n+\&c.\ldots\ldots\ (a')$$

cuando á x se asigne un valor determinado h, que equivale á calcular el valor de la integral representada en z entre los límites o y h, se supondrá primero $x=\alpha$, y se calculará un primer valor aproximado de dicha serie; despues será preciso calcular los valores de sus coeficientes diferenciales sucesivos, que son

$$\left.\begin{array}{c} A'+2A''x+3A'''x^2\ldots+(n+1)A^{(n+1)}x^n+\&c.=A_{,}' \\ 2A''+2.3A'''x\ldots+(n+1)(n+2).A^{(n+2)}.x^n+\&c.=A_{,}'' \\ 2.3A'''+2.3.4A^{iv}x\ldots+(n+1)(n+2)(n+3)A^{(n+3)}x^n+\&c.=A_{,}''' \\ \&c.\qquad \&c.\qquad \&c.\qquad \&c.\qquad \&c. \end{array}\right\}\ (b)$$

cuando se sustituye en ellos α en vez de x, y formar la serie

$$z''-z'=A_{,}'x+\frac{1}{2}A_{,}''x^2+\frac{1}{2.3}A_{,}'''x^3\ldots+\frac{1}{2.3\ldots n}.A_{,}^{(n)}x^n+\&c.\ldots\ldots\ (c)$$

en la cual se hará $x=\alpha'$ para obtener un segundo valor aproximado; Mas es facil ver que si para obtener el primer valor aproximado $f(\alpha)$ fue preciso tomar n términos de la serie primitiva, en el segundo valor aproximado $z''-z'$ será tambien preciso ascender al coeficiente diferencial del orden n, para calcular el cual con la precision conveniente, habrá necesidad de considerar un número mas crecido de coeficientes de la serie primitiva.

Ascendiendo acto contínuo á obtener un tercer valor aproximado $z'''-z''$, será preciso determinar los valores de los coeficientes diferenciales escritos en (b) cuando se suponga en ellos $x=\alpha+\alpha'$, y formar nuevamente la serie (c) con estos valores: mas para obtenerlos será preciso verificar con cada uno de dichos coeficientes diferenciales la misma operacion ejecutada en la serie primitiva; asi pues los tales valores vendrán dados en las ecuaciones

$$A'_2=A_{,}'+A_{,}''x+\frac{1}{2}A_{,}'''x^2+\frac{1}{2.3}.A_{,}^{IV}x^3+\&c.$$

$$A_2''=A_{,}''+A_{,}'''x+\frac{1}{2}A_{,}^{IV}x^2+\frac{1}{2.3}.A_{,}^{V}x^3+\&c.$$

$$A_2'''=A_{,}'''+A_{,}^{IV}x+\frac{1}{2}A_{,}^{V}x^2+\frac{1}{2.3}.A_{,}^{VI}x^3+\&c.$$

$$\&c.\qquad\&c.\qquad\&c.\qquad\&c.$$

en las que será preciso hacer $x=\alpha'$, y formándose la serie

$$z'''-z''=A'_2x+\frac{1}{2}A''_2x^2+\frac{1}{2.3}A'''_2x^3+\frac{1}{2.3.4}.A_2^{IV}x^4+\&c.$$

se supondrá en ella $x=\alpha''$, con lo cual dará el tercer valor aproximado que apetecemos. Continuando sucesivamente por este orden determi-

naríamos todos los valores aproximados comprendidos entre los límites o y h, los cuales sumados darian el valor total buscado de la serie propuesta. El inconveniente de este método consiste en que á proporcion que los valores aproximados se alejan del primer límite o, es indispensable tomar un número mas crecido de coeficientes de la serie primitiva; por manera que si la cantidad h es grande, vendrá á hacerse casi impracticable. Por esta causa vamos á dar á conocer otras trasformaciones que en gran parte de los casos podrán conducir al objeto deseado, y cuando no, serán poderosas auxiliares del método espuesto.

46. Consideremos la serie

$$z=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(m)}x^m+\&c.$$

en la que supondremos sea $A^{(m)}=f(m)$, y desarrollando esta funcion en una nueva serie se tendrá

$$f(m)=(a=A)+a'm+a''m^2+a'''m^3\ldots+a^{(n)}m^n+\&c.,$$

sustituyendo esta en la serie que consideramos se trasformará en

$z=a+a$	$x+a$	$x^2+\ldots\ldots$ $+a$	$x^m+\&c.$
$+a'$	$+a'.2$	$+a'm$	
$+a''$	$+a''2^2$	$+a''m^2$	
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	
$+a^{(n)}$	$+a^{(n)}2^n$	$+a^{(n)}m^n$	
$+\&c.$	$+\&c.$	$+\&c.$	

Tomando ahora ordenadamente en línea horizontal las series que se desprenden de la que se acaba de escribir, será la primera

$$a(1+x+x^2+x^3\ldots+x^m+\&c.)=a\times\frac{1}{1-x},$$

la segunda

$$a'x(1+2x+3x^2\ldots+mx^{m-1}+\&c.)=a'\times\frac{1}{(1-x)^2},$$

la tercera

$$a''(x+2^2x^2+3^2x^3\ldots+m^2x^m+\&c.)$$

cuyo término general m^2x^m se divide en dos partes en la forma siguiente

$$m^2x^m=m(m-1)x^m+mx^m$$

y por lo tanto la serie misma se subdividirá en dos que serán

$$\left.\begin{array}{l} a''x(1+2x+3x^2\ldots+mx^{m-1}+\&c.) \\ +a''x^2(2+3.2.x\ldots+m(m-1)x^{m-2}+\&c.) \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} a''\times\dfrac{x}{(1-x)^2} \\ +a''\times\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}, \end{array}\right.$$

la cuarta serie es

$$a'''(x+2^3x^2+3^3.x^3\ldots+m^3x^m+\&c.)$$

cuyo término general $m^3\,x^m$ se divide asimismo en tres partes, que son

$$m^3\,x^m=m(m-1)\,(m-2)\,x^m+3m(m-1)\,x^m+mx^m,$$

y la serie se subdividirá igualmente en las tres siguientes

$$\begin{array}{l} a'''x(1+2x+3x^2+4x^3\ldots\ldots+mx^{m-1}+\&c.) \\ +3a'''x^2(2+3.2.x+4.3.x^2\ldots+m(m-1)x^{m-2}+\&c.) \\ +a'''x^3(3.2+4.3.2x\ldots\ldots+m(m-1)\,(m-2).x^{m-3}+\&c.) \end{array}$$

las que siendo los coeficientes diferenciales sucesivos de la funcion $\frac{1}{1-x}$

sus sumas estarán respectivamente representadas en los tres términos del polinomio siguiente

$$a''' \times \frac{x}{(1-x)^2} + 3a'' \times \frac{2x^2}{(1-x)^3} + a''' \times \frac{2.3.x^3}{(1-x)^4};$$

por el mismo camino se hallarán para la quinta y sesta serie los valores

$$a^{IV} \times \frac{x}{(1-x)^2} + 7a^{IV} \times \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 6a^{IV} \times \frac{2.3.x^3}{(1-x)^4} + a^{IV} \times \frac{2.3.4.x^4}{(1-x)^5}$$

$$a^{V} \times \frac{x}{(1-x)^2} + 15a^{V} \times \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 25a^{V} \times \frac{2.3.x^3}{(1-x)^4} + 10.a^{V} \times \frac{2.3.4.x^4}{(1-x)^5}$$

$$+ a^{V} \times \frac{2.3.4.5.x^5}{(1-x)^6}$$

y asi sucesivamente para las demás.

La serie primitiva equivaldrá pues á la suma de todas estas espresiones; y sacando sucesivamente en ellas por factores comunes las cantidades $\frac{x}{(1-x)^2}$, $\frac{x^2}{(1-x)^3}$, &c., resultará

$$z = a \times \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}(a + a' + a'' + a''' + a^{IV} + \&c.)$$

$$+ \frac{2x^2}{(1-x)^3}(a'' + 3a''' + 7a^{IV} + 15a^{V} + \&c.)$$

$$+ \frac{2.3.x^3}{(1-x)^4}(a''' + 6a^{IV} + 25a^{V} + \&c.)$$

$$+ \frac{2.3.4.x^4}{(1-x)^5}(a^{IV} + 10a^{V} + \&c.)$$

$$+ \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c.$$

pero

$$a'+a''+a'''+a^{iv}+\&c.=A'-A$$

$$a''+3a'''+7a^{iv}+15a^{v}+\&c.=$$

$$=2a''+2^2a'''+2^3a^{iv}+2^4a^{v}+\&c.-a''-a'''-a^{iv}-a^{v}-\&c.=$$

$$=\frac{1}{2}(A''-2A'+A)$$

de la misma manera viene para la tercera serie

$$\frac{1}{2.3}(A'''-3A''+3A'-A)=\frac{1}{2.3}\left|\begin{array}{l} a+3a'+3^2a''+3^3a'''+3^4a^{iv}+\&c. \\ -3a-3.2.a'-3.2^2a''-3.2^3a'''-3.2^4a^{iv}-\&c. \\ +3a+3a'+3a''+3a'''+3a^{iv}+\&c. \\ -a \end{array}\right.$$

$$=a'''+6a^{iv}+25a_{v}+\&c.$$

y otro tanto podremos comprobar en las series sucesivas: luego reemplazando estas series por las sumas indicadas en funcion de los coeficientes A, A', A'', &c., de la serie primitiva, sacando el factor $\frac{1}{1-x}$ comun á todos los términos, y haciendo $\frac{x}{1-x}=x'$, podremos establecer la fórmula (1).

Si en la serie primitiva se cambia el signo de x, y de los coeficientes impares, se transforma en

$$z=A-A'.(-x)+A''.(-x)^2-A'''.(-x)^3\ldots\pm A^{(m)}.(-x)^m\pm\&c.$$

y efectuando en esta serie la transformacion contenida en la fórmula que se acaba de hallar, los coeficientes sucesivos serán

$$A,-(A'+A),A''+2A'+A,-(A'''+3A''+3A'+A),\ \&c.$$

viniendo alternativamente positivos y negativos, y convirtiéndose ahora en suma lo que era antes diferencia entre los primitivos, la variable en este caso será negativa y dada en la ecuacion $-x'=\frac{-x}{(1+x)}$, y el factor comun que multiplica la serie se convertirá en $\frac{1}{(1+x)}$. Siendo negativa como se ha dicho la variable, hará positivos todos los términos, y podrá establecerse la fórmula (2), que tambien se hubiera podido deducir directamente

47. Estas fórmulas pueden generalizarse mas comprendiendo el resultado de un número cualquiera k de transformaciones. Con efecto, si llamamos $A_{,}^{(m)}$ el término general que resulta en la primera serie transformada, y transformamos nuevamente esta, llamando $A_2^{(m)}$ el término general de la inmediata resultante será

$$A_2^{(m)}=\Sigma(-1)^n\times\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}\times A_{,}^{(m-n)}$$

pero por la fórmula (1) se tiene

$$A_{,}^{(m-n)}=\Sigma(-1)^{n'}\times\frac{(m-n)\,(m-n-1)\ldots(m-n-n'+1)}{2.3\ldots n'}\times A^{(m-n-n')};$$

luego sustituyendo este valor en la espresion anterior, y representando la suma $n+n'$ por n, y cada una de las cantidades n, n' por $\triangle' n$, $\triangle'' n$, será

$$A_2^{(m)}=\Sigma(-1)^n\times\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3..\triangle' n\times 2.3\ldots\triangle'' n}\times A^{(m-n)}=$$

$$=\Sigma(-1)^n\times\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}\times 2^n.\ A^{(m-n)}.$$

Verificando una nueva transformacion, y representando por $A_3^{(m)}$ el nuevo término general de la resultante, se tendrá igualmente

$$A_3^{(m)} = \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n} \times A_2^{(m-n)}$$

y sustituyendo de la misma manera en vez de $A_2^{(m-n)}$ su valor general dado en la fórmula anterior, llamando igualmente que antes n á la suma $n+n'$, y $\triangle' n$, $\triangle'' n$ cada uno de estos dos sumandos, será

$$A_3^{(m)} = \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots\triangle' n \times 2.3\ldots\triangle'' n} \times 2^{\triangle' n}.\ A^{(m-n)} =$$

$$= \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n} \times 3^n.\ A^{(m-n)}.$$

Continuando del mismo modo hallaremos que al cabo de k transformaciones, el término general $A_{(k)}^{(m)}$ será

$$A_{(k)}^{(m)} = \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n} \times k^n.\ A^{(m-n)}$$

las variables sucesivas de cada una de estas series transformadas son respectivamente

$$x' = \frac{x}{1-x},\ x'' = \frac{x'}{1-x'} = \frac{x}{1-2x},\ x''' = \frac{x''}{1-x''} = \frac{x}{1-3x},$$

y en general $x^{(k)} = \frac{x}{1-kx}$. Por cada transformacion sale multiplicando la serie un nuevo factor que es en la 1.ª $\frac{1}{1-x}$, en la 2.ª $\frac{1}{1-x'} = \frac{1-x}{1-2x}$, en la 3.ª $\frac{1}{1-x''} = \frac{1-2x}{1-3x}$, y en la 4.ª $\frac{1}{1-x^{(k-1)}} = \frac{1-(k-1)x}{1-kx}$, y efectuando el producto de todos ellos viene para este el valor $\frac{1}{1-kx}$.

Como hubiéramos obtenido resultados análogos partiendo de la fórmula (2), podremos establecer las dos (3) (4).

Debe notarse, que si en la fórmula (3) se efectuan las multiplicaciones de la variable x' por los respectivos sumandos de que constan sus coeficientes, y se toma la suma indefinida de aquellos términos en que entrarán como factores comunes los A, A', A'', &c. de la primitiva, se tendrá sucesivamente para la suma de los términos que multiplican á A

$$\frac{A}{1-kx}\times[1-kx'+k^2x'^2-k^3x'^3+k^4x'^4-\&c.]=\frac{A}{(1-kx)(1+kx')}=A,$$

para la suma de los que multiplican á A'

$$\frac{A'x'}{1-kx'}\times[1-2kx'+3k^2x'^2-4k^3x'^3\ldots\pm mk^{m-1}x'^{m-1}\pm\&c.]=$$

$$=\frac{A'x'}{(1-kx)(1+kx')^2}=A'x$$

y asi de los demás, lo cual comprueba las fórmulas establecidas.

48. Para efectuar las transformaciones que acaban de indicarse, se puede tambien suponer que la variable se convierte en un producto $x=ax_{,}$, uniendo el factor a á los coeficientes respectivos de la serie, considerando que hace parte de ellos, y efectuando la transformacion con relacion á la variable $x_{,}=\frac{x}{a}$. Si se practica esta operacion, el coeficiente general de la transformada será

$$A_{,}^{(m)}=\Sigma(-1)^n\times\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}\times k^n.\,a^{m-n}.\,A^{(m-n)},$$

y su variable $x'=\frac{x_{,}}{1-kx_{,}}=\frac{x}{a-kx}$ y en fin el factor $\frac{1}{1-kx_{,}}=\frac{a}{a-kx}$.

Si se vuelve á repetir la operacion haciendo nuevamente $x'=a'x_{,,}$, se tendrá

$$A_2^{(m)} = \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n} \times k'^n . a'^{m-n} . A_1^{(m-n)},$$

y sustituyendo por $A_1^{(m-n)}$ su valor dado en la fórmula que antecede, representando como en el número precedente por n la suma $n+n'$, y por $\triangle' n$, $\triangle'' n$ cada una de estas cantidades, vendrá

$$A_2^{(m)} = \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots\triangle' n \times 2.3\ldots\triangle'' n}$$

$$\times k'^{\triangle' n} . k^{\triangle'' n} . a'^{m-\triangle' n} . a^{m-n} A^{(m-n)}$$

pero

$$\Sigma \frac{k'^{\triangle' n} . k^{\triangle'' n} \times a'^{-\triangle' n}}{2.3\ldots\triangle' n \times 2.3\ldots\triangle'' n} = \frac{(k'+a'k)^n}{a'^n \times 2.3\ldots n};$$

luego la espresion anterior se transformará en

$$A_2^{(m)} = \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}$$

$$\times (k'+a'k)^n . (aa')^{m-n} . A^{(m-n)},$$

y será la nueva variable $x'' = \frac{x}{a'-k'x'} = \frac{x}{aa'-(k'+a'k)x}$, y el factor

$\frac{a'}{a'-k'x'} = \frac{a'(a-kx)}{aa'-(k'+a'k)x}$, que combinado con el de la primera transformacion da $\frac{aa'}{aa'-(k'+a'k)x}$. Efectuando otra tercera transformacion, suponiendo al efecto $x'' = a''x_{///}$ será

$$A_3^{(m)} = \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n} \times k''^n . a''^{m-n} . A_2^{(m-n)},$$

y sustituyendo del mismo modo en vez de $A_2^{(m-n)}$ su valor dado en la fórmula que se acaba de inferir, representando siempre por n la suma

$n+n'$, y por $\triangle' n$, $\triangle'' n$ cada una de estas cantidades, vendrá

$$A_3^{(m)} = \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots\triangle' n \times 2.3\ldots\triangle'' n}$$

$$\times k''^{\triangle' n}.\ a''^{m-\triangle' n} \times (k'+a'k)^{\triangle'' n}.\ (aa')^{m-n}.\ A^{(m-n)},$$

pero se tiene asimismo

$$\Sigma = \frac{\left(\frac{k''}{a''}\right)^{\triangle' n} \times (k'+a'k)^{\triangle'' n}}{2.3\ldots\triangle' n \times 2.3\ldots\triangle'' n} = \frac{(k''+a''k'+a'a''k)^n}{a^n \times 2.3\ldots n}$$

luego el valor que antecede se transformará en

$$A_3^{(m)} = \Sigma(-1)^n \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}$$

$$\times (k''+a''k'+a'a''k)^n (aa'a'')^{m-n}.\ A^{(m-n)},$$

la nueva variable es $x''' = \dfrac{x''}{a''+k''x''} = \dfrac{x}{aa'a''+(a'a''k+a''k'+k'')x}$

y el nuevo factor $\dfrac{a''}{a''-k''x''} = \dfrac{a''[aa'-(ka'+k')x]}{aa'a''-(a'a''k+a''k'+k'')x}$, el que combinado con el deducido en la segunda transformacion produce

$$\frac{aa'a''}{aa'a''-(a'a''k+a''k'+k'')x}.$$

Continuando estas operaciones hallaríamos los resultados subsiguientes, cuya ley se percibe; mas para el objeto que nos proponemos, estos no tienen otra transcendencia que la que resulta de suponer que el producto $aa'a''$ represente una cantidad cualquiera indeterminada a, y que la suma $a'a''k+a''k'+k''$ represente otra cantidad cualquiera indeterminada k. Con arreglo á esto se han establecido las fórmulas (5) (6).

49. Vamos ahora á hacer aplicacion de las fórmulas que se acaban de hallar á algunos ejemplos. Sea el primero la serie

$$\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+a^3x^3+a^4x^4+\&c.$$

verificando k transformaciones vendrá

$$\frac{1}{1-ax}=\frac{1}{1-kx}[1+(a-k)x'+(a-k)^2x'^2+(a-k)^3x'^3+\&c.]$$

si a es un número entero, y k se aproxima mucho de él, los coeficientes $(a-k)$, $(a-k)^2$, &c., disminuirán rápidamente, y al propio tiempo el valor de la variable $x'=\frac{x}{1-kx}$, siendo asimismo un quebrado disminuirá tambien, por manera que la serie se hará tan convergente como se quiera. Si a es una fraccion, por ejemplo $\frac{1}{2}$, á proporcion que aumente k, aumentará el valor absoluto de los coeficientes, y por lo tanto crecerán próximamente en la misma razon que las potencias de la variable. Si en este caso introducimos una cantidad a', será

$$\frac{1}{1-ax}=\frac{a'}{a'-kx}[1+(aa'-k)x'+(aa'-k)^2x'^2+(aa'-k)^3x'^3+\&c.]$$

y si se hace k próximamente igual á aa' los coeficientes disminuirán, y el valor de la variable siendo $x'=\frac{x}{a'-kx}$ y próximamente

$=\frac{x}{a'(1-ax)}=\frac{2x}{a'(2-x)}$ disminuirá del mismo modo.

Sea ahora la funcion

$$z=(a-x)^{-n}=\frac{1}{a^n}+n.\frac{x}{a^{n+1}}+\frac{n(n+1)}{2}.\frac{x^2}{a^{n+2}}$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}.\frac{x^3}{a^{n+3}}+\&c.$$

transformándola vendrá

$$z=(a-x)^{-n}=\frac{1}{a^n}\times\frac{a'}{a'-kx}\times$$

$$\times\left\{1+\left(\frac{na'}{a}-k\right)x'+\left(\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{a'^2}{a^2}-2n\times\frac{a'}{a}.\ k+k^2\right)x'^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{n(n+1)\,(n+2)}{2.3}\times\frac{a'^3}{a^3}-3\times\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{a'^2}{a^2}.k+3n.\frac{a'}{a}.k^2-k^3\right]x'^3+\&c.\right\}$$

en la cual haciendo $k=\frac{a'}{a}$ saldrá el factor comun $\frac{a'}{a}$ elevado á las potencias respectivas, y las sumas de los coeficientes serán

$$A_{,}{}^{(o)}=1,\ A_{,}{}'=n-1,\ A_{,}{}''=\frac{n(n+1)}{2}-2n+1=\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}$$

$$A_{,}{}'''=\frac{n(n+1)\,(n+2)}{2.3}-3.\frac{n(n+1)}{2}+3n-1=\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2.3}$$

&c. &c. &c.

la serie anterior se reduce pues á la siguiente

$$z=\frac{1}{a^n}\times\frac{a}{a-x}\times$$

$$\times\left[1+(n-1)\frac{a'}{a}.\ x'+\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}.\frac{a'^2}{a^2}.\ x'^2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}.\frac{a'^3}{a^3}.\ x'^3+\&c.\right]$$

$$=\frac{1}{a^n}\times\frac{a}{a-x}\left[1+\frac{a'x'}{a}\right]^{n-1}=\frac{1}{(a-x)^n}$$

Sea en fin la funcion logarítmica

$$l.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\&c.$$

su transformada será, sacando el factor x que la multiplica,

$$l.(1+x)=\frac{x}{1+kx}\times$$

$$\left[1-\left(\frac{1}{2}-k\right)x'+\left(\frac{1}{3}-\frac{2k}{2}+k^2\right)x'^2-\left(\frac{1}{4}-\frac{3k}{3}+\frac{3k^2}{2}-k^3\right)x'^3+\&c.\right]$$

y haciendo $k=\frac{1}{2}$, los valores de estos coeficientes son sucesivamente

$$A_{,}^{(0)}=1,\ A_{,}'=0,\ A_{,}''=\frac{1}{5},\ A_{,}'''=0,\ A_{,}^{\text{IV}}=\frac{1}{5},\ A_{,}^{\text{V}}=0,\ A_{,}^{\text{VI}}=\frac{1}{7},\&c.,$$

la serie se reduce á

$$l.(1+x)=\frac{2x}{2+x}\left(1+\frac{1}{3}x'^2+\frac{1}{5}x'^4+\frac{1}{7}x'^6+\&c.\right)$$

que siendo $x'=\frac{x}{2+x}$, y por tanto $x=\frac{2x'}{1-x'}$ puede escribirse así

$$l.\left(1+\frac{2x'}{1-x'}\right)=l.\left(\frac{1+x'}{1-x'}\right)=2\left[x'+\frac{x'^3}{3}+\frac{x'^5}{5}+\frac{x'^7}{7}+\&c.\right],$$

cuya ecuacion es conocida en los tratados de álgebra, y se deduce restando de la serie que representa el valor de $l.(1+x')$ la que representa el de $l.(1-x')$.

50. Estas transformaciones pueden servir para determinar el valor de una serie cuando sea en ella la variable $x=\infty$. En efecto, si en la fórmula (4) se hace $x=\infty$, será $x'=\frac{1}{k}$, y por lo tanto el valor de la serie primitiva en este supuesto, será el mismo que el de la transformada cuando x' tenga el valor indicado. Para hacer una aplicacion, propongámonos determinar el valor de la espresion

$$z=\frac{l.(2+x)+\frac{1}{2+x}-l.2-\frac{1}{2}}{x}$$

cuando $x=\infty$. Desarrollando en serie se tendrá sucesivamente

$$l.(2+x)-l.2=l.\left(1+\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{4}+\frac{1}{3}.\frac{x^3}{8}-\frac{1}{4}.\frac{x^4}{16}\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\times\frac{1}{n}.\left(\frac{x}{2}\right)^n+\&c.$$

$$\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}=-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^4}{32}\cdots+(-1)^n.\frac{1}{2}.\left(\frac{x}{2}\right)^n+\&c.$$

y sumando estas dos series, partiendo la suma por x, será

$$\left.\begin{aligned} z=\frac{1}{x}\Big[&\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{x^3}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{x^4}{16}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\\ &\cdots\cdots+(-1)^r.\left(\frac{x}{2}\right)^r\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}=\frac{r-2}{2r}\right)+\&c.\Big]=\\ =\frac{1}{4}+\frac{x}{8}\Big[&\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{4}\left(-\frac{x}{2}\right)^2\cdots+\frac{r}{r+2}\times\left(-\frac{x}{2}\right)^r+\&c.\Big] \end{aligned}\right\}(a)$$

haciendo en la serie que está encerrada dentro del paréntesis

$$x'=\frac{\frac{-x}{2}}{1+\frac{x}{2}}=\frac{-x}{2+x}$$ de donde $x=\frac{-2x'}{1+x'}$, y transformándola viene

$$z=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.(-x')\times$$

$$\left[\frac{1}{3}x'-\frac{1}{2.3}.x'^2+\frac{1}{2.5}x'^3-\frac{1}{3.5}.x'^4+\frac{1}{3.7}.x'^5-\frac{1}{4.7}.x'^6+\frac{1}{4.9}.x'^7-\&c.;\right.$$

si en esta espresion se hace $x'=-1$, dará el valor que corresponde en la primitiva al supuesto de $x=\infty$, el cual por lo tanto será

$$z=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.5}-\frac{1}{3.5}-\frac{1}{3.7}-\frac{1}{4.7}-\frac{1}{4.9}-\frac{1}{5.9}-\&c.\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}-\frac{1}{7.8}-\frac{1}{8.9}-\frac{1}{9.10}-\&c.\right)$$

pero se tiene

$$l.2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\&c.$$

y si se restan primeramente los términos pares de los impares, y despues al contrario, vendrán las dos espresiones

$$l.2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{9.10}+\frac{1}{11.12}+\&c.$$

$$l.2=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{4.5}-\frac{1}{6.7}-\frac{1}{8.9}-\frac{1}{10.11}-\&c.$$

y restando la primera de estas espresiones de la segunda vendrá la misma serie obtenida anteriormente; luego $z=\frac{1}{2}(l.2-l.2)=0$.

51. Observando atentamente la naturaleza de las fórmulas que se han establecido, se verá que en general los coeficientes de las series transformadas deben crecer en razon de las magnitudes que se asignen á las cantidades a y k. Si al valor $x=\infty$ corresponde el de la funcion $z=\infty$, viniendo en este supuesto á la x' el $x'=\frac{1}{k}$, cuando en la serie transformada se asigne este valor á la variable x', deberá el suyo ser infinito, y por lo tanto no podrá venir convergente. Como los valores de x' relativos á los de x mayores que la unidad diferirán poco del $\frac{1}{k}$, á no suponer que a sea muy grande, lo que haria los cálculos embarazosos, resulta que las series obtenidas de esta manera en la indicada suposicion, y para los referidos valores de x mayores que la unidad, deben en general ser muy poco, ó no ser convergentes. Puede adoptarse el recurso de calcular el valor de la funcion $\frac{z}{1+z}$, á la que corresponde un valor $=1$ cuando el de $z=\infty$. Con objeto de aplicar este procedimiento á un ejemplo particular, propongámonos determinar el valor de z en la serie siguiente.

$$\sqrt[3]{1-x}=1-z=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{81}.x^3-\frac{10}{243}x^4-\frac{22}{729}.x^5-\frac{154}{6561}.x^6-\&c.$$

transformándola en el supuesto de hacerse $x'=\frac{x}{2+x}$ será

$$z=2\left[\frac{1}{3}x'+\frac{5}{9}x'^2+\frac{85}{81}x'^3+\frac{503}{243}x'^4+\frac{3283}{729}x'^5+\frac{68045}{6561}x'^6+\&c.\right] \quad (b).$$

El término general de la espresion $\frac{1}{1+x}$ desarrollada en serie es $(-1)^n x^n$; y por lo tanto, llamando a', a'', a''', &c., los coeficientes de la que

acabamos de escribir que representa el valor de $\frac{z}{2}$, el término general de la serie que represente el valor de $z_i = \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{2}{2+z}$ vendrá dado en la espresion

$$\Sigma(-1)^n . 2.3...n \times \Sigma P . \frac{a^{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)} \Delta n}{2.3...\Delta n}$$

á fin pues de calcular los coeficientes particulares sucesivos contenidos en esta espresion general, organizaremos las sumas de productos múltiplos indicada por el signo $\Sigma P.$ en la siguiente tabla.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
$N=1$	$\frac{1}{3}$					
$N=2$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2.9}$				
$N=3$	$\frac{83}{81}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{1}{2.81}$			
$N=4$	$\frac{503}{243}$	$\frac{241}{243.2}$	$\frac{5}{2.81}$	$\frac{1}{8.243}$		
$N=5$	$\frac{3283}{729}$	$\frac{918}{729}$	$\frac{79}{729}$	$\frac{5}{2.9.81}$	$\frac{1}{5.8.729}$	
$N=6$	$\frac{68045}{6561}$	$\frac{41677}{2.6561}$	$\frac{1458}{2.3.729}$	$\frac{391}{4.6561}$	$\frac{5}{3.8.729}$	$\frac{1}{5.16.6561}$

Verificando ahora las sumas de estos valores que se hallan en una misma línea horizontal, multiplicando para este efecto cada uno por la espresion $(-1)^n \times 2.3...n$ indicada en la fórmula, vendrá la serie

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{1}{3}x' - \frac{4}{9}x'^2 - \frac{56}{81}x'^3 - \frac{304}{243}x'^4 - \frac{1864}{729}x'^5 - \frac{37360}{6561}x'^6 - \&c.$$

la cual multiplicada por la (b) que contiene el valor de $\frac{z}{2}$ dará

$$z' = \frac{z}{2+z} = \frac{1}{3}x' + \frac{4}{9}x'^2 + \frac{56}{81}x'^3 + \frac{304}{243}x'^4 + \frac{1864}{729}x'^5 + \frac{37360}{6561}.\ x'^6 + \&c.$$

Si se supone $x = 9$ será $x' = \frac{9}{11}$, y aunque esta serie no es convergente, reducido en ella el valor de la variable á un quebrado, será posible hacer uso del método general esplicado en el número (45).

52. Las fórmulas generales (5) (6) resultan tambien de sustituir en vez de la variable x la x' ligada á ella por la relacion $x = \frac{ax'}{1+kx'}$ ó $\frac{ax'}{1-kx'}$. En efecto, el término general de esta espresion elevada á la potencia n se obtendrá efectuando su desarrollo, que es

$$x^n = a^n x'^n \times \Sigma \frac{n(n+1)...(n+h-1)}{2.3...h} \times x'^h.\ k^h$$

y multiplicándolo por el coeficiente $A^{(n)}$ de la serie dada, se tendrá para el término general de la resultante

$$A_{,}^{(n+h)}.\ x'^{n+h} = x'^{n+h} \times \Sigma \frac{n(n+1)...(n+h-1)}{2.3...h} \times A^{(n)} a^n k^h$$

y haciendo $n+h=m$, representando n por $m-n$ y h por n será

$$A_{/}^{(m)}=\Sigma\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{2.3\ldots n}\times A^{(m-n)}.\ a^{m-n}.\ k^{n}$$

cuya espresion es la misma que se obtendrá en la fórmula (6) sustituyendo en el factor $\frac{a}{a+kx}$ en vez de x su valor $x=\frac{ax'}{1-kx'}$, con lo que se reduce á $1-kx'$, y efectuando la multiplicacion de la serie por este factor.

En general la fórmula (1) del capítulo 2.° hace conocer, que si en una serie cualquiera dada se sustituyese en vez de su variable x otra serie conocida que esté toda ella multiplicada por la nueva variable x', ó bien que carezca de término constante, los coeficientes de la serie que resulte deben obtenerse por medio de sumas finitas de los de la primitiva, combinados con los de la sustituida.

53. Está reconocido como un principio general y evidente, que toda serie caracteriza la funcion de que procede, y da su valor cuando es convergente, porque es el resultado de ejecutar sobre la variable la operacion que indica el algoritmo de la funcion. Si pues en una funcion dada cuyo desarrollo en serie sea

$$f(x)=A+A'x+A''x^{2}+A'''x^{3}+\&c.$$

se sustituye en vez de la variable x una funcion en otra x'

$$x=f'(x')=a+a'x'+a''x'^{2}+a'''x'^{3}+\&c.,$$

se obtendrá la funcion mediata $f(f'(x'))$, en la cual se verificará que un valor determinado de $x'=h'$ dará para ella el mismo que se obtendria en la funcion simple $f(x)$, dando á x el valor $x=h$, ligado al h' por la relacion $h=f'(h')$: la serie que represente el valor de la funcion mediata $f(f'(x'))$ será la misma que se obtenga sustituyendo en la que represente el valor de $f(x)$ la que igualmente representa el valor de

$f'(x')$; por consiguiente, si la serie obtenida por esta sustitucion es convergente, y puede determinarse su valor correspondiente al de la variable $x'=h'$, este valor será el mismo que corresponda á la serie primitiva, que es el desarrollo de $f(x)$ cuando se haga en ella $x=h$.

54. Entre las funciones que pueden sustituirse en vez de la variable x en una serie dada, que ofrecen resultados mas sencillos, consideraremos primeramente la $x=\frac{x'}{(1+x')^p}$. Si p es un número mayor que la unidad, x deberá ser siempre un número quebrado menor que la misma unidad, porque sea que x' sea mayor ó menor que dicha unidad, el quebrado $\frac{x'}{(1+x')^p}$ será siempre menor que ella. El máximo valor de esta funcion corresponde al de $x'=1$ y es $\left(\frac{1}{2}\right)^p$; fuera de este máximo habrá dos valores de x', que darán uno mismo para x, el uno mayor y el otro menor que la referida unidad. Bajo este concepto, la funcion que nos ocupa no nos puede servir para disminuir los valores de x; pero si se obtiene la forma general de los coeficientes de la serie que resulta de practicar la correspondiente sustitucion en la dada, podrán calcularse los coeficientes de otra serie desconocida $B'x+B''x^2+B'''x^3+$&c., en la que x' tenga el valor $x'=\frac{x}{(1+x)^p}$, pues para el efecto solo será necesario efectuar la sustitucion en esta serie, obteniendo su desarrollo por la fórmula general que se determine, é igualar sus coeficientes á los de la primitiva, despejando despues, en funcion de estos, los B', B'', B''', &c., desconocidos. Si p es menor que la unidad, será siempre $(1+x')^p>1$, y la variable x' será tambien menor que x, pudiendo tan solo serle igual cuando $p=0$.

Si, pues, en la serie genérica

$$z=A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(h)}x^h+\text{&c.},$$

se sustituye en vez de x el valor $x=\frac{x'}{(1+x')^p}$, su término general será

$$A^{(h)}x^h=A^{(h)}x'^h\times\left(\frac{1}{1+x'}\right)^{ph}=$$

$$A^{(h)}.\Sigma(-1)^{h'}\times\frac{ph(ph+1)...(ph+h'-1)}{2.3...h'}\times x'^{h+h'},$$

y haciendo $h+h'=m$, $h=n$, vendrá la fórmula general escrita en (7).

Supongamos primeramente en esta fórmula $p=2$; será, por tanto,

$$x=\frac{x'}{(1+x')^2}$$

y despejando en esta ecuacion á x' vendrá

$$x'=\frac{1-2x\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$$

este valor es imaginario, á no tenerse $x<\frac{1}{4}$, y en este caso hay dos valores para x', uno mayor y otro menor que la unidad. Si desarrollamos esta espresion, tomando el signo inferior del radical, vendrá

$$x'=x...+\Sigma(-1)^h\times\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)...\left(-\frac{1}{2}+h-1\right)}{2.3...h}\times\frac{4h.\ x^{h-1}}{2}$$

esta serie está toda ella multiplicada por x, y si se sustituye en la general

$$z=A_{,}+A_{,}'x'+A_{,}''x'^2+A_{,}'''x'^3...+A_{,}^{(n)}x'^n+\&c.,$$

dará, para la serie resultante en x, coeficientes finitos, que serán los

inversos del procedimiento anterior; mas si se toma el signo superior del radical, los dos primeros términos del desarrollo son $\frac{2-4x}{2x}=\frac{1}{x}-2$, y por lo tanto, efectuando la sustitucion, la serie que se obtendria vendria con coeficientes indefinidos y esponentes positivos y negativos de la variable. Resulta de aqui, que si dada la serie

$$z=A+A'x+A''x^2+A'''x^3+\&c.,$$

se obtiene la

$$z=B+B'x'+B''x'^2+B'''x'^3+\&c.,$$

en la que sea $x'=\frac{x}{(1+x)^2}$, y se determina el valor de esta serie para uno dado de x', este ha de corresponder al que pertenezca en la serie primitiva al valor de x menor que la unidad, mas no al mayor de los dos que pueden dar el asignado á x': se infiere, por lo tanto, que esta transformacion podrá servir únicamente para disminuir los valores de la variable x, luego que lleguen á ser menores que la unidad, y por analogía puede presumirse que sucederá lo mismo cuando p tenga un valor cualquiera, así como en otras funciones de la misma naturaleza.

La fórmula (8) contiene la relacion general que debe establecerse entre los coeficientes B', B'', B''', &c. de la serie transformada, y los A', A'', A''', &c. de la primitiva, en el supuesto de que la variable $x'=\frac{x}{(1+x)^p}$.

55. Otra de las funciones que por la sencillez de los resultados puede sustituirse en vez de la variable x, es la $x=x'e^{kx'}$. Efectuándolo el término general $A^{(n)}x^{(n)}$ de la serie primitiva se transformará en

$$A^{(n)}x^n=A^{(n)}\Sigma\frac{k.^hn^h}{2.3...h}\times x'^{h+n}=A^{(n)}x'^n.e^{knx'}$$

y haciendo $h+n=m$, vendrá para el término general $A_{,}^{(m)}$ de la transformada, el valor contenido en la fórmula (9).

Si los coeficientes de la serie dada son todos positivos, haciendo uso de esta fórmula, se sumarán haciéndose crecientes: para que se restasen sería preciso sustituir la funcion $x=\frac{x'}{e^{kx'}}$ que introduciria en la fórmula hallada el factor $(-1)^{m-n}$; mas, análogamente á lo espuesto en el número anterior, esta ecuacion no puede dar para x' un valor real, sino cuando x sea menor que $\frac{1}{e^k}$, el cual es el máximo valor del segundo miembro, y corresponde al supuesto de $x=1$. Pudiera tambien procederse de un modo semejante al que hemos esplicado en dicho número anterior, determinando los coeficientes de la serie desconocida

$$z=B'x'+B''x'^2+B'''x'^3+\&c.,$$

en la que la variable x' esté ligada á la x de la serie primitiva por la relacion $x'=\frac{x}{e^{kx}}$; pero debe observarse que en esta relacion, del mismo modo que en la $x'=\frac{x}{(1+x)^2}$, cada valor determinado de x' puede ser producido por dos diferentes de x, el uno mayor y el otro menor que la unidad, y que los valores que se obtengan en la serie transformada, sustituyendo por x' dicho valor determinado, serán los mismos que reciba la serie primitiva, en el caso de asignarse á x, de los dos valores mencionados, aquel que sea menor que la unidad.

Si en el supuesto de sustituir, en vez de la variable x, en la serie primitiva dada, la funcion $x=x'e^{kx'}$, y de haber determinado la série transformada, cuya variable sea x', representando su valor por z, determinásemos una nueva serie cuyo valor z' esté ligado al z por la relacion $z=z'e^{kz'}$; despues se vuelve á transformar esta serie sustituyendo

en vez de la variable x', la funcion $x'=x''e^{kx''}$, y se determina asimismo la serie cuyo valor $z'=z''e^{kz''}$, y se continúa de este modo sucesivamente, los valores consecutivos x', x'', x''', &c. de la variable, han de ir tendiendo progresivamente á igualarse con los z', z'', z''', &c., de la funcion respectiva, siempre que el valor z de la serie primitiva sea real y positivo.

Para obtener estas transformaciones sucesivas es preciso determinar el valor de z' en funcion de z en la ecuacion $z=z'e^{kz'}$, invirtiendo al efecto la serie que se obtiene, desarrollando su segundo miembro, la que prescindiendo de la cantidad k, es

$$z=z'e^{z'}=z'+z'^2+\frac{z'^3}{2}+\frac{z'^4}{2.3}\cdots+\frac{z^h}{2.3\ldots(h-1)}+\&c.,$$

si se ordena de un modo análogo al que se puso en práctica en el número (51), la tabla de productos múltiplos disminuyendo un lugar á la característica general h del esponente de x, se tendrá la siguiente:

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$
$N=1$	$\frac{1}{1}$								
$N=2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
$N=3$	$\frac{1}{2.3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2.3}$						
$N=4$	$\frac{1}{2.3.4}$	$\frac{7}{2.3.4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2.3.4}$					
$N=5$	$\frac{1}{2.3.4.5}$	$\frac{3}{2.3.4}$	$\frac{5}{2.3.4}$	$\frac{1}{3.4}$	$\frac{1}{2.3.4.5}$				
$N=6$	$\frac{1}{2.3.4.5.6}$	$\frac{31}{2.5.8.9}$	$\frac{3}{2.3.4}$	$\frac{13}{9.16}$	$\frac{1}{3.16}$	$\frac{1}{2.3.4\ 5.6}$			
$N=7$	$\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$	$\frac{9}{2.5.8.9}$	$\frac{43}{5.9.16}$	$\frac{5}{9.8}$	$\frac{5}{9.16}$	$\frac{1}{3.5.16}$	$\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$		
$N=8$	$\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}$	$\frac{127}{5\ 7.8.9.16}$	$\frac{69}{4.5.9.16}$	$\frac{243}{5.9.16.8}$	$\frac{15}{9.16.4}$	$\frac{19}{5.9.16.4}$	$\frac{1}{5.9.16.2}$	$\frac{1}{2.3.4.5\ 6.7.8}$	
$N=9$	$\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}$	$\frac{85}{3.5.7.9.8.16}$	$\frac{3025}{5.7.9.9.16.8}$	$\frac{60}{5.9.16.4}$	$\frac{331}{3.5.9.16.8}$	$\frac{21}{5.9.16.4}$	$\frac{11}{3.5.9.16.4}$	$\frac{1}{5.7.9.16.2}$	$\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}$

Sumando ahora los números que se hallan en una misma línea horizontal, multiplicados respectivamente por la cantidad $(-1)^n\times$ $\times(N+1)(N+2)\ldots(N+n-1)$, segun indica la fórmula (3) del capítulo 3.°, advirtiendo que el coeficiente que multiplica la primera potencia de la variable, designada en esta fórmula por la letra A, es en este caso igual á la unidad, y que como la suma de acentos, que en dicha fórmula se refiere á la potencia x^N de los factores contenidos en el signo $\Sigma P.$, es igual á $N-1$, deberá tomarse la línea horizontal inmediatamente superior al valor de N que se considere; vendrá efectuando el cálculo la serie siguiente:

$$z'=z-z^2+\frac{3}{2}.z^3-\frac{4^2}{2.3}.z^4+\frac{5^3}{2.3.4}.z^5-\frac{6^4}{2.3.4.5}.z^6+\frac{7^5}{2.3.4.5.6}z^7$$

$$-\frac{8^6}{2.3.4.5.6.7}z^8+\frac{9^7}{2.3.4.5.6.7.8}.z^9\ldots$$

$$+(-1)^{n+1}\times\frac{n^{n-2}}{2.3\ldots(n-1)}.z^n+\&c.\ldots\ldots(a).$$

En la ecuacion $z=z'e^{kz'}$, el valor de z' ordenado por las potencias de z se deducirá de la serie que acabamos de hallar, pues multiplicando ambos miembros de esta ecuacion por k se tendrá $kz=kz'e^{kz'}$, y dicha serie dará el valor de kz' ordenado por las potencias de kz; dividiendo despues ambos miembros por k vendrá la serie general contenida en la fórmula (10).

El resultado que se acaba de obtener pone patentes dos estremos: el primero es que una serie, cuyos coeficientes sean decrecientes, puede dar para su serie inversa coeficientes crecientes, y al contrario; y el segundo la diferencia que produce en el resultado de la inversion el tomar un término mas ó menos en la serie dada, multiplicándola ó dividiéndola por la variable, pues invirtiendo la serie

$$z=z'+\frac{z'^2}{2}+\frac{z'^3}{2.3}+\frac{z'^4}{2.3.4}\ldots+\frac{z'^n}{2.3\ldots n}+\&c.,$$

se obtendrá, como se sabe,

$$z'=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}\ldots+(-1)^{n+1}.\frac{z^n}{n}+\&c.,$$

bien distinta de la anterior (a), en cuanto á que los coeficientes de la una crecen progresivamente, ínterin que los de la otra decrecen.

Es digno de observarse en la transformacion de que estamos tratando, que cuando la variable x es igual al ∞, la x' es asimismo infinita, y lo que únicamente hace es disminuir relativamente de valor; por manera, que si á la suposicion $x=\infty$ corresponde el valor de la serie dada $z=\infty$, el mismo valor corresponderá asimismo á la nueva transformada representada por z'; y si en el mismo supuesto de $x=\infty$ correspondiese á la serie dada z un valor finito, corresponderá tambien á las dos transformadas un valor finito cuando sus variables se hagan infinitas.

56. Se infiere de lo espuesto, que el método que podrá seguirse para determinar los valores de una serie dada, haciéndola convergente, será el de transformarla por los medios indicados, disminuyendo el valor de la variable, efectuado lo cual se podrá sustituir con el fin de hacer disminuir los valores de sus coeficientes en una serie conocida, que para mayor sencillez puede ser una de las elementales. Con este objeto, si suponemos que la serie transformada sea

$$z=A_{,}'x'+A_{,}''x'^2+A_{,}'''x'^3+\&c.,$$

atendiendo que la suma de productos indicada por el signo general

$$\Sigma P.\frac{A_{,}^{\left(\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n},$$

debe en cada caso ser una funcion particular, cuyos valores dependerán de las cantidades N n, y se obtendrán por medio de un pro-

cedimiento fijo ejecutado sobre los coeficientes numéricos de la serie; si por tanto representamos la referida suma por el signo general $f^n(N)$, haciendo

$$\Sigma P.\frac{A_{\prime}^{\left(\frac{\triangle^v}{\triangle^n}\right)\triangle n}}{2.3...\triangle n}=f^n(N)$$

vendrán, para la sustitucion en las diversas funciones elementales, las fórmulas señaladas con el número (11), de las cuales podrá elejirse la que mas convenga en el caso propuesto. Respecto á la quinta de ellas, que es $z'=\frac{z}{e^{k z}}$, debe tenerse presente que únicamente podrá servir para calcular los valores de z' cuando los de z sean menores que la unidad, y consiguientemente en la serie que resulte únicamente podrán apreciarse los referidos valores de z' menores que $\frac{1}{e^k}$.

Tambien podrá hacerse uso, para el objeto de que nos ocupamos, del método inverso, efectuando primeramente la inversion de la serie dada, y despues la de alguna de sus transformadas. Si la serie inversa es tal que sus coeficientes decrecen, y puede por medio de tanteos asignarse á la z ó z', &c. un valor tal, que sustituido en ella dé por resultado el de x ó x', &c., se habrá de esta manera conseguido el objeto que se desea. Con el mismo fin podrá tambien en muchos casos utilizarse la fórmula (4) del capítulo 3.° que antecede, la que se reproduce en este señalándola con el número (12): para hacer uso de ella deberá efectuarse una primera inversion, obteniendo los valores de x, x', &c., en z, z', &c., practicado lo cual se volverá á invertir la serie obtenida, asignando á p el valor que dé resultados mas ventajosos.

Ultimamente, pueden tambien compararse las series que se obtengan, á otras cuyos valores sean conocidos, y sumarlas, restarlas ó multiplicarlas, &c., por ellas.

57. A fin de poner en claro la marcha de estos cálculos, vamos á tomar por ejemplo la misma serie del número (51), que es

$$\sqrt[3]{1-x}=1-z=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4-\frac{22}{729}x^5-\frac{154}{6561}x^6-$$

$$-\frac{374}{3.6561}x^7-\frac{935}{9.6561}x^8-\frac{21505}{81.6561}x^9-\frac{55913}{243.6561}x^{10}-\&c...(a).$$

haciendo $x=x'e^{2x'}$, y transformando esta serie por la fórmula (9), viene la siguiente

$$z=\frac{1}{3}x'+\frac{7}{9}x'^2+\frac{95}{81}x'^3+\frac{424}{243}x'^4+\frac{2098}{729}x'^5+\frac{168566}{5.6561}.x'^6+$$

$$+\frac{947968}{15.6561}\times x'^7+\frac{33571149}{5.7.9.6561}\times x'^8+\frac{585395645}{5.7.81.6561}\times x'^9+\&c...(b).$$

efectuando el cálculo de las sumas de productos de los coeficientes de esta serie, ó bien de las funciones que hemos designado por el símbolo general $f^n(N)$ con objeto de poderla sustituir, se formará la siguiente tabla.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$N=1$	$\frac{1}{3}$							
$N=2$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{2.9}$						
$N=3$	$\frac{95}{81}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{2.81}$					
$N=4$	$\frac{424}{243}$	$\frac{337}{2.243}$	$\frac{7}{2.81}$	$\frac{1}{8.243}$				
$N=5$	$\frac{2089}{729}$	$\frac{1089}{729}$	$\frac{121}{729}$	$\frac{7}{2.729}$	$\frac{1}{3.8.729}$			
$N=6$	$\frac{168566}{32805}$	$\frac{39421}{2.6561}$	$\frac{2097}{2.3.729}$	$\frac{631}{4.6561}$	$\frac{7}{3.8.729}$	$\frac{1}{3.16.6561}$		
$N=7$	$\frac{947968}{15.6561}$	$\frac{590256}{3.5.6561}$	$\frac{25346}{3.6561}$	$\frac{1724}{3.6561}$	$\frac{389}{3.8.6561}$	$\frac{7}{3.8.6561}$	$\frac{1}{3.7.16.3.6561}$	
$N=8$	$\frac{55571149}{3.7.9.6561}$	$\frac{3573920}{3.9.6561}$	$\frac{1659461}{2.3.9.6561}$	$\frac{125121}{8.9.6561}$	$\frac{2571}{4.9.6561}$	$\frac{185}{16.9.6561}$	$\frac{7}{3.16.9.6561}$	$\frac{1}{3.7.8.16.9.6561}$

Construida esta tabla nos hallamos en el caso de elejir, para efectuar la sustitucion, aquella serie que dé resultados mas ventajosos. Suponiendo primeramente $z'=l.(1+z)$, y efectuando el cálculo de los coeficientes de la nueva serie z', haciendo uso de la fórmula segunda de las (11), viene el siguiente resultado;

$$z'=\frac{1}{3}x'+\frac{13}{2.9}x'^2+\frac{75}{81}x'^3+\frac{1105}{972}x'^4+\frac{6158}{3645}x'^5+\frac{194087}{65610}x'^6+$$

$$+\frac{3828849}{688905}x'^7+\frac{157912185}{16555720}x'^8+\frac{7567673669}{446410440}x'^9+\&c.$$

Si se hace $z'=\frac{1}{e^z}$, y se calculan del mismo modo los coeficientes por la fórmula tercera de las (11), vendrá la siguiente

$$z'=1-\frac{1}{3}x'-\frac{13}{18}x'^2-\frac{149}{162}x'^3-\frac{2127}{1944}x'^4-\frac{45061}{29160}x'^5-\frac{1359445}{524880}x'^6-$$

$$-\frac{52511001}{11022480}x'^7-\frac{1762115651}{264559520}x'^8-\&c.$$

En estas dos series los coeficientes crecen. No hacemos uso de la fórmula primera de las mismas (11), por cuanto es claro que suponiendo en ella $-m=3$ y $A=-1$, deberá darnos los coeficientes que correspondan al desarrollo de la funcion $x'e^{2-x'}$; pero sí finalmente hacemos uso de la fórmula quinta de las espresadas, multiplicando antes por 3 los dos miembros de la serie primitiva, ó bien estableciendo la relacion $3z=z'e^{2z'}$, por razon de que, como segun se ha manifestado los valores z' y x' deben aproximarse á ser iguales, es conveniente que el coeficiente de la primera potencia de la variable x' sea la unidad, de modo que la suma de los restantes términos de la serie, esprese la diferencia entre dichos valores de x' y z'. Efectuando el cálculo, haciendo para ello uso de la misma tabla que precede, teniendo cuidado de multiplicar cada número respectivo por la cantidad 3^n, vendrá

$$z'=x'+\frac{1}{3}x'^2+\frac{5}{27}x'^3+\frac{76}{81}x'^4+\frac{100}{243}x'^5+\frac{6016}{2187}x'^6+$$

$$+\frac{63286}{32805}x'^7+\frac{937755}{688905}x'^8+\&c...(c).$$

debe notarse que los tres primeros términos son idénticos á los de la serie dada (a), y si se repiten otras operaciones bajo las mismas bases ó supuestos, estos tres términos permanecerian siempre los mismos, el cuarto aumentaria de valor, y se llegaria probablemente á una serie con términos aditivos y sustractivos. Si hubiéramos ejecutado la operacion bajo el supuesto de $z=z'e^{2z'}$, empleando los números de la tabla que precede tal como están escritos, el resultado hubiera sido

$$z'=\frac{1}{3}x'+\frac{5}{9}x'^2+\frac{29}{81}x'^3+\frac{64}{243}x'^4+\frac{556}{729}x'^5+\frac{52404}{32805}x'^6+$$

$$+\frac{257078}{98415}x'^7+\frac{5027787}{2066715}x'^8+\&c.$$

Examinemos, por último, los resultados que se obtienen por medio de la inversion. Si se quiere invertir la serie transformada (b), multiplicando sus dos miembros por 3, á fin de que los coeficientes de la serie inversa no sean tan crecidos, se formará la siguiente tabla.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$N=1$	$\frac{7}{3}$							
$N=2$	$\frac{95}{27}$	$\frac{49}{2.9}$						
$N=3$	$\frac{424}{81}$	$\frac{665}{81}$	$\frac{343}{2.81}$					
$N=4$	$\frac{2098}{243}$	$\frac{26833}{2.729}$	$\frac{4655}{2.243}$	$\frac{2401}{8.3.81}$				
$N=5$	$\frac{168566}{5.3.729}$	$\frac{84338}{3.729}$	$\frac{125503}{2.3.729}$	$\frac{32585}{2.27.81}$	$\frac{16807}{5.8.729}$			
$N=6$	$\frac{947968}{5.6561}$	$\frac{2625952}{5.6561}$	$\frac{8708309}{2.9.6561}$	$\frac{733999}{4.81.81}$	$\frac{228095}{8.6561}$	$\frac{117649}{5.16.6561}$		
$N=7$	$\frac{33571149}{5.7.3.6561}$	$\frac{37255426}{5.9.6561}$	$\frac{52321891}{5.9.6561}$	$\frac{30061631}{2.9.243.81}$	$\frac{4626433}{4.9.6561}$	$\frac{319333}{8.3.6561}$	$\frac{117649}{5.16.3.6561}$	
$N=8$	$\frac{585395645}{5.7.27.6561}$	$\frac{1846637597}{5.7.27.6561}$	$\frac{337187035}{5.27.6561}$	$\frac{14962401173}{8.5.243.6561}$	$\frac{143233706}{4.5.81.6561}$	$\frac{151191313}{5.16.27.6561}$	$\frac{3512663}{5.16.27.6561}$	$\frac{823543}{51.6.8.9.6561}$

Efectuando la operacion del modo que nos es ya conocido, vendrá la siguiente serie

$$x'=z_{,}-\frac{7}{5}\cdot z_{,}^{2}+\frac{199}{27}z_{,}^{3}-\frac{2244}{81}\cdot z_{,}^{4}+\frac{27822}{243}z_{,}^{5}-\frac{1831762}{5.729}\cdot z_{,}^{6}+$$

$$+\frac{8473042}{5.729}z_{,}^{7}-\frac{8200226618}{5.5.7.729}z_{,}^{8}+\&c.\ldots\ldots(d),$$

en la que se supone $z_{,}=5z$. Esta misma serie pudiera tambien haberse obtenido invirtiendo la serie primitiva (a), que dará

$$x=5z-5z^{2}+z^{3},$$

ó escribiendo $z_{,}$ en vez de $5z$

$$x=z_{,}-\frac{z_{,}^{2}}{5}+\frac{z_{,}^{3}}{27}\cdot\ldots\ldots(e),$$

cuyo resultado hubiera debido sustituirse en la serie representada en la fórmula cuarta de las (11), en atencion á tenerse $x=x'e^{2x'}$. Con este fin se formaria la tabla de productos múltiplos, teniendo presente que los coeficientes de la serie que antecede, reducida á un trinomio, son cero desde el tercero en adelante del modo que sigue.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$N=1$	1							
$N=2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$						
$N=3$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2.3}$					
$N=4$	»	$\frac{5}{2.27}$	$\frac{1}{2.3}$	$\frac{1}{2.3.4}$				
$N=5$	»	$\frac{1}{81}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{2.9}$	$\frac{1}{2.3.4.5}$			
$N=6$	»	$\frac{1}{2.729}$	$\frac{1}{2.27}$	$\frac{11}{4.81}$	$\frac{1}{8.9}$	$\frac{1}{2.3.4.5.6}$		
$N=7$	»	»	$\frac{2}{729}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{7}{8.81}$	$\frac{1}{5.8.9}$	$\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$	
$N=8$	»	»	$\frac{1}{2.3.729}$	$\frac{17}{8.729}$	$\frac{5}{4.243}$	$\frac{7}{5.16.81}$	$\frac{1}{5.16.27}$	$\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}$

Como los coeficientes del trinomio (e) son alternativamente positivos y negativos, debe considerarse que les acompaña el factor $(-1)^{\mu+1}$, que producirá en los respectivos productos el $(-1)^{\nu+n}$, el cual combinado con el $(-1)^{n-1}$, que entra en la fórmula cuarta de las (11), dará $(-1)^{\nu-1}$; y por lo tanto la serie resultante de la sustitucion deberá tener sus términos alternativamente positivos y negativos, y el cálculo de sus coeficientes se hará sumando los números de la tabla que antecede, multiplicándolos respectivamente por el factor $2^{n-1}.\ n^{n-1}$, en atencion á que ha desaparecido el $(-1)^{n-1}$. Si se efectúa pues el cálculo en estos términos, vendrá la misma serie (d), la cual es, como se ve, divergente. Si se transforma por la fórmula (9) haciendo $z_{,}=z'e^{2z'}$, vendrá la serie siguiente, que es tambien la inversa de la (c).

$$x'=z'-\frac{1}{3}z'^{2}+\frac{1}{27}z'^{3}-\frac{22}{27}z'^{4}+\frac{218}{243}z'^{5}-\frac{2486}{729}z'^{6}+$$

$$+\frac{119896}{5.729}z'^{7}-\frac{98804884}{3.7.6561}z'^{8}+\&c.$$

Por último, para terminar el cuadro de estas operaciones invertiremos esta última serie haciendo uso de la fórmula (12), suponiendo para el objeto $p=1$, $\alpha=1$, y por tanto será $a'=0$. Por consiguiente, la tabla de productos múltiplos será la que sigue.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$N=1$	»				
$N=2$	$\frac{1}{3}$	»			
$N=3$	$\frac{1}{27}$	»	»		
$N=4$	$\frac{22}{27}$	$\frac{1}{2.9}$	»	»	
$N=5$	$\frac{518}{243}$	$\frac{1}{81}$	»	»	»
$N=6$	$\frac{2486}{729}$	$\frac{397}{2.729}$	$\frac{1}{2.81}$	»	»
$N=7$	$\frac{119896}{5.729}$	$\frac{540}{729}$	$\frac{1}{2.243}$	»	»
$N=8$	$\frac{98804884}{5.7.6561}$	$\frac{9954}{6561}$	$\frac{199}{2.5.729}$	$\frac{1}{8.243}$	»

Siendo positivos los coeficientes impares de la serie y negativos los pares, puede considerarse que les acompaña el factor $(-1)^{n+1}$, que producirá en los productos respectivos el $(-1)^{N+n-1}$; y como ya existe en la fórmula (12) el $(-1)^n$, la combinacion de ambos dará $(-1)^{N-1}$, y por consiguiente los coeficientes de la serie resultante serán tambien alternativamente positivos y negativos. Para calcular estos coeficientes, asignando á x' el valor de $x'=\frac{1}{2}$, deberán multiplicarse los

números respectivos en la tabla anterior por el factor $(N-1)(N-2)\ldots$ $\ldots(N-n+1).\left(\frac{1}{2}\right)^{N-n}$, y sumarse los resultados, teniendo cuidado de tomar la línea horizontal inmediatamente superior al valor de N que se considere. Haciendo el cálculo vendrá

$$z'=\frac{1}{2}-0+\frac{1}{12}-\frac{1}{8.27}+\frac{17}{8.27}-\frac{154}{729}+\frac{5313}{5.8.729}-\&c.$$

Por las operaciones que acaban de ejecutarse se puede conocer que es difícil establecer un método directo que conduzca infaliblemente al logro del objeto que nos ocupa; pero las transformaciones que hemos dado á conocer pueden ser tan variadas y multiplicadas, que serán raros los casos en que con su auxilio, y el método del número (45), no pueda conseguirse dicho objeto. Citaremos, por último, que en el Complemento del álgebra *(Complement d'Algèbre)* de la obra escrita por Mr. Lacroix, pág. 296, al fin del número 142, se manifiesta que Euler habia obtenido un medio de convertir en fraccion contínua toda serie cuyos términos sean alternativamente positivos y negativos, el cual se encuentra en el capítulo XVIII de su *Introductio in Analysim infinitorum*. Si este medio puede conducir á determinar los valores aproximados de las series á que se aplica, como desde luego parece presumirse, debe hacer parte de la teoría de este capítulo.

58. Pudiera tal vez suceder que los mismos ó análogos procedimientos que conduzcan á obtener el valor aproximado de la funcion que hemos considerado en el número que antecede $z=1-\sqrt[3]{1-x}$, conduzcan asimismo á obtener el de la serie

$$z=-1\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}.x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{5}{16.8}x^4+\frac{7}{16.16}x^5+\frac{21}{16.16.4}x^6+\&c.$$

aunque su valor sea imaginario, luego que x es >1. No habria que estrañar, si asi fuese, que la suma indefinida de los términos todos

reales de la serie anterior, diese tambien un resultado real. En series como esta sería fácil descubrir si su valor es efectivamente real ó imaginario, pues elevando al cuadrado la cantidad $z-1$ se obtendrá en el segundo caso un resultado cuyo valor es negativo. Mas cuando las series provengan de funciones de la forma

$$\varphi(x)+\sqrt{a+\varphi'(x)}$$

será mas dificil este conocimiento, sobre lo cual diremos una palabra en el último capítulo.

Hay tambien algunos casos particulares en que no puede deducirse el valor de una funcion del de su desarrollo en serie, y estos son aquellos en que, por la naturaleza de la funcion, se convierte la serie que representa alguna parte integrante suya, en la suma indefinida $0+0+0+\&c.=\infty\times 0$. Por ejemplo, del desarrollo de $\frac{1}{1+x}$ se inferirá en el caso particular de $x=1$

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\&c.=0+0+0+\&c.=\infty\times 0,$$

y si esta espresion viene envuelta en alguna funcion, puede inducir á error el valor de la serie que la represente en dicho caso particular de $x=1$. Tomando, por ejemplo, la serie (a) del número (50), encerrada en la llave, que da el valor de la funcion

$$z=l.\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2},$$

y cuyo término general es $(-r)^r.\frac{r-2}{2r}.\left(\frac{x}{2}\right)^r$; si se supone $x=2$, y se hace la resta de cada dos términos consecutivos, será esta

$$(-1)^r\left[\frac{r-2}{2r}-\frac{r-1}{2(r+1)}\right]=(-1)^{r+1}.\ \frac{1}{r(r+1)}$$

y la serie se convertirá en

$$z=\frac{1}{2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}\ldots+\frac{1}{r(r+1)}+\&c.=l.2$$

siendo así, que en el caso particular de que tratamos, el valor de la funcion es $z=l2-\frac{1}{4}$. Mas estas escepciones singulares no deben embarazar los procedimientos generales, y por otra parte pueden evitarse, sustituyendo, en vez de la variable x, otra ligada á ella por la relacion $x=\alpha+x'$, siendo α una cantidad pequeña y arbitraria.

Ecuaciones y fórmulas del capítulo 4.º

1
$$\begin{cases} z=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(n)}x^n+\&c., \quad x'=\dfrac{x}{1-x} \\ z=\dfrac{1}{1-x}\Big[A+(A'-A)x'+(A''-2A'+A)x'^2+(A'''-3A''+3A'-A)x'^3+ \\ \qquad \ldots+x'^m\times\Sigma\dfrac{(-1)^n.\,m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}.\,A^{(m-n)}+\&c.\Big] \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} z=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(n)}x^n+\&c., \quad x'=\dfrac{x}{1+x} \\ z=\dfrac{1}{1+x}\Big[A+(A'+A)x'+(A''+2A'+A)x'^2+(A'''+3A''+3A'+A)x'^3+ \\ \qquad \ldots+x'^m\times\Sigma\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}.\,A^{(m-n)}+\&c.\Big] \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} z=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(n)}x^n+\&c., \quad x'=\dfrac{x}{1-kx} \\ z=\dfrac{1}{1-kx}\Big[A+(A'-kA)x'+(A''-2A'k+Ak^2)x'^2+ \\ \qquad +(A'''-3A''k+3A'k^2-Ak^3)x'^3\ldots \\ \qquad \ldots+x'^m\times\Sigma\dfrac{(-1)^n.m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}.\,A^{(m-n)}k^n+\&c.\Big] \end{cases}$$

$$4\begin{cases} z=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(n)}x^n+\&c.,\quad x'=\dfrac{x}{1+kx} \\ z=\dfrac{1}{1+kx}\Big[A+(A'+kA)x'+(A''+2A'k+Ak^2)x'^2 \\ \qquad +(A'''+3A''k+3A'k^2+Ak^3)x'^3\ldots \\ \qquad \ldots+x'^m\times\Sigma\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}.\ A^{(m-n)}.\ k^n+\&c.\Big] \end{cases}$$

$$5\begin{cases} z=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(n)}x^n+\&c.,\ x'=\dfrac{x}{a-kx} \\ z=\dfrac{a}{a-kx}\Big[A+(A'a-kA)x'+(A''a^2-2A'ak+Ak^2)x'^2+ \\ \qquad +(A'''a^3-3A''a^2k+3A'ak^2+Ak^3)x'^3\ldots \\ \quad \ldots+x'^m\times\Sigma\dfrac{(-1)^n.\ m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}.\ A^{(m-n)}a^{m-n}k^n+\&c.\Big] \end{cases}$$

$$6\begin{cases} z=A+A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(n)}x^n+\&c.,\quad x'=\dfrac{x}{a+kx} \\ z=\dfrac{a}{a+kx}\Big[A+(A'a+Ak)x'+(A''a^2+2A'ak+Ak^2)x'^2+ \\ \qquad +(A'''a^3+3A''a^2k+3A'ak^2+k^3)x'^3\ldots \\ \qquad \ldots+x'^m\times\Sigma\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}.\ A^{(m-n)}\,a^{m-n}.\ k^n+\&c.\Big] \end{cases}$$

$$7\begin{cases} z=A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(n)}x^n+\&c.,\ x=\dfrac{x'}{(1+x')_p} \\ z=A'x'+(A''-pA')x'^2\ldots \\ \ldots+x'^m\times\Sigma\dfrac{(-1)^{m-n}.\ pn(pn+1)\ldots(np+m-n-1)}{2.3\ldots(m-n)}.\ A^{(n)}+\&c. \end{cases}$$

8 $$\left\{\begin{array}{l} z=A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(n)}x^n+\&c. \\ z=B'x'+B''x'^2+B'''x'^3\ldots+B^{(n)}x'^n+\&c. \end{array}\right\} x'=\frac{x}{(1+x)^p}$$

$$\Sigma(-1)^{m-n}\frac{pn(pn+1)\ldots(pn+m-n-1)}{2.3\ldots(m-n)}.\ B^{(n)}=A^{(m)}$$

9 $$\left\{\begin{array}{l} z=A'x+A''x^2+A'''x^3\ldots+A^{(n)}x^n+\&c.,\ x=x'e^{kx'} \\ z=A'x'+(A''+kA')x'^2\ldots+x'^m\Sigma\frac{k^{m-n}\,n^{m-n}}{2.3\ldots(m-n)}.\ A^{(n)}+\&c. \end{array}\right.$$

10 $$\left\{\begin{array}{l} z=z'e^{kz'} \\ z'=z-kz^2+\frac{3}{2}k^2z^3-\frac{4^2}{2.3}k^3z^4+\frac{5^3}{2.3.4}.\ k^4z^5\ldots\ldots \\ \qquad\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\times\frac{n^{n-2}}{2.3\ldots(n-1)}k^{n-1}.\ z^n+\&c. \end{array}\right.$$

11 $$\left\{\begin{array}{l} z=A_{,}'x'+A_{,}''x'^2+A_{,}'''x'^3\ldots+A_{,}^{(n)}x'^n+\&c. \\ \Sigma\ P.\ \frac{A_{,}^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)}\triangle n}{2.3\ldots\triangle n}=f^n(N) \\ 1.^a\}\ z'=(A+z)^{-m}=\Sigma(-1)^n.\ m(m+1)\ldots(m+n-1).\ \frac{1}{A^{m+n}}\times f^n(N)\times x'^N \\ 2.^a\}\ z'=l.(A+z)=l.A+\Sigma(-1)^{n-1}\times 2.3\ldots(n-1)\times\frac{1}{A^n}.\ f^n(N).\ x'^N \\ 3.^a\}\ z'=\frac{1}{e^{kz}}=\Sigma(-1)^n.\ k^n.\ f^n(N)\times x'^N \\ 4.^a\}\ z=z'.\ e^{kz'},\ z'=\Sigma(-1)^{n-1}.\ k^{n-1}.\ n^{n-1}.\ f^n(N).\ x'^N \\ 5.^a\}\ z'=\frac{z}{e^{kz}}=\Sigma(-1)^{n-1}.\ k^{n-1}.\ n.\ f^n(N)\times x'^N \end{array}\right.$$

12
$$\begin{cases} z = a'x + a''x^2 + a'''x^3 \ldots + (\alpha + a^{(p)})x^p + a^{(p+1)}x^{p+1} \ldots + a^{(p+h)}x^{p+h} + \&c. \\ x = \Sigma\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{N}{p}} \times \Sigma(-1)^n . \frac{1}{p}\left(\frac{N}{p} - 1\right)\ldots\left(\frac{N}{p} - n + 1\right) . z^{\frac{N}{p} - n} \\ \times \Sigma P . \frac{a^{\left(\frac{\Delta^{(N-1)}}{\Delta^n}\right)\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n} \end{cases}$$

CAPITULO V.

Sobre la aplicacion de la teoría que antecede á la resolucion de los problemas algebráicos.

59. Resueltas ya las cuestiones principales que hacen referencia á la teoría de las series, tratemos ahora de hacer aplicacion de ellas á la resolucion de los problemas algebráicos.

En todo problema algebráico deberán entrar cierto número de cantidades conocidas é indeterminadas, á que se da el nombre de *parámetros*, los que constituirán los datos del mismo, y otro cierto número de *incógnitas* que será preciso despejar ó eliminar para hallar genéricamente las relaciones que ligan á aquellas cuyo valor nos proponemos conocer con las referidas indeterminadas ó parámetros, que como hemos dicho constituyen los datos del problema. Establecido esto, si representamos por a, b, c... &c. los parámetros mencionados, y desarrollamos en serie la funcion ó funciones que contengan sus relaciones con las incógnitas, esta serie ó series tendrán en general la forma siguiente

$$z=f(a,b,c...0)+f(a,b,c...1)x+f(a,b,c...2)x^2...+f(a,b,c...n)x^n+\&c.,$$

es decir, que su término general será una funcion de las indeterminadas, a, b, c... &c., y de n que designa el lugar de dicho término en la serie. Ahora bien, la funcion $f(a,b,c...n)$ podrá igualmente desarrollarse en serie con respecto á la indeterminada a, y su término general se podrá espresar por la funcion $f'(b, c...h, n)a^h$: esta nueva funcion podrá tambien desarrollarse nuevamente en serie con respecto á la indeterminada b, y producirá para el término general la funcion $f''(c...h, h', n)a^h b^{h'}$: continuando de esta manera se ve facilmente, que

la serie primitiva podrá por fin venir reemplazada y representada en general por la siguiente

$$z=\Sigma f(h,h',h''...n)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}...\times x^n.$$

Si en el curso de las operaciones se hace preciso elevar esta serie á una potencia cualquiera, sustituirla ó invertirla, lo primero que como hemos visto se hace indispensable verificar, es formar la espresion

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)\triangle n}}{2.3...\triangle n}.$$

Para conseguir este objeto observaremos, que siendo en este caso cada uno de los factores $A^{(H)}$ que componen esta espresion series de la forma

$$A^{(H)}=\Sigma f(h,h',h''...)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}...\ \&c.,$$

al efectuar la elevacion á las potencias y productos indicados por dicho signo ΣP, los esponentes que resulten á las cantidades a, b, c... &c., serán sumas de la forma

$$h_{,}\triangle' n+h_{,,}\triangle'' n+\&c.,\ h_{,}'\triangle' n+h_{,,}'\triangle'' n+\&c.,\ \&c.,\ \&c.,$$

y representándolos por las letras H, H', H''... &c. podrán establecerse las ecuaciones siguientes:

$$\begin{gathered}h_{,}\triangle' n+h_{,,}\triangle'' n+h_{,,,}\triangle''' n+\&c.=H\\ h_{,}'\triangle' n+h_{,,}'\triangle'' n+h_{,,,}'\triangle''' n+\&c.=H'\\ h_{,}''\triangle' n+h_{,,}''\triangle'' n+h_{,,,}''\triangle''' n+\&c.=H''\\ \&c.\qquad \&c.\qquad \&c.\end{gathered}$$

en las cuales haciendo sucesivamente $h_{,}\triangle' n=\triangle' H$, $h_{,,}\triangle'' n=\triangle'' H$, $h_{,,,}\triangle''' n=\triangle''' H$... &c., $h_{,}'\triangle' n=\triangle' H'$, $h_{,,}'\triangle'' n=\triangle'' H'$... &c., $h_{,}''\triangle' n=\triangle' H''$, $h_{,,}''\triangle'' n=\triangle'' H''$... &c., &c., &c., vendrán los espo-

nentes primitivos $h_{,}$, $h_{,,}$, $h_{,,,}$... &c., $h_{,}'$, $h_{,,}'$, $h_{,,,}'$... &c., &c., &c., de las cantidades a, b, c... &c. representados por cuocientes de la forma

$$\frac{\triangle' H}{\triangle' n}, \frac{\triangle'' H}{\triangle'' n}\ldots \text{ \&c.} \frac{\triangle' H'}{\triangle' n}, \frac{\triangle'' H'}{\triangle'' n}\ldots \text{\&c., \&c., \&c.}$$

En consecuencia, la suma de productos que consideramos se transformará en una serie de la forma siguiente:

$$\Sigma P.\ \frac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n} = \Sigma a^{H}.\, b^{H'}.\, c^{H''}\ldots \text{ \&c.} \times$$

$$\times \Sigma P.\ \frac{\left[f\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}, \frac{\triangle H}{\triangle n}, \frac{\triangle H'}{\triangle n}, \frac{\triangle H''}{\triangle n}, \text{ \&c.}\right)\right]^{\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n}$$

escrita en la fórmula (1). Análogamente á lo que se ha verificado en el núm. (56) y fórmulas (11) del capítulo que precede, se puede significar la espresion representada por el signo $\Sigma P.$ del segundo miembro de la ecuacion anterior por el símbolo general $f^{n}(N,H,H',H''\ldots$ &c.), en atencion á que es una funcion de la cantidad n, y de los esponentes N, H, H', $H''\ldots$ &c.; fijados los valores de los cuales, queda tambien determinado el de la espresion de que se trata. En virtud de este convenio la fórmula (1) se convierte en la (1′).

60. Procediendo ahora á manifestar el modo de calcular la citada espresion representada por el mencionado símbolo $f^{n}(N,H,H',H''\ldots$ &c.), ó bien los coeficientes numéricos que corresponden á cada combinacion distinta de esponentes de las cantidades a, b, c... &c. en la suma de productos

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n}$$

supondrémos primeramente que sea $n=2$. En este caso la suma de productos indicada se reduce á la de los dos factores

$$\Sigma A^{(\Delta' N)} A^{(\Delta'' N)} \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

y al multiplicar una por otra las dos series representadas por estos factores, los esponentes de a, b, c... &c. se convertirán en sumas de la forma $h_{/}+h_{//}$, $h_{/}'+h_{//}'$, $h_{/}''+h_{//}''$... &c.; y como para una combinacion dada, estas sumas han de ser constantes é iguales á los esponentes H, H', H''... &c. que se han asignado á estas cantidades, resulta que para obtener el coeficiente numérico que corresponde á la combinacion propuesta de dichos esponentes, se habrán de sumar todos los productos de los coeficientes de la serie primitiva tomados dos á dos, que producen sumas iguales en los referidos esponentes. Por consiguiente, en virtud de la representacion en que hemos convenido, se podrá establecer la ecuacion siguiente:

$$f^2(N,H,H',H''\ldots \text{ &c.}) = \Sigma f^1(\Delta' N,\Delta' H,\Delta' H',\Delta' H''\ldots \text{ &c.}) \times \\ \times f^1(\Delta'' N,\Delta'' H,\Delta'' H',\Delta'' H''\ldots \text{ &c.})$$

que da la funcion de segundo órden, ó bien la relativa á $n=2$ en valores de las funciones de primer órden relativas á $n=1$.

Cuando sea $\Delta' N=\Delta'' N$ en la suma de dobles productos (a), vendrá un término de la forma $\dfrac{A^{\left(\frac{N}{2}\right)^2}}{2}$; mas como $A^{\left(\frac{N}{2}\right)}$ es una serie, al elevarla al cuadrado vendrán los productos de sus términos unos por otros multiplicados por 2, y este factor hará desaparecer el anterior denominador, de modo que solo cuando se trate de los cuadrados de unos mismos términos, será cuando estos cuadrados vengan divididos por el citado denominador; mas para que esto se verifique será preciso que se tenga $h_{/}=h_{//}=\dfrac{H}{2}$, $h_{/}'=h_{//}'=\dfrac{H'}{2}$, $h_{/}''=h_{//}''=\dfrac{H''}{2}$... &c.

debiendo por lo tanto ser divisibles por 2 todos los esponentes de la combinacion dada.

Una vez obtenidos los coeficientes representados por el símbolo genérico $f^2(N,H,H',H''...$ &c.) que corresponde á la suma de dobles productos (a), podremos valernos de ellos para obtener los de tercer órden representados por el símbolo $f^3(N,H,H',H''...$ &c.) que corresponden á la suma de triples productos

$$\Sigma A^{(\Delta' N)} A^{(\Delta'' N)} A^{(\Delta''' N)} \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

En efecto, cada factor fijo $A^{(\Delta' N)}$ de esta suma se ha de combinar con la suma de todas las combinaciones distintas de los otros dos que dan la misma suma de acentos $\Delta'' N + \Delta''' N = N - \Delta' N = \Delta_{,} N$, representada en

$$\Sigma A^{(\Delta'' N)} A^{(\Delta''' N)} = A_2^{(\Delta_{,} N)} = \Sigma f^2(\Delta_{,} N, h, h', h'' ... \text{ \&c.}).\ a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''} ...\ \text{\&c.}$$

y por consiguiente deberán multiplicarse todos los coeficientes de la serie primitiva

$$A^{(\Delta' N)} = \Sigma f^1(\Delta' N, h_{,}, h_{,}', h_{,}'' ... \text{ \&c.}).\ a^{h_{,}}.\ b^{h_{,}'}.\ c^{h_{,}''} ...\ \text{\&c.}$$

con los de la serie segunda, ó del segundo órden

$$A_2^{(\Delta_{,} N)} = f^2(\Delta_{,} N, h_{,,}, h_{,,}', h_{,,}'' ... \text{ \&c.}).\ a^{h_{,,}}.\ b^{h_{,,}'}.\ c^{h_{,,}''} ...\ \text{\&c.}$$

para todos los valores de los esponentes que dan una suma constante é igual á los de H, H', H''... &c. de la combinacion propuesta. Tan solo deberá observarse, que por este procedimiento cada combinacion distinta $A^{(\Delta' N)} A^{(\Delta'' N)} A^{(\Delta''' N)}$ viene repetida tres veces, y es por lo tanto preciso dividir por 3 la suma total obtenida por su medio. Con efecto, sea 10 la suma de las tres diferencias de N, ó $N=10$, y tomemos por ejemplo la combinacion $\Delta' N=5$, $\Delta'' N=3$, $\Delta''' N=2$; por el procedimiento de que tratamos hemos de formar primero la combinacion $A^{(2)} A_2^{(8)}$, dando valores á $\Delta' N$, $\Delta_{,} N$; y como en la espresion

de $A_2^{(8)}$ está comprendido el producto $A^{(5)}\,A^{(5)}$, tenemos una vez el producto triple $A^{(2)}\,A^{(5)}\,A^{(5)}$, continuando en dar valores á $\triangle' N$, $\triangle_{,} N$ formaríamos en segundo lugar la combinacion $A^{(5)}\,A_2^{(7)}$, y como en la espresion de $A_2^{(7)}$ está comprendido el producto $A^{(2)}\,A^{(5)}$ resulta otra vez el mismo producto triple $A^{(5)}\,A^{(2)}\,A^{(5)}$; finalmente, continuando todavía en dar los dichos valores á $\triangle' N$, $\triangle_{,} N$, se ha de formar la combinacion $A^{(5)}$, $A_2^{(5)}$, que dará por tercera vez el idéntico triple producto $A^{(5)}$, $A^{(5)}$, $A^{(2)}$. De aquí se sigue, que obtenidos los coeficientes dobles ó del segundo órden, los triples ó del tercer órden serán dados por la espresion siguiente

$$f^3(N,\ II,\ II',\ II''\ldots\ \&c.)=\frac{1}{5}\Sigma f^2(\triangle' N,\ \triangle' II,\ \triangle' II',\ \triangle' II''\ldots\&c.)$$
$$\times f^1(\triangle'' N,\ \triangle'' II,\ \triangle'' II',\ \triangle'' II''\ldots\ \&c.).$$

Por raciocinios enteramente iguales deduciremos, que obtenidos por este medio los coeficientes triples ó del tercer órden, los cuádruplos ó del cuarto órden se obtendrán combinando estos con los primitivos, y dividiendo las sumas respectivas por 4, y así sucesivamente en los demás órdenes superiores. En consecuencia, se establece la fórmula (2) que da los coeficientes del órden n en funcion de los del órden $n-1$ y de los primitivos.

61. Establecidos los principios que preceden, supóngase que se tienen ordenados los coeficientes de la serie propuesta en una tabla construida bajo la forma que se ve en el modelo (*A*). Para proceder á construir la tabla que contenga los coeficientes de segundo órden representados en $f^2(N,h,\ h',\ h''\ldots\ \&c.)$, de que hemos hecho mérito, se sumarán los valores numéricos de los esponentes representados por las letras N, h, h', h'', y estas sumas producirán las combinaciones de esponentes de que es susceptible la serie del segundo órden de que tratamos. Así, pues, la combinacion en que dichos esponentes tengan el menor valor será la que corresponde al supuesto $N=2$, $h=2$, $h'=0$, $h''=0$, porque siendo los menores valores de N y h escritos en la tabla iguales á 1, sumados consigo mismos producirán 2 para el valor

de la menor suma que con ellos puede obtenerse, como los esponentes h', h'', descienden hasta el valor 0, su menor suma será $0+0=0$; por consiguiente, resultará la menor combinacion que hemos enunciado, y el coeficiente de esta combinacion será $\frac{J^n}{2}=I$. Asignando en seguida valores á h'' se formará la primera columna del modelo (B), cuyos coeficientes se obtendrán multiplicando respectivamente en cruz los coeficientes de la primera columna del modelo (A), y sumando los productos, teniendo cuidado de partir por 2 el cuadrado de un término cuando deba multiplicarse por sí mismo; así el coeficiente I' que corresponde al valor $h''=1$ se obtendrá multiplicando J' por J; el que corresponde al valor $h''=2$ multiplicando J'' por J, y añadiendo el cuadrado $\frac{J'^2}{2}$, y así sucesivamente los restantes. Formada por medio de este cálculo la primera columna del modelo (B) en que $h'=0$, se pasará acto contínuo á formar la segunda columna del mismo modelo, en la que $h'=1$; para este efecto se multiplicarán tambien en cruz los coeficientes de la segunda columna del modelo (A), que pertenece á $h'=1$, por los de la primera columna del mismo modelo en que $h'=0$, y se sumarán asimismo los productos. Para formar acto contínuo los coeficientes de la tercera columna de dicho modelo (B) en que $h'=2$ se efectuará en los mismos términos el producto en cruz; primero, de los coeficientes que en el modelo (A) se hallan en la columna $h'=2$ por los de la columna $h'=0$, y segundo, se multiplicarán entre sí los de la columna $h'=1$, partiendo por 2 el cuadrado de un término cuando se multiplique por sí mismo, y se sumarán en fin los resultados. Por este mismo órden se formarian otras columnas superiores correspondientes á los valores $h'=3$, $h'=4$, &c. Una vez terminada de este modo toda la columna que en el modelo (B) corresponde al valor $h=2$, se pasará á formar la columna que corresponde al valor $h=3$, para cuyo efecto será preciso multiplicar en cruz por el mismo órden esplicado los coeficientes que en el modelo (A) se ha-

llan en la columna comprendida en el valor $h=2$ con los de la columna $h=1$. Para formar á continuacion la columna correspondiente á $h=4$, se multiplicará análogamente la columna $h=3$ del modelo (A) por la columna $h=1$ del mismo, y despues se multiplicarán entre sí por el órden ya esplicado los coeficientes de la columna $h=2$. En la propia forma se continuará para formar las columnas del modelo (B) relativas á $h=5$, $h=6$, &c. Por último, formada de esta manera toda la columna que en dicho modelo (B) corresponderá al valor $N=2$, se pasará á formar la de $N=3$, multiplicando la $N=2$ del modelo (A) por la $N=1$; despues se formará la $N=4$ multiplicando la $N=3$ por la $N=1$, y la $N=2$ por sí misma, y así consecutivamente.

Construida del modo que se acaba de esplicar la tabla del modelo (B) perteneciente á los dobles productos, ó valor de $n=2$, se pasará á formar la de $n=3$, ó de los triples productos. Para este objeto se multiplicarán en cruz, por el mismo órden que se ha referido, las diferentes columnas de esta tabla por las columnas de la primitiva del modelo (A), sumando los productos y partiendo las respectivas sumas por 3. Así, para tener los coeficientes de la primera columna que corresponderia á los valores $N=3$, $h=3$, $h'=0$, se multiplicarán en cruz los coeficientes I, I', I'', &c., de la primera columna del modelo (B) por los J, J', J'', &c., de la primera del modelo (A), sumando como se ha dicho los productos y tomando el tercio de la suma. Para tener la segunda columna que corresponderia al valor $h'=1$ se multiplicaria la columna $h'=1$ del modelo (B) por la $h'=0$ del modelo (A), y despues la $h'=1$ de este por la $h'=0$ de aquel, efectuando asimismo las respectivas sumas y partiéndolas por 3. De igual modo se continuaria para formar las demás columnas de la tabla $n=3$ ó de los triples productos, y formada que fuera se procederia á construir la tabla de los productos cuádruplos ó de $n=4$, multiplicando en cruz por un órden enteramente idéntico las respectivas columnas de la tabla $n=3$ por las primitivas de la tabla modelo (A), efectuando las sumas respectivas de productos y partiéndolas por 4. En fin, formada la cuarta tabla se formaria por el mismo procedimiento la quinta, partiendo las sumas por 5, y asi sucesivamente la sesta, séptima, &c.

Si los coeficientes J, J', J'' fuesen series numéricas, sería mejor suponer que existia en ellos otra nueva indeterminada α, verificando las sumas de productos pertenecientes á las potencias de ésta, y por este medio se llegarian á obtener, en el resultado de la operacion que nos hubiésemos propuesto, las series que deberian formar los coeficientes de cada combinacion distinta de esponentes de las indeterminadas a, b, c, &c., volviendo para ello á asignar á α el valor numérico que al principio hubiese reemplazado.

En el caso de una serie sencilla, ó bien que no exista mas que la variable x, multiplicada por coeficientes numéricos sin ninguna de las indeterminadas a, b, c, &c., será mejor disponer las respectivas tablas de productos del modo que lo hemos verificado en los números (51), (55) y (57) del capítulo 4.° que precede, y es facil conocer que las distintas columnas de las tablas de dichos números correspondientes á los valores $n=2$, $n=3$, &c., se han calculado por los procedimientos que se acaban de esplicar.

62. Los denominadores 3, 4, 5... &c., por los que deben dividirse las respectivas sumas de productos indicadas en el número antecedente para obtener los coeficientes sucesivos de las tablas relativas á los valores de $n=3$, $n=4$, $n=5$, &c., ó bien de los triples, cuádruplos, quíntuplos, &c., productos, deben en general desaparecer; es decir, que dichas sumas de productos han de ser en general divisibles por los mencionados denominadores 3, 4, 5, &c., introducidos para formar la tabla respectiva. En efecto, como al formar la segunda tabla relativa al valor de $n=2$, se dividen por 2 los cuadrados de un mismo término, al formar la tercera tabla relativa á $n=3$, se dividen por 3 las sumas de productos de los coeficientes de la segunda tabla por los de la primera, para formar la cuarta tabla se dividen por 4 las sumas de productos de los coeficientes de la tercera tabla por la primera, y asi sucesivamente, resulta, que al formar los coeficientes de la tabla del órden n, se habrán introducido en el denominador por el que deban partirse las respectivas sumas de productos, los factores sucesivos 2, 3, 4...n, mas en la espresion general que representa estas sumas, que es

$$\Sigma P.\frac{\left[f\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}, \frac{\Delta H}{\Delta n}, \frac{\Delta H'}{\Delta n}, \frac{\Delta H''}{\Delta n} \&c.\right)\right]^{\Delta n}}{2.3...\Delta n}$$

no entra en general el factor n en su denominador, y por consiguiente este no podrá existir en el denominador que se obtenga por el cálculo prescrito, y será fuerza que desaparezca, siendo divisible por n la suma de productos obtenida. Tan solo no se verificará esta circunstancia, cuando en la suma de productos de que se trata entre algun sumando que sea la potencia n de un mismo factor de la forma $A^{\left(\frac{N}{n}\right)n}$, y deba en tal caso entrar en la suma de productos la potencia n de un mismo término de la serie primitiva, que deberá entonces venir dividido por el denominador $2.3...n$, y ser representado por la espresion

$$\frac{\left[f\left(\frac{N}{n}, \frac{H}{n}, \frac{H'}{n}, \frac{H''}{n} ... \&c.\right)\right]^{n}}{2.3...n}$$

mas para que esto suceda es indispensable, como se deja conocer, que todos los esponentes N, H, H', H''... &c., de la combinacion de que se trata, sean divisibles por el mencionado número n. La regla que acabamos de dar, debe necesariamente verificarse cuando n sea un número primo, mas si fuese un número múltiplo puede sufrir algunas modificaciones. Supongamos que se trate de la funcion ó sumas de cuarto órden; en este caso el denominador introducido por las operaciones sucesivas es, segun lo que se ha dicho, 2.3.4; mas pudiendo los esponentes N, H, H', H''... &c. de la combinacion respectiva componerse de la suma de dos números pares, aun cuando ellos no sean divisibles por 4, y pudiendo venir en tal caso entre los sumandos, términos que sean el producto de dos cuadrados distintos, correspondiendo á cada uno el denominador 2, y por consiguiente á su producto el 4, resultará, que en el denominador general 2.3.4, únicamente

sobrará el factor 2, por el que deberá ser divisible la suma que se considera. Del mismo modo, si se trata de una suma del sesto órden, pudiendo los esponentes N, H, H', H''... &c. componerse de la suma de dos números divisibles ambos por 3, sin que sin embargo ellos lo sean por 6, podrán venir términos que sean el producto de dos cubos, correspondiéndoles en este caso el denominador 2.3×2.3; y por lo tanto, en el denominador general introducido $2.3.4.5.6$, no debiendo desaparecer ningun factor 3, podrá venir la suma divisible únicamente por 2, mas no por 3. En este mismo caso, si los esponentes se componen de la suma de dos números, divisible el uno por 4 y el otro por 2, podrán venir términos que sean el producto de una cuarta por una segunda potencia, correspondiéndoles el denominador $2.3.4\times2$, y por lo tanto en el $2.3.4.5.6$, podrá no desaparecer ningun factor 2, y ser tan solo la suma divisible por 3.

Deben tenerse presentes estas observaciones, pues constituyen un indicio escelente para dar á conocer si hay equivocacion en los cálculos, infiriéndose seguramente, cuando no se verifiquen estas reglas, que hay en efecto equivocacion en ellos; mas aun cuando se verifiquen, no por eso podrá afirmarse con certeza que están bien ejecutados.

63. Establecidos los procedimientos que deben seguirse para verificar el cálculo de la funcion genérica

$$f_n(N, H, H', H''\ldots \text{ \&c.})=\Sigma P\frac{\left[f\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}, \frac{\triangle H}{\triangle n}, \frac{\triangle H'}{\triangle n}, \frac{\triangle H''}{\triangle n} \text{ \&c.}\right)\right]^{\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n}$$

pasemos ahora á aplicar á la serie general que estamos considerando, los dos problemas fundamentales que constituyen los procedimientos indispensables para la eliminacion y despejo de las incógnitas de un problema, que son el de la inversion y el de la sustitucion.

Empezando por el segundo, supongamos que en una ecuacion dada se ha hallado el valor de la variable

$$x=\Sigma f(h, h', h''\ldots \text{ \&c.})\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots \text{ \&c.}\ldots\ldots(a).$$

y se trata de sustituir este valor en la serie

$$0=\Sigma x^N\times\Sigma F(N, h, h', h''\ldots \&c.)\times a^h.\, b^{h'}.\, c^{h''}\ldots \&c.\ldots.(b).$$

con el fin de eliminar entre ambas ecuaciones dicha variable x. Elevando á la potencia N la primera de estas dos ecuaciones, y suponiendo que en su segundo miembro no hay término numérico constante independiente de los parámetros a, b, $c\ldots$ &c., sino que en todos ellos entra alguno de estos parámetros, elevado cuando menos á la primera potencia, será

$$x^N=2.3\ldots N\Sigma f^N(h_{,}, h_{,}', h_{,}''\ldots \&c.)\times a^{h_{,}}.\, b^{h_{,}'}.\, c^{h_{,}''}\ldots \&c.,$$

y sustituyendo este valor en la segunda ecuacion vendrá la resultante representada en

$$0=\Sigma 2.3\ldots N\times F(N, h, h', h''\ldots \&c.)\times f^N(h_{,}, h_{,}', h_{,}''\ldots \&c.)$$

$$\times a^{h+h_{,}}.\, b^{h'+h_{,}'}.\, c^{h''+h_{,}''}\ldots \&c.,$$

suponiendo constantes las sumas $h+h_{,}$, $h'+h_{,}'$, $h''+h_{,}''$, &c., representándolas respectivamente por H, H', H'', &c., podrá escribirse la fórmula (3). Se obtendrán por medio de esta fórmula los coeficientes que correspondan á un órden dado de esponentes H, H', $H''\ldots$ &c., formando primeramente las tablas de dobles, triples, &c., productos relativos á los coeficientes de la primera serie (a), y despues se multiplicarán en cruz bajo la forma que se espuso anteriormente los coeficientes que correspondan á los esponentes h, h', h'', &c., de la segunda serie en un valor determinado de N, por los del órden N contenidos en la tabla respectiva calculada para la primera serie. Se ejecutará esta operacion por cada valor particular que se asigne á N, multiplicando el resultado por los factores $2.3\ldots N$, y despues de haber asignado á dicha N todos los valores posibles desde $N=1$ hasta el mayor que pueda tener, que se hallará limitado por el de alguno de los esponentes H, H', $H''\ldots$ &c., se sumarán los resultados obtenidos, y la

suma será el coeficiente que en la serie ya eliminada de x corresponda á la combinacion de dichos esponentes H, H', H'', &c.

64. En el caso de existir en la serie (a del número precedente que representa el valor de x, un término numérico α, independiente de los parámetros a, b, c, &c., estando dicho valor de x representado en

$$x=\alpha+\Sigma f(h, h', h''\ldots \&c.)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots \&c.,$$

la potencia N de este valor hubiera sido

$$x^N=\Sigma N(N-1)\ldots(N-n+1).\alpha^{N-n}\times f^n(h_,, h_,', h_,''\ldots \&c.)\times a^{h_,}.\ b^{h_,'}.\ c^{h_,''}\ldots \&c.,$$

y sustituyendo esta espresion en la ecuacion (b) del mismo número precedente, haciendo para este efecto $N-n=R$, resultará

$$0=\Sigma(R+1)(R+2)\ldots(R+n)\times F(R+n, h, h', h''\ldots)\times f^n(h_,, h_,', h_,''\ldots \&c.)$$

$$\times a^{h+h_,}.\ b^{h'+h_,'}.\ c^{h''+h_,''}\ldots \&c.$$

y en fin, suponiendo constantes las sumas $h+h_,=H$, $h'+h_,'=H'$, $h''+h_,''=H''$, &c., vendrá la fórmula (4), en la cual, determinado el valor R, se calculará el coeficiente que corresponde á una combinacion de los esponentes H, H', H'', &c., efectuando las sumas indicadas en el número anterior por cada valor particular de n, y asignando á esta letra todos aquellos de que sea susceptible, los que estarán limitados por el de alguno de los referidos esponentes H, H', H'', &c. Conservando fija la combinacion de estos esponentes, y asignando indefinidamente valores á R, resultará una serie numérica ilimitada que representará el valor del coeficiente numérico de la combinacion de que se trata.

65. Pasemos ahora á hacer aplicacion al problema de la inversion, y supongamos para el efecto que se tiene la serie

$$\Sigma f(N, h, h', h''\ldots \&c.)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots \&c.\times x^N=\Sigma f(0, h, h', h''\ldots \&c.)$$

$$\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots \&c.\ldots\ldots (a).$$

Supongamos tambien que en el término constante ó en la serie independiente de x, $\Sigma f(0, h, h', h''\ldots$ &c.$)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots$ &c., no hay ningun término independiente de a, b, c, &c., es decir, que en todos ellos viene cuando menos alguno de estos parámetros elevado á la primera potencia; y por el contrario, que en la serie que multiplica la primera potencia de x, $\Sigma f(1, h, h', h''\ldots$&c.$)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots$ &c., existe un término numérico ϵ independiente de dichos parámetros. Establecidos estos supuestos representemos en general por $A^{(N)}$ la serie que multiplica la potencia N de x, ó bien hagamos

$$A^{(N)}=\Sigma f(N, h, h', h''\ldots \text{ &c.})\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots \text{ &c.},$$

y llamemos z la serie constante $\Sigma f(0, h, h', h''\ldots$ &c.$)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots$ &c., la serie (a) se transformará en virtud de estas hipótesis, en la

$$\text{&c.}+A^{(V)}x^N\ldots+A''x^2+A'x=z$$

y el término general de la inversa que le corresponde será, por la fórmula (1) del capítulo 3.°

$$z^N.\ B^{(N)}=z^N\times\Sigma(-1)^m.(N+1)(N+2)\ldots(N+m-1)\times\frac{1}{A'^{N+m}}$$

$$\times\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta^m}\right)\Delta m}}{2.3\ldots\Delta m}$$

restituyendo en esta espresion, por los factores $A^{(H)}$ que entran en la composicion del signo $\Sigma\ P.$, las series que representan, será como sabemos,

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta^m}\right)\Delta m}}{2.3\ldots\Delta m}=\Sigma a^H.\ b^{H'}.\ c^{H''}\ldots \text{ &c.}\times$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[f\left(\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta^m},\ \frac{\Delta H}{\Delta^m},\ \frac{\Delta H'}{\Delta^m},\ \frac{\Delta H''}{\Delta^m}\text{ \&c.}\right)\right]^{\Delta m}}{2.3\ldots\Delta m}.$$

La cantidad A', que viene elevada á la potencia $-(N+m)$, es asimismo una serie representada en $\mathfrak{C}+\Sigma f(1, h, h', h''\ldots$ &c.$)\times a^h.\, b^{h'}.\, c^{h''}\ldots$ &c., y su desarrollo, segun la fórmula (8) del capítulo 1.°, será

$$A'^{-N-m}=\Sigma a^{H_{,}}.\, b^{H_{,}'}.\, c^{H_{,}''}\ldots \text{ \&c.}\times$$

$$\times\Sigma(-1)^n\times(N+m)(N+m+1)\ldots(N+m+n-1)\times$$

$$\times\frac{1}{\mathfrak{C}^{N+m+n}}\times\Sigma P.\frac{\left[f\left(1,\ \frac{\Delta H}{\Delta n},\ \frac{\Delta H'}{\Delta n},\ \frac{\Delta H''}{\Delta n}\ldots\text{ \&c.}\right)\right]^{\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n}$$

sustituyendo ahora estas dos espresiones en el valor de $B^{(\nu)}$, que antecede, vendrá

$$z^\nu B^{(\nu)}=z^\nu.\ \Sigma(-1)^{m+n}\times(N+1)(N+2)\ldots(N+m+n-1)\times\frac{1}{\mathfrak{C}^{N+m+n}}$$

$$\times\Sigma a^{H_{,}+H}.\, b^{H_{,}'+H'}.\, c^{H_{,}''+H''}\ldots \text{ \&c.}\times$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[f\left(1,\ \frac{\Delta H_{,}}{\Delta n},\ \frac{\Delta H_{,}'}{\Delta n},\ \frac{\Delta H_{,}''}{\Delta n}\ldots\text{ \&c.}\right)\right]^{\Delta n}}{2.3\ldots\Delta n}\times$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[f\left(\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta m},\ \frac{\Delta H}{\Delta m},\ \frac{\Delta H'}{\Delta m},\ \frac{\Delta H''}{\Delta m}\ldots\text{ \&c.}\right)\right]^{\Delta m}}{2.3\ldots\Delta m}$$

el producto de los dos signos $\Sigma P.$ de esta última espresion puede incluirse

en un solo signo, porque si suponemos constantes las sumas $H+H_{,}$, $H'+H_{,}'$, $H''+H_{,}''$, &c., y la $m+n$, resultará que el referido producto contendrá la suma de todas las combinaciones distintas de factores, en las que la suma de acentos, respectiva á las variables $\frac{\triangle H}{\triangle m}, \frac{\triangle H'}{\triangle m}, \frac{\triangle H''}{\triangle m}$ ...&c., sea relativamente $H+H_{,}$, $H'+H_{,}'$, $H''+H_{,}''$... &c., y el número de factores de cada combinacion sea siempre la suma $m+n$. Siendo uno el índice de la variable $\frac{\triangle H}{\triangle n}$ en el primer signo, la suma de acentos, con respecto á esta variable, vendrá espresada en $H+m-1+1\times n=$ $=H+m+n-1$; luego si representamos la suma $H+H_{,}$ por H, la $H'+H_{,}'$ por H', la $H''+H_{,}''$ por H'', y en fin la $m+n$ por m, la espresion anterior quedará escrita mas sencillamente en la que sigue:

$$z^{N}B^{(N)}=z^{N}\Sigma(-1)^{m}\times(N+1)(N+2)...(N+m-1)\times\frac{1}{\xi^{N+m}}$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[f\left(\frac{\triangle(N+m-1)}{\triangle m}, \frac{\triangle H}{\triangle m}, \frac{\triangle H'}{\triangle m}, \frac{\triangle H''}{\triangle m}, \text{&c.}\right)\right]^{\triangle m}}{2.3...\triangle m}\times$$

$$\times a^{H}.\, b^{H'}.\, c^{H''}...\ \text{&c.}\ .\ .\ .\ .\ (b).$$

Reemplazando ahora la cantidad z por la serie que representa, y desarrollando en ella la potencia m, vendrá

$$z^{N}=2.3...N\times\Sigma a^{H_{,}}.\, b^{H_{,}'}.\, c^{H_{,}''}...\ \text{&c.}\times$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[f\left(0, \frac{\triangle H_{,}}{\triangle N}, \frac{\triangle H_{,}'}{\triangle N}, \frac{\triangle H_{,}''}{\triangle N}, \text{&c.}\right)\right]^{\triangle N}}{2.3...\triangle N}$$

suponiendo que z sea negativa, ó bien que á los coeficientes de la se-

rie que representa se han cambiado los signos, ó en fin, que esta serie se ha pasado al primer miembro de la ecuacion (*a*) quedando en el segundo 0; con la potencia z^N deberá venir $(-1)^N$, y la espresion anterior se convertirá en

$$(-z)^N.\ B^{(N)}=\Sigma(-1)^{N+m}\times 2.3...(N+m-1)\times\frac{1}{\mathfrak{C}^{N+m}}$$

$$\times\Sigma a^{H+H_{,}}.\ b^{H'+H_{,}'}.\ c^{H''+H_{,}''}...\&c.$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[f\left(0,\frac{\triangle H_{,}}{\triangle N},\frac{\triangle H_{,}'}{\triangle N},\frac{\triangle H_{,}''}{\triangle N}...\ \&c.\right)\right]^{\triangle N}}{2.3...\triangle N}$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[f\left(\frac{\triangle(N+m-1)}{\triangle m},\frac{\triangle H}{\triangle m},\frac{\triangle H'}{\triangle m},\frac{\triangle H''}{\triangle m},\&c.\right)\right]^{\triangle m}}{2.3...\triangle m}$$

Por las mismas razones que hemos espuesto anteriormente se persuadirá que el producto de los dos signos $\Sigma P.$ de esta espresion puede incluirse en solo un signo, advirtiendo que la suma de acentos referente á las combinaciones de este será, respecto á las variables H, H', H'', las sumas $H+H_{,}$, $H'+H_{,}'$, $H''+H_{,}''$, &c., y respecto á la variable N la suma $N+m-1+0\times N=N+m-1$, el número de factores de cada combinacion, vendrá espresado por la cantidad $N+m$; luego si representamos como antes la suma $H+H_{,}$ por H, la $H'+H_{,}'$ por H', la $H_{,}''+H''$ por H'', y en fin, la $N+m$ por N, vendrá la fórmula (5), que es la mas simple de la inversion. Si $\mathfrak{C}$ fuese negativo, desapareceria el factor $(-1)^N$.

Para hacer uso de esta fórmula se formarán por el método prescrito en el número (61) las tablas que contengan las sumas de productos del primero, segundo, tercero, &c., órdenes, incluyendo en esta operacion los coeficientes de la serie constante $\Sigma f(0, h, h', h''...\ \&c.)\times$

$\times a^h . b^{h'} . c^{h''} \ldots$ &c., ó bien comprendiendo en dichas tablas la columna correspondiente al valor $N=0$, y debiendo escluirse de ellas el término numérico ε de la serie perteneciente al valor $N=1$: formadas que sean bajo estas condiciones, solo restará despues dar á la variable N los valores de que sea susceptible, y verificar las sumas indicadas en la fórmula relativas á cada combinacion fija de los esponentes H, H', H'', &c., cuyo resultado será el coeficiente que corresponde á esta combinacion en la serie inversa.

66. Tratemos ahora del caso en que en la serie que se trata de invertir exista un término numérico α, independiente de las potencias de los parámetros a, b, c, &c., el cual haga parte de la serie constante independiente de x. Sea pues

$$\Sigma f(N, h, h', h'' \ldots \text{&c.}) \times a^h . b^{h'} . c^{h''} \ldots \text{&c.} \times x^\nu = a + \Sigma f(0, h, h', h'' \ldots \text{&c.}) \times a^h . b^{h'} . c^{h''} \ldots \text{&c.}$$

En el caso del número que antecede hemos encontrado, que llamando z al segundo miembro de esta ecuacion, viene

$$z^\nu B^{(\nu)} = z^\nu \times \Sigma(-1)^m . (N+1)(N+2) \ldots (N+m-1) \times \frac{1}{\varepsilon^{N+m}} \times \Sigma P . \frac{\left[f\left(\frac{\triangle(N+m-1)}{\triangle m}, \frac{\triangle H}{\triangle m}, \frac{\triangle H'}{\triangle m}, \frac{\triangle H''}{\triangle m}, \text{&c.} \right) \right]^{\triangle m}}{2.3 \ldots \triangle m} \times a^H . b^{H'} . c^{H''} \ldots \text{&c.},$$

y reemplazando en esta espresion la cantidad z por la serie que representa, se tendrá sucesivamente

$$z^N = \Sigma N(N-1) \ldots (N-n+1) \times \alpha^{N-n} \times \Sigma P . \frac{\left[f\left(0, \frac{\triangle H_{,}}{\triangle n}, \frac{\triangle H_{,}'}{\triangle n}, \frac{\triangle H_{,}''}{\triangle n}, \text{&c.} \right) \right]^{\triangle n}}{2.3 \ldots \triangle n} \times a^{H_{,}} . b^{H_{,}'} . c^{H_{,}''} \ldots \text{&c.}$$

$$z^{N}B^{(N)}=\Sigma(-1)^{m}\times(N-n+1)(N-n+2)\ldots(N+m-1)\times\frac{\alpha^{N-n}}{\epsilon^{N+m}}$$

$$\times\Sigma a^{H+H_{,}}.\ b^{H'+H_{,}'}.\ c^{H''+H_{,}''}\ldots\ \&c.$$

$$\times\Sigma P\frac{\left[\left(\frac{\triangle(N+m-1)}{\triangle m}\ \frac{\triangle H}{\triangle m},\ \frac{\triangle H'}{\triangle m},\ \frac{\triangle H''}{\triangle m},\ \&c.\right)\right]^{\triangle m}}{2.3\ldots\triangle m}$$

$$\times\Sigma P\frac{\left[f\left(0,\ \frac{\triangle H_{,}}{\triangle n},\ \frac{\triangle H_{,}'}{\triangle n},\ \frac{\triangle H_{,}''}{\triangle n}\ldots\ \&c.\right)\right]^{\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n}$$

suponiendo $N-n=R$, y advirtiendo que los signos ΣP. pueden comprenderse en uno solo por las razones esplicadas en dicho número anterior, en cuyo caso el número de factores contenido en el producto de los dos signos que anteceden, será $n+m=N+m-R$, y el número de acentos que corresponde al índice N permanece siempre $N+m-1$, se tendrá, reemplazando las sumas $H+H_{,}$, $H'+H_{,}'$, $H''+H_{,}''$, &c., respectivamente por H, H', H'', &c., y la $N+m$ por N, y suponiendo del mismo modo que en el citado número anterior, que el segundo miembro se haya pasado al primero cambiándose el signo á los coeficientes de todos sus términos, ó bien escribiéndose $(-1)^{N}.\ z^{N}$ en vez de z^{N}, la fórmula (6). Cada coeficiente numérico que afecte en el caso de que tratamos una combinacion dada de los esponentes H, H', H'', &c., es una serie ordenada por las potencias α^{R}, y los coeficientes que afectan cada una de estas potencias se obtendrán dando valores á N y formando las sumas correspondientes, advirtiendo que la cantidad $N-R$ estará limitada por alguno de los dichos esponentes H, H', H'', &c., debiendo ser menor que ellos, y al mismo tiempo deberá tambien ser $=$ ó >1. Si la cantidad ϵ fuese negativa desaparecerá el factor $(-1)^{N}$.

67. El problema de la inversion que se acaba de resolver, puede presentar algunas dificultades, cuando la serie que multiplica la primera potencia de la variable x no contenga el término numérico ϵ que la hemos supuesto, sino que en todos sus términos entren las potencias de algunos de los parámetros a, b, c, &c., porque en este caso dicho parámetro ó parámetros vendrán en general en la serie inversa con potencias positivas y negativas, y los coeficientes de cada una de estas potencias serán series numéricas indefinidas. Para evitar estos inconvenientes, si alguna de las demás series que multiplican las potencias de x contiene dicho término numérico ϵ, y al mismo tiempo en la serie constante z hay tambien otro término numérico α, podrá hacerse uso para la inversion de la fórmula (4) del capítulo 3.°, la cual dará reemplazando la cantidad α por $A^{(p)}$, representándose por este símbolo la serie que multiplica la potencia x^p.

$$x=\Sigma\frac{1}{[A^{(p)}]^{\frac{N}{p}}}\times\Sigma(-1)^n\times\frac{1}{p}\left(\frac{N}{p}-1\right)\ldots\left(\frac{N}{p}-n+1\right)\times z^{\frac{N}{p}-n}$$

$$\times\Sigma P\frac{\left[f\left(\frac{\triangle(N-1)}{\triangle n},\ \frac{\triangle H}{\triangle n},\ \frac{\triangle H'}{\triangle n},\ \frac{\triangle H''}{\triangle n},\ \&c.\right)\right]^{\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n}\times a^H.b^{H'}.c^{H''}\ldots\&c.,$$

desarrollando en serie la potencia $z^{\frac{N}{p}-n}$ se tendrá, suponiendo que todos los términos de la que representa el valor z son negativos, ó lo que es lo mismo, que se han pasado al primer miembro escepto el numérico α

$$z^{\frac{N}{p}-n}=\Sigma(-1)^n\times\left(\frac{N}{p}-n\right)\left(\frac{N}{p}-n-1\right)\ldots\left(\frac{N}{p}-n-n'+1\right)\times\alpha^{\frac{N}{p}-n-n'}$$

$$\times\Sigma P\frac{\left[f\left(0,\frac{\triangle H'}{\triangle n'},\ \frac{\triangle H'_{,}}{\triangle n'},\ \frac{\triangle H''_{,}}{\triangle n'},\ \&c.\right)\right]^{\triangle n'}}{2.3\ldots\triangle n'}\times a^{H_{,}}.\,b^{H_{,}'}.\,c^{H_{,}''}\ldots\ \&c.,$$

cuya espresion sustituida en la que precede, y comprendiendo los dos signos $\Sigma P.$ en uno solo como lo hemos hecho en los números anteriores, representando las respectivas sumas $H+H_{,}, H'+H_{,}', H''+H_{,}''$, &c. por H, H', H'', &c., y la $n+n'$ por n, resultará la espresion simplificada que sigue:

$$x=\Sigma\frac{1}{(A^{(p)})^{\frac{N}{p}}}\times\Sigma(-1)^n\times\frac{1}{p}\left(\frac{N}{p}-1\right)\left(\frac{N}{p}-n+1\right).\alpha^{\frac{N}{p}-n}$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[f\left(\frac{\Delta(N-1)}{\Delta n},\frac{\Delta H}{\Delta n},\frac{\Delta H'}{\Delta n},\frac{\Delta H''}{\Delta n},\text{ \&c.}\right)\right]^{\Delta n}}{2.3...\Delta n}\times a^{H}.b^{H'}.c^{H''}...\text{\&c.},$$

y finalmente, si desarrollamos ahora en serie la potencia $(A^{(p)})^{-\frac{N}{p}}$ será

$$A^{(p)^{-\frac{N}{p}}}=\Sigma(-1)^r\times\frac{1}{p}\left(\frac{N}{p}+1\right)...\left(\frac{N}{p}+r-1\right)\times\frac{1}{\epsilon^{\frac{N}{p}+r}}$$

$$\times\Sigma P.\frac{\left[f(p,\frac{\Delta H_{,}}{\Delta r},\frac{\Delta H_{,}'}{\Delta r},\frac{\Delta H_{,}''}{\Delta r},\text{ \&c.})\right]^{\Delta r}}{2.3...\Delta r}\times a^{H_{,}}.b^{H_{,}'}.c^{H_{,}''}...\text{\&c.},$$

é introduciendo esta espresion en la que precede, incluyendo de la misma manera los dos signos $\Sigma P.$ en uno solo, vendrá para la suma de acentos relativa al índice N la cantidad $\Sigma\Delta(N-1)+\Sigma p\Delta r=N+pr-1$, el número de factores de cada producto será $n+r$, por consiguiente representando como en los casos anteriores las sumas $H+H_{,}$, $H'+H_{,}'$, &c. por H, H', &c., la $n+r$ por n, y en fin, la cantidad $N+pr$ por N, vendrá la fórmula (7).

68. En algunos casos podrá conseguirse el objeto á que hace referencia el número precedente por medio de una doble inversion. Supongamos que se tiene la serie

$$\begin{array}{l|l|l|l} a_{,}z+a_{2}z^{2}+a_{3}z^{3}+\&c.=a'_{2}z^{2} & x+a'' & x^{2}+a''' & x^{3}+\&c. \\ \quad +a'_{3}z^{3} & \quad +a_{,}''z & \quad +a_{,}'''z & \\ \quad +a'_{4}z^{4} & \quad +a_{2}''z^{2} & \quad +a_{2}'''z^{2} & \\ \quad +\&c. & \quad +\&c. & \quad +\&c. & \end{array}$$

ordenándola por las potencias ascendentes de z será

$$\begin{array}{l|l|l|l} a''x^{2}+a'''x^{3}+\&c.=-a_{,} & z-a_{2} & z^{2}-a_{3}''' & z^{3}+\&c. \\ \quad +a_{,}''x^{2} & \quad +a_{2}'x & \quad +a_{3}'x & \\ \quad +a_{,}'''x^{3} & \quad +a_{2}''x^{2} & \quad +a_{3}''x^{2} & \\ \quad +\&c. & \quad +\&c. & \quad +\&c. & \end{array}$$

en la cual, despejando el valor de z vendrá este representado en una serie ordenada por las potencias ascendentes de x, en la que los coeficientes numéricos serán finitos; y suponiendo que sea la

$$z=Ax^{2}+A'x^{3}+A''x^{4}+\&c.$$

si se invierte nuevamente dará el valor de x ordenado por las potencias de $z^{\frac{1}{2}}$, y los coeficientes que multiplicarán estas potencias serán asimismo finitos.

69. Cuando se verifique que el parámetro ó parámetros que multiplican la serie que forma el coeficiente de la primera potencia de x, vengan elevados en las demás series que forman los otros coeficientes á potencias superiores á las de x, puede tambien conseguirse el objeto de que tratamos igualando el producto de x por dichos parámetros á una segunda variable x'. Por ejemplo en la serie

$$\begin{array}{l|l|l|l} a+a_{,}z+a_{2}z^{2}+\&c.=a_{,}'z & x+a_{2}''z^{2} & x^{2}+a_{3}'''z^{3} & x^{3}+\&c. \\ \quad +a_{2}'z^{2} & \quad +a_{3}''z^{3} & \quad +a_{4}'''z^{4} & \\ \quad +\&c. & \quad +\&c. & \quad +\&c. & \end{array}$$

si se hace $xz=x'$, será $z=\frac{x'}{x}$, y la serie anterior se convertirá en la

$$a+a_{,}\frac{x'}{x}+a_{,}\frac{x'^{2}}{x^{2}}+\&c.=a_{,}' \left| \begin{array}{l} +a_{,}'\dfrac{x'}{x} \\ +\&c. \end{array} \right| \begin{array}{l} x'+a_{,}'' \\ +a_{,}''\dfrac{x'}{x} \\ +\&c. \end{array} \left| \begin{array}{l} x'^{2}+a_{,}''' \\ +a_{,}'''.\dfrac{x'}{x} \\ +\&c. \end{array} \right| x'^{3}+\&c.$$

la cual, ordenada por las potencias de x', será

$$a=a_{,}' \left| \begin{array}{l} -a'.\dfrac{1}{x} \end{array} \right| \begin{array}{l} x'+a_{,}'' \\ +a_{,}'.\dfrac{1}{x} \\ -a_{,}.\dfrac{1}{x^{2}} \end{array} \left| \begin{array}{l} x'^{2}+a_{,}''' \\ +a_{,}''.\dfrac{1}{x} \\ +a_{,}'.\dfrac{1}{x^{2}} \\ -a_{,}.\dfrac{1}{x^{3}} \end{array} \right| x'^{3}+\&c.$$

y despejando en esta á x' se obtendrá una serie ordenada por las potencias ascendentes de $\frac{1}{x}$, que podemos representar por la general

$$x'=zx=A+A'.\frac{1}{x}+A''.\frac{1}{x^{2}}+A'''.\frac{1}{x^{3}}+\&c.$$

la que dividiéndola por x, y volviéndola á invertir, dará el valor de $\frac{1}{x}$ ordenado por las potencias de z.

70. Tambien pueden emplearse ventajosamente para el objeto que nos ocupa, las fórmulas de las transformaciones (1), (2), (3) hasta la (6), deducidas en el capítulo 3.° que antecede. Con efecto, si la serie

$$0=A+A'x+A''x^{2}+A'''x^{3}+\&c.$$

se transforma por medio de la fórmula (2), vendrá la

$$0=A+(A'+A)x'+(A''+2A'+A)x'^2+(A'''+3A''+3A'+A)x'^3+\&c.$$

la cual conteniendo el término constante A en todos los coeficientes de x', resultará, que si la serie que forma el término constante de aquella que nos proponemos invertir, tiene un término numérico α, efectuando la transformacion que se acaba de indicar, este término numérico hará tambien parte de tadas las series que forman los coeficientes de las diversas potencias x'^N. Puede asimismo efectuarse si conviene esta transformacion con respecto á algunos de los parámetros a, b, c, &c.

Finalmente, si ninguno de estos recursos diese el resultado apetecido, se sustituirá, en vez del parámetro ó parámetros que multiplicasen la serie que forma el coeficiente de la primera potencia de x, otro parámetro ó parámetros ligados á los primeros por las relaciones $a=\alpha+a'$, $b=\beta+b'$, &c., con lo cual se conseguirá un término numérico en la serie de que tratamos.

71. Por lo que llevamos espuesto se vendrá en conocimiento, de que no es posible prescindir de obtener en gran parte de los casos, al efectuar la inversion ó sustitucion de una serie, coeficientes numéricos que sean ellos mismos series indefinidas por cada combinacion determinada de esponentes de los parámetros a, b, c, &c. Si en el curso de un cálculo es preciso ejecutar dos ó mas de las operaciones indicadas, podrian estas series duplicarse ó triplicarse, es decir, que cada término de aquellos que las compusiesen podria ser tambien una serie indefinida; mas cuando esto suceda pueden estas series dobles ó triples reducirse á una sola. En efecto, si tomamos la serie general

$$f(x, a)=f(a)+f(1, a)x+f(2, a)x^2+f(3, a)x^3+\&c.$$

$=A$	$+A'$	$x+A''$	x^2+A'''	$x^3+\&c.$
$+A'a$	$+A_1'a$	$+A_1''a$	$+A_1'''a$	
$+A_2a^2$	$+A_2'a^2$	$+A_2''a^2$	$+A_2'''a^2$	$(b).$
$+\&c.$	$+\&c.$	$+\&c.$	$+\&c.$	

y hacemos en ella $a=\alpha x$, se transformará en la siguiente:

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
f(x,\ \alpha x)=A+A' & x+A'' & x^2+A''' & x^3+\&c. \\
+A_{,}\alpha & +A_{,}'\alpha & +A_{,}''\alpha & \\
 & +A_{2}\alpha^2 & +A_{2}'\alpha^2 & \\
 & & +A_{3}\alpha^3 &
\end{array}
$$

la cual representará el valor general de la funcion $f(x,\ \alpha x)$, y cuando x y α tengan valores particulares determinados, este valor se confundirá con el de $f(x, a)$. Resulta pues, que para reducir una *serie numérica duplicada*, como las hemos definido, á una serie sencilla, se deberán sumar diagonalmente los términos que la compongan, despues de ordenados convenientemente bajo la forma que se hallan en (b).

Para hacer palpable lo que se acaba de esponer con un ejemplo, tomemos la serie

$$\sqrt{1+a+x}=\sqrt{1+a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{(1+a)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{16}\cdot\frac{x^3}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}-\&c.$$

Si desarrollamos tambien en serie los denominadores de sus diversos términos, será

$$
\begin{array}{r|l|l|l|l}
\sqrt{1+a+x}=1 & +\frac{1}{2} & x-\frac{1}{8} & x^2+\frac{1}{16} & x^3-\&c. \\
+\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}\cdot\ \frac{1}{2}\cdot a & +\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}\cdot a & -\frac{1}{16}\cdot\ \frac{5}{2}a & \\
-\frac{1}{8}a^2 & +\frac{1}{2}\cdot\ \frac{3}{8}a^2 & -\frac{1}{8}\cdot\frac{3.5}{8}\cdot a^2 & +\frac{1}{16}\cdot\ \frac{5.7}{8}a^2 & \\
+\frac{1}{16}a^3 & -\frac{1}{2}\cdot\frac{3.5}{3.16}a^3 & +\frac{1}{8}\cdot\frac{5.7}{16}a^3 & -\frac{1}{16}\cdot\frac{3.5.7}{16}a^3 & \\
-\&c. & +\&c. & -\&c. & +\&c. &
\end{array}
$$

Haciendo ahora $a=\alpha x$, la funcion se transformará en $\sqrt{1+(1+\alpha)\cdot x}$, cuyo desarrollo es

$$\sqrt{1+(1+\alpha)x}=1+\frac{1}{2}(1+\alpha)x-\frac{1}{8}(1+\alpha)^2.x^2+\frac{1}{16}(1+\alpha)^3.x^3-\&c.$$

Si se suman en diagonal los términos de la serie duplicada que antecede, despues de poner αx en vez de a, dan

$$1, \frac{1}{2}(1+\alpha), -\frac{1}{8}\alpha^2-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}(1+\alpha)^2,$$

$$\frac{1}{16}\alpha^3+\frac{3}{16}\alpha^2+\frac{3}{16}\alpha+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}(1+\alpha)^3, \&c.$$

lo que no podia menos de suceder, porque ambas series son el desarrollo de una misma funcion.

Por medio de este procedimiento se podrá reducir el cálculo de los valores de la incógnita, en todo problema, al de una sola serie.

MODELO A.

	$N=1$	$N=2$	$N=3$
$h=1$	$h'=0$: $h''=0$ J; $h''=1$ J'; $h''=2$ J'';	$h'=0$: $h''=0$ $'J$; $h''=1$ $'J'$; $h''=2$ $'J''$;	$h'=0$: $h''=0$ ^2J; $h''=1$ $^2J'$; $h''=2$ $^2J''$; .....
	$h'=1$: $h''=0$ J_1; $h''=1$ J_1'; $h''=2$ J_1'';	$h'=1$: $h''=0$ $'J_1$; $h''=1$ $'J_1'$; $h''=2$ $'J_1''$;	$h'=1$: $h''=0$ $^2J_1$; $h''=1$ $^2J_1'$; $h''=2$ $^2J_1''$; .....
	$h'=2$: $h''=0$ J_2; $h''=1$ J_2'; $h''=2$ J_2'';	$h'=2$: $h''=0$ $'J_2$; $h''=1$ $'J_2'$; $h''=2$ $'J_2''$;	$h'=2$: $h''=0$ $^2J_2$; $h''=1$ $^2J_2'$; $h''=2$ $^2J_2''$; .....
	.....	.....	.....
$h=2$	$h'=0$: $h''=0$ $_1J$; $h''=1$ $_1J'$; $h''=2$ $_1J''$;	$h'=0$: $h''=0$ $'_1J$; $h''=1$ $'_1J'$; $h''=2$ $'_1J''$;	$h'=0$: $h''=0$ ^2_1J; $h''=1$ $^2_1J'$; $h''=2$ $^2_1J''$; .....
	$h'=1$: $h''=0$ $_1J_1$; $h''=1$ $_1J_1'$; $h''=2$ $_1J_1''$;	$h'=1$: $h''=0$ $'_1J_1$; $h''=1$ $'_1J_1'$; $h''=2$ $'_1J_1''$;	$h'=1$: $h''=0$ $^2_1J_1$; $h''=1$ $^2_1J_1'$; $h''=2$ $^2_1J_1''$; .....
	$h'=2$: $h''=0$ $_1J_2$; $h''=1$ $_1J_2'$; $h''=2$ $_1J_2''$;	$h'=2$: $h''=0$ $'_1J_2$; $h''=1$ $'_1J_2'$; $h''=2$ $'_1J_2''$;	$h'=2$: $h''=0$ $^2_1J_2$; $h''=1$ $^2_1J_2'$; $h''=2$ $^2_1J_2''$; .....
	.....	.....	.....
$h=3$	$h'=0$: $h''=0$ $_2J$; $h''=1$ $_2J'$; $h''=2$ $_2J''$;	$h'=0$: $h''=0$ $'_2J$; $h''=1$ $'_2J'$; $h''=2$ $'_2J''$;	$h'=0$: $h''=0$ ^2_2J; $h''=1$ $^2_2J'$; $h''=2$ $^2_2J''$; .....
	$h'=1$: $h''=0$ $_2J_1$; $h''=1$ $_2J_1'$; $h''=2$ $_2J_1''$;	$h'=1$: $h''=0$ $'_2J_1$; $h''=1$ $'_2J_1'$; $h''=2$ $'_2J_1''$;	$h'=1$: $h''=0$ $^2_2J_1$; $h''=1$ $^2_2J_1'$; $h''=2$ $^2_2J_1''$; .....
	.....	.....	.....

MODELO B.

	$N=2$			$N=3$			$N=4$		
$h=2$	$h'=0$	$h''=0$	I	$h=2$	$h'=0$	$h''=0$	$'I$	$h=2$	$h'=0$	$h''=0$	^2I
		$h''=1$	I'			$h''=1$	$'I'$			$h''=1$	$^2I'$
		$h''=2$	I''			$h''=2$	$'I''$			$h''=2$	$^2I''$
		.....	....			.....	....			.....	....
	$h'=1$	$h''=0$	I_1		$h'=1$	$h''=0$	$'I_1$		$h'=1$	$h''=0$	$^2I_1$
		$h''=1$	I_1'			$h''=1$	$'I_1'$			$h''=1$	$^2I_1'$
		$h''=2$	I_1''			$h''=2$	$'I_1''$			$h''=2$	$^2I_1''$
		.....	....			.....	....			.....	....
	$h'=2$	$h''=0$	I_2		$h'=2$	$h''=0$	$'I_2$		$h'=2$	$h''=0$	$^2I_2$
		$h''=1$	I_2'			$h''=1$	$'I_2'$			$h''=1$	$^2I_2'$
		$h''=2$	I_2''			$h''=2$	$'I_2''$			$h''=2$	$^2I_2''$
		.....	....			.....	....			.....	....
		.....				.....				.....	
$h=3$	$h'=0$	$h''=0$	$_1I$	$h=3$	$h'=0$	$h''=0$	$'_1I$	$h=3$	$h'=0$	$h''=0$	^2_1I
		$h''=1$	$_1I'$			$h''=1$	$'_1I'$			$h''=1$	$^2_1I'$
		$h''=2$	$_1I''$			$h''=2$	$'_1I''$			$h''=2$	$^2_1I''$
		.....	....			.....	....			.....	....
	$h'=1$	$h''=0$	$_1I_1$		$h'=1$	$h''=0$	$'_1I_1$		$h'=1$	$h''=0$	$^2_1I_1$
		$h''=1$	$_1I_1'$			$h''=1$	$'_1I_1'$			$h''=1$	$^2_1I_1'$
		$h''=2$	$_1I_1''$			$h''=2$	$'_1I_1''$			$h''=2$	$^2_1I_1''$
		.....	....			.....	....			.....	....
	$h'=2$	$h''=0$	$_1I_2$		$h'=2$	$h''=0$	$'_1I_2$		$h'=2$	$h''=0$	$^2_1I_2$
		$h''=1$	$_1I_2'$			$h''=1$	$'_1I_2'$			$h''=1$	$^2_1I_2'$
		$h''=2$	$_1I_2''$			$h''=2$	$'_1I_2''$			$h''=2$	$^2_1I_2''$
		.....	....			.....	....			.....	....
		.....				.....				.....	
$h=4$	$h'=0$	$h''=0$	$_2I$	$h=4$	$h'=0$	$h''=0$	$'_2I$	$h=4$	$h'=0$	$h''=0$	^2_2I
		$h''=1$	$_2I'$			$h''=1$	$'_2I'$			$h''=1$	$^2_2I'$
		$h''=2$	$_2I''$			$h''=2$	$'_2I''$			$h''=2$	$^2_2I''$
		.....	....			.....	....			.....	....
	$h'=1$	$h''=0$	$_2I_1$		$h=1$	$h''=0$	$'_2I_1$		$h=1$	$h''=0$	$^2_2I_1$
		$h''=1$	$_2I_1'$			$h''=1$	$'_2I_1'$			$h''=1$	$^2_2I_1'$
		$h''=2$	$_2I_1''$			$h''=2$	$'_2I_1''$			$h''=2$	$^2_2I_1''$
		.....	....			.....	....			.....	....
		.....				.....				.....	

Ecuaciones y fórmulas del capítulo 5.°

1
$$\begin{cases} A^{(H)} = \Sigma f(H,h,h',h''\ldots \&c.)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots \&c. \\ \Sigma P.\ \dfrac{A^{\left(\frac{\triangle y}{\triangle n}\right)\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n} = \Sigma a^H.\ b^{H'}.\ c^{H''}\ldots \&c.\times \\ \qquad \times \Sigma P.\ \dfrac{\left[f\left(\dfrac{\triangle N}{\triangle n},\ \dfrac{\triangle H}{\triangle n},\ \dfrac{\triangle H'}{\triangle n},\ \dfrac{\triangle H''}{\triangle n},\ \&c.\right)\right]^{\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n} \end{cases}$$

1′
$$\begin{cases} \Sigma P.\ \dfrac{\left[f\left(\dfrac{\triangle N}{\triangle n},\dfrac{\triangle H}{\triangle n},\dfrac{\triangle H'}{\triangle n},\dfrac{\triangle H''}{\triangle n}\ldots \&c.\right)\right]^{\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n} = f^n(N,H,H',H''\ldots \&c.) \\ \Sigma P.\ \dfrac{A^{\left(\frac{\triangle N}{\triangle n}\right)\triangle n}}{2.3\ldots\triangle n} = \Sigma a^H.\ b^{H'}.\ c^{H''}\ldots \&c.\times f^n(N,H,H',H''\ldots \&c.) \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} f^n(N,H,H',H''\ldots\&c.) = \dfrac{1}{n}\Sigma f^{n-1}(\triangle' N,\triangle' H,\triangle' H',\triangle' H''\ldots\&c.)\times \\ \qquad \times f^1(\triangle'' N,\ \triangle'' H,\ \triangle'' H',\ \triangle'' H''\ldots \&c.) \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} x = \Sigma f(h,h',h''\ldots \&c.)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots \&c. \\ \Sigma x^N \times \Sigma F(N,h,h',h''\ldots \&c.)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots \&c. = 0 \\ \Sigma a^H.\ b^{H'}.\ c^{H''}\ldots \&c.\times \Sigma 2.3\ldots N\times \Sigma F(N,\triangle' H,\triangle' H',\triangle' H''\ldots \&c.)\times \\ \qquad \times f^N(\triangle'' H,\triangle'' H',\triangle'' H''\ldots \&c.) = 0 \end{cases}$$

$$4\begin{cases} x=\alpha+\Sigma f(h,h',h''\ldots\ \&c.)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c. \\ \Sigma x^{\nu}\times\Sigma F(N,h,h',h''\ldots\ \&c.)\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c.=0 \\ \Sigma a^{H}.\ b^{H'}.\ c^{H''}\ldots\ \&c.\times\Sigma_{\alpha^R}\times\Sigma(R+1)(R+2)\ldots(R+n)\times \\ \qquad\times\Sigma F(R+n,\triangle' H,\triangle' H',\triangle' H''\ldots\ \&c.) \\ \qquad\times f^n(\triangle'' H,\triangle'' H',\triangle'' H''\ldots\ \&c.)=0 \end{cases}$$

$$5\begin{cases} \Sigma x^N\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c.\times f(N,h,h',h''\ldots\ \&c.)+\ldots \\ \qquad +x[\varepsilon+\Sigma a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c.\times f(1,h,h',h''\ldots\ \&c.)]+ \\ \qquad +\Sigma a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c.\times f(0,h,h',h''\ldots\ \&c.)=0 \\ x=\Sigma a^{H}.\ b^{H'}.\ c^{H''}\ldots\&c.\times\Sigma(-1)^{\nu}\times 2.3\ldots(N-1)\times\dfrac{1}{\varepsilon^N}\times \\ \qquad\times f^n(N-1,H,H',H''\ldots\&c.) \end{cases}$$

$$6\begin{cases} \Sigma x^{\nu}\times a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c.\times f(N,h,h',h''\ldots\ \&c.)+\ldots \\ \qquad +x[\varepsilon+\Sigma a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c.\times f(1,h,h',h''\ldots\ \&c.)]+ \\ \qquad +\alpha+\Sigma a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c.\times f(0,h,h',h''\ldots\ \&c.)=0 \\ x=\Sigma a^{H}.\ b^{H'}.\ c^{H''}\ldots\ \&c.\times\Sigma(-1)^N\times\dfrac{2.3\ldots(N-1)}{2.3\ldots R}\times\dfrac{\alpha^R}{\varepsilon^N}\times \\ \qquad\times f^{N-R}(N-1,H,H',H''\ldots\ \&c.) \end{cases}$$

$$7\begin{cases} \&c.+x^p[\varepsilon+\Sigma a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c.\times f(p,h,h',h''\ldots\ \&c.)]+\ldots \\ \qquad +\Sigma a^h.\ b^{h'}.\ c^{h''}\ldots\ \&c.\times f(0,h,h'.h''\ldots\ \&c.)=\alpha \\ x=\Sigma a^{H}.\ b^{H'}.\ c^{H''}\ldots\&c.\times\Sigma(-1)^n\times\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{N}{p}-1\right)\left(\dfrac{N}{p}-2\right)\ldots\left(\dfrac{N}{p}-n+1\right)\times \\ \qquad\dfrac{\alpha^{\frac{N}{p}-n}}{\varepsilon^{\frac{N}{p}}}\times f^n(N-1,H,H',H''\ldots\ \&c.) \end{cases}$$

CAPITULO VI.

Algunas fórmulas y consecuencias que se infieren de la presente teoría.

72. En el número (30) del capítulo 2.° hemos deducido la espresion del coeficiente diferencial del órden N, correspondiente á una funcion mediata en valores de los coeficientes diferenciales de las inmediatas sucesivas de que se compone, cuya espresion se halla contenida en las fórmulas (10) y (11) de dicho capítulo que reproducimos ahora en las (1) y (2).

Para hacer alguna aplicacion de estas fórmulas, supondremos que la funcion representada en la (1) por la letra p sea sucesivamente una de las elementales $l.x, a^x, x^m$. Si hacemos primeramente $p=lx$, se tendrá

$$\frac{d^H l.x}{dx^H}=(-1)^{H+1}\times\frac{2.3...(H-1)}{x^H}$$

$$\Sigma P.\left[\frac{d.\frac{\Delta^N}{\Delta^n}p}{dx.\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}=$$

$$\frac{(-1)^{N+n}}{x^N}\times\Sigma P.\left[\frac{1}{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{2.3...\Delta n},$$

por cuanto el producto de los factores $P.\left(\frac{1}{x^H}\right)^{\Delta^n}=P.\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}.\Delta^n}$, dará $\left(\frac{1}{x}\right)^N$ que podrá estraerse fuera del signo $\Sigma P.$, del mismo modo el

producto $P.(-1)^{(H+1)\Delta^n}=P.(-1)^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}.\Delta^n+\Delta^n}=(-1)^{N+n}$, que se estraerá asimismo fuera de este signo, y en fin, los factores $[2.3...(H-1)]^{\Delta^n}=$

$=\left[2.3...\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}-1\right)\right]^{\Delta n}$ se destruirán con los que ya existen en el denominador, quedando solo en este el $\frac{1}{\left(\frac{\Delta N}{\Delta n}\right)^{\Delta n}}$. Por consiguiente se inferirá la fórmula escrita en (3).

Si en la misma fórmula hacemos $p=a^x$, el coeficiente diferencial del órden H de esta funcion será

$$\frac{d.^H a^x}{dx^H}=a^x(l.a)^H$$

y en su virtud, aplicando las observaciones que preceden, se tendrá

$$\Sigma P.\left[\frac{\frac{\Delta^N}{d\Delta^n p}}{\frac{\Delta^N}{dx^{\Delta^n}}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}=$$

$$=a^{xn}\times(l.a)^N\times\Sigma P.\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}$$

Por la fórmula (13) del mencionado capítulo 2.°, es

$$\Sigma P.\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}=\frac{n^N-n.(n-1)^N+\frac{n(n-1)}{2}.(n-2)^N-\&c.}{2.3...n\times 2.3...N}$$

y por consiguiente se inferirá la fórmula (4).

En fin, si hacemos $p=x^m$ se tendrá

$$\frac{d^{II}.\,x^m}{dx^{II}}=m(m-1)...(m-II+1)\times x^{m-II}$$

$$\Sigma P.\left[\frac{d^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}p}{dx^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}}\right]\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}=$$

$$=x^{mn-N}\times\Sigma P.\left[\frac{m(m-1)...\left(m-\frac{\Delta^N}{\Delta^n}+1\right)}{2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{2.3...\Delta n},$$

y siendo por la fórmula (12) del mismo capítulo

$$\Sigma P.\left[\frac{m(m-1)...\left(m-\frac{\Delta^N}{\Delta^n}+1\right)}{2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{2.3...\Delta n}=$$

$$=(-1)^{n+k}\times\frac{mk(mk-1)...(mk-N+1)}{2.3...(n-k)\times 2.3...k\times 2.3...N}$$

resultará la fórmula (5).

73. Como la integral de una funcion dada puede considerarse como el coeficiente diferencial de un órden retrógrado de la misma funcion, se inferirá, que siempre que en la fórmula (1) la espresion

$$2.3...N\Sigma P.\left[\frac{d^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}p}{dx^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}$$

venga determinada en términos concisos, de manera que pueda asignársele el valor que recibe cuando se suponga en ella $N=-1$, ó en general $N=-N$, dicha fórmula nos dará la integral del órden respectivo de la funcion propuesta.

Haciendo aplicacion del enunciado que acabamos de establecer, primeramente á la espresion del coeficiente diferencial contenido en la fórmula (3), se verá que el obtener de ella la integral de un órden cualquiera de la funcion á que se refiere, dependerá de poder designar á la funcion

$$2.3...N\times\Sigma P\left[\frac{1}{\frac{\triangle^N}{\triangle^n}}\right]^{\triangle^n}\times\frac{1}{2.3...\triangle n}$$

el valor que la corresponde cuando N sea negativo. Este valor puede llegarse á conocer en el caso particular de $N=-1$, porque si suponemos $f(l.x)=(l.x)^m$, será $\frac{d^n.(l.x)^m}{d(l.x)^n}=m(m-1)...(m-n+1)(l.x)^{m-n}$, y la fórmula (3) de que tratamos se convertirá en este caso particular en

$$\int(l.x)^m.\,dx=x\Sigma(-1)^{n+1}\times m(m-1)...(m-n+1)(l.x)^{m-n}$$
$$\times\left[2.3...N\Sigma P.\frac{1}{\left(\frac{\triangle^N}{\triangle^n}\right)^{\triangle^n}\times 2.3...\triangle n},\ N=-1\right]$$

y comparando esta espresion con la conocida en todos los tratados del cálculo integral, que es

$$\int(l.x)^m.\,d.x=x\Sigma(-1)^n\times m(m-1)...(m-n+1)\times(l.x)^{m-n}$$

se infiere que la funcion de que tratamos, cualquiera que sea el valor de n, tiene un valor constante é igual á -1. En consecuencia se podrá escribir el valor general de la integral $\int(f.lx)dx$ como se halla en la fórmula (6), es decir, que *es igual á una serie que se compone de la suma indefinida de los coeficientes diferenciales de la funcion propuesta tomados alternativamente con signos* + *y* —, *añadiendo la misma funcion propuesta y multiplicando el resultado por la variable* x. La

funcion propuesta hace veces del sumando correspondiente al valor $n=0$ que debe entrar en la composicion de la indicada suma.

Sea $f(l.x)=a^{l.x}$, de donde $\frac{d^n a^{l.x}}{d.(l.x)^n}=a^{l.x}\times(l.a)^n$, se tendrá

$$\int a^{l.x}.\,dx=xa^{l.x}\times(1-l.a+(l.a)^2-(l.a)^3+(l.a)^4-\&c.)=\frac{x.a^{l.x}}{1+la}.$$

Sea $f(l.x)=l.l.x$, será $\frac{d^n l.lx}{d.(l.x)^n}=(-1)^{n+1}\times\frac{2.3\ldots(n-1)}{(l.x)^n}$,

$$\text{y}\int l.l.x\times dx=x\left(l.l.x-\frac{1}{lx}-\frac{1}{(l.x)^2}-\frac{2}{(l.x)^3}-\frac{2.3}{(l.x)^4}\ldots-\frac{2.3\ldots(n-1)}{(l.x)^n}-\&c.\right).$$

Pasando ahora á la espresion general del coeficiente diferencial del órden N, contenido en la fórmula (4), se ve, que suponiendo N negativa, el coeficiente numérico toma la forma siguiente:

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\left[\frac{1}{n^N}+\frac{n}{(n-1)^N}+\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{(n-2)^N}-\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}}{(n-3)^N}+\&c.\right],$$

y su valor es inasignable, pues precisamente alguno de los denominadores $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c., se ha de reducir á 0.

En la espresion de la fórmula (5) que se refiere al caso de $p=x^m$, el coeficiente numérico es

$$\Sigma(-1)^{n+k}\times\frac{mk(mk-1)\ldots(mk-N+1)}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k}=$$

$$=\Sigma\frac{(-1)^{n+k}\times 2.3\ldots mk}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k\times 2.3\ldots(mk-N)},$$

que en el caso de ser N negativa se reduce á

$$\Sigma\frac{(-1)^{n+k}\times 2.3\ldots mk}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots k\times 2.3\ldots(mk+N)}=$$

$$=\Sigma\frac{(-1)^{n+k}}{2.3...(n-k)\times 2.3...k\times(mk+1)(mk+2)...(mk+N)}$$

y en consecuencia se inferirá la fórmula (7).

Sea en ella $f(x^m)=l.x^m$, será $\frac{d^n l.x^m}{d.(x^m)^n}=\frac{(-1)^{n+1}\times 2.3...(n-1)}{x^{mn}}$, y

$$\int^N l.x^m dx_N = m\int^N l.x.dx_N =$$

$$=x^N\times\Sigma\frac{(-1)^{k+1}\times 2.3...(n-1)}{2.3...(n-k)\times 2.3...k\times(mk+1)(mk+2)...(mk+N)}=$$

$$=\frac{x^N.\,l.x^m}{2.3...N}-x^N\times\Sigma\frac{(-1)^k\times(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{2.3...k\times(mk+1)(mk+2)...(mk+N)}$$

el primer término es el coeficiente diferencial del órden 0 multiplicado por el valor que toma el numérico de la espresion en este caso, el cual debe entrar en la composicion de la suma segun se ha espresado anteriormente; el segundo término es una suma indefinida, cuyo valor numérico sería preciso determinar. Se puede conseguir este objeto por medio de integraciones sucesivas, partiendo de la fórmula general conocida en los tratados del cálculo integral, que es

$$\int x^m.(l.x).dx=x^{m+1}\left[\frac{l.x}{m+1}-\frac{1}{(m+1)^2}\right]$$

en virtud de la cual se tendrá sucesivamente

$$\int x^0.\,l.x.dx=xl.x-x,\ \int^2 l.xdx^2=\int x.l.x.dx-\int xd.x=$$

$$=\frac{x^2l.x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2l.x}{2}-\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right),$$

$$\int l.x.dx^3=\frac{x^3.l.x}{2.3}-\frac{x^3}{2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right),\ \text{y en general}$$

$$\int^N l.x.dx^N = \frac{x^N}{2.3...N}\left[l.x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} ... - \frac{1}{N}\right] =$$

$$= \frac{x^N}{2.3...N}\left[l.x - C^{(N)}\right]$$

representando por el signo $C^{(N)}$ la suma numérica $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{N}$.

Sea ahora $f(x^m)=a^{x^m}$, será $\frac{d^n(f(x^m)}{d(x^m)^n}=a^{x^m}\times(l.a)^n$, y

$$\int^N a^{x^m}\times d.x^N = a^{x^m}\times x^N \times \Sigma(l.a)^n.\ x^{mn}$$

$$\times\Sigma\frac{(-1)^{n+k}}{2.3...(n-k)\times 2.3...k\times(mk+1)(mk+2)...(mk+N)}$$

viene pues una serie ordenada por las potencias de $x^m l.a$, cuyos coeficientes se calcularán facilmente dando valores á k desde $k=0$ hasta $k=n$. Si se desarrolla en serie la funcion a^{x^m}, su término general será

$$\frac{x^{mn}.\ (l.a)^n}{2.3...n}$$

é integrando N veces esta serie, la resultante sería

$$\int^N a^{x^m}.\ dx^N = \Sigma\frac{x^{mn+N}\times(l.a)^n}{2.3...n\times(mn+1)(mn+2)...(mn+N)},$$

cuyo término general deberá ser el mismo que se obtenga, desarrollando en la espresion que antecede de esta misma integral, el factor a^{x^m}, y efectuando la multiplicacion de las dos series.

El coeficiente general de la fórmula (7) de que nos ocupamos

$$\Sigma \frac{(-1)^{n+k}}{2.3...(n-k)\times 2.3...k\times(mk+1)(mk+2)...(mk+N)}$$

se hará inasignable cuando m sea negativa y el órden N de la integral sea superior á dicha m, en el supuesto de ser esta un número entero; esto se ve fácilmente, pues cuando $m=-1$, será el factor $mk+1=0$ en todos aquellos casos en que k sea igual á la unidad, y lo mismo aconteeerá en las demás potencias enteras siempre que N sea $>m$, mas no en las fraccionarias. Esto debia suceder, pues cuando las potencias negativas sean enteras, desarrollando la funcion en serie tendrá un término de la forma $\frac{c^{(n)}}{x^{mn}}$, el que al cabo de mn integraciones sucesivas, deberá dar por resultado $l.x$.

74. Vamos ahora á dar otra forma á la fórmula general (1), á la que se refiere todo lo que se acaba de esponer. Si se hace en ella $n=N-n'$, y se saca el primer coeficiente diferencial fuera del signo $\Sigma P.$, vendrá

$$\frac{d^N f(p)}{dx^N}=2.3...N\times\Sigma\frac{d^{N-n'}f(p)}{dp^{N-n'}}\times\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)^{N-N'}}{2.3...(N-N')}\times\Sigma P.\left[\frac{d.\frac{\Delta^{N'}}{\Delta^{(N'-n')}}p}{d_x\frac{\Delta^{N'}}{\Delta^{(N'-n')}}}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^{N'}}{\Delta^{(N'-n')}}\right)^{\Delta^{(N'-n')}}\times 2.3...\Delta(N'-n')}$$

puesto que, estraido el primer coeficiente diferencial, y suponiéndole elevado á la potencia $N-N'$, el número de factores que quedará dentro del signo $\Sigma P.$ será únicamente $n-N+N'=N-n'-N+N'=$ $=N'-n'$. Destruyendo los factores $2.3...(N-N')$ en el numerador y denominador de la espresion que precede, y haciendo $N'-n'=m$, se transformará en

$$\frac{d^N f(p)}{dx^N}=\Sigma(-1)^N\times -N(-N+1)\ldots(-N+N'-1)\times\frac{d^{N-N'+m}f(p)}{d.p^{N-N'+m}}$$

$$\times\left(\frac{dp}{dx}\right)^{N-N'}.\ \Sigma P\left[\frac{d^{\frac{\Delta N'}{\Delta m}}p}{dx^{\frac{\Delta N'}{\Delta m}}}\right]^{\Delta m}\times\frac{1}{\left(2.3\ldots\frac{\Delta N'}{\Delta m}\right)^{\Delta m}\times 2.3\ldots\Delta m}$$

bajo cuya forma podrá atribuirse á N un valor negativo $-N$, dando por resultado una serie ilimitada escrita en la fórmula (8), en la cual se ha designado la cantidad $N'-m$ que debe ser siempre positiva por N'.

Si en esta fórmula se hace $N=1$, y se representa por N la cantidad de $N'+1$, viene para la integral sencilla la fórmula (9). Estas fórmulas dan los valores de la integral de una funcion mediata en series ilimitadas de las integrales sucesivas y coeficientes diferenciales de las inmediatas de que se compone.

75. Sabemos que siendo $z=f(x)$, se tiene la serie

$$\Delta z=\frac{dz}{dx}.\ \Delta x+\frac{1}{2}.\frac{d^2z}{dx^2}.\ \Delta x^2+\frac{1}{2.3}.\frac{d^3z}{dx^3}.\ \Delta x^3+\&c.$$

la cual si se invierte para obtener el valor de Δx en funcion de Δz, dará por la fórmula (1) del capítulo 3.°,

$$\Delta x=\Sigma\Delta z^N\times\Sigma(-1)^m\times(N+1)(N+2)\ldots(N+m-1)\times\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^{N+m}}$$

$$\times\Sigma P.\left[\frac{d.\ \overset{\Delta(N+m-1)}{\Delta^m}z}{dx^{\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta^m}}}\right]^{\Delta m}\times\frac{1}{\left(2.3\ldots\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta^m}\right)^{\Delta m}\times 2.3\ldots\Delta m}$$

mas si z es funcion de x, x deberá serlo asimismo de z, y por consiguiente se tendrá

$$\triangle x=\frac{dx}{dz}.\triangle z+\frac{1}{2}.\frac{d^2x}{dz^2}.\triangle z^2...+\frac{1}{2.3...N}\times\frac{d^Nx}{dz^N}.\triangle z^N+\&c.$$

é igualando en estas dos espresiones los coeficientes de la potencia $\triangle z^N$, vendrá la fórmula (10). Comparando esta fórmula (10) con el valor de la integral dada en la fórmula (9), se ve que la cantidad que en esta depende de los valores que se asignen á la variable m, es absolutamente idéntica al segundo miembro de aquella; y en consecuencia, sustituyendo en vez suya el primer miembro, se llegará á la fórmula (11) que representa de un modo mas sencillo el valor de la integral de una funcion mediata.

76. Supongamos primeramente en la fórmula que acabamos de escribir $f(p)=p$, será $\int p^N.f(p).dp^N=\frac{p^{N+1}}{2.3...(N+1)}$, y por consiguiente resultará la fórmula (12).

Para hacer aplicacion de esta última fórmula á las funciones elementales, hagamos en primer lugar $p=a^x$, despejando x se tendrá $x=\frac{l.p}{l.a}$, y el coeficiente diferencial del órden N de esta espresion, será

$$\frac{d^Nx}{dp^N}=\frac{1}{l.a}\times(-1)^{N+1}\times\frac{2.3...(N-1)}{p^N}$$

efectuando la sustitucion en la fórmula, la potencia p^{N+1} del numerador se destruye con la p^N del denominador, quedando tan solo p en el primero; igualmente se destruyen los factores $2.3...(N-1)$, debiendo ser positivos todos los términos; se tendrá, por consiguiente,

$$\int a^x.dx=\frac{a^x}{l.a}\times\Sigma\frac{1}{N(N-1)}=\frac{a^x}{l.a}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\&c.\right)$$

la serie contenida en el paréntesis es la misma que hallamos en el número (50) del capítulo 3.°, y puede verse que es igual á la unidad.

Supongamos en segundo lugar $p=l.x$ será $x=e^p$. y $\frac{d^Nx}{dp^N}=e^p=x$;

por consiguiente, sustituyendo, se tendrá

$$\int l.\,xdx=x.\Sigma\frac{p^{N+1}\times(-1)^{N+1}}{2.3...(N+1)}=$$

$$=x\left(+\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{2.3}+\frac{p^4}{2.3.4}-\frac{p^5}{2.3.4.5}+\frac{p^6}{2.3.4.5.6}=\&c.\right)=$$

$$=x\left(-1+p+\frac{1}{e^p}\right)=1+x(l.x-1).$$

En fin, suponiendo en tercer lugar $p=x^k$, será $x=p^{\frac{1}{k}}$ y

$$\frac{d^Nx}{dp^N}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)...\left(\frac{1}{k}-N+1\right).p^{\frac{1}{k}-N}$$

efectuando la sustitucion, destruyendo la potencia p^N, resultará

$$\int x^k dx=p^{\frac{1}{k}+1}\times\Sigma(-1)^{N+1}\times\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)...\left(\frac{1}{k}-N+1\right)}{2.3...(N+1)}$$

$$=x^{k+1}\times\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)...\left(\frac{1}{k}-N+1\right)}{2.3...(N+1)}$$

si se desarrolla la serie contenida en el signo Σ por las potencias as-

cendentes de $\frac{1}{k}$, efectuando para el efecto las multiplicaciones indicadas en cada término, esta serie deberá ser la que sigue:

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}-\frac{1}{k^4}+\&c.=\frac{1}{k+1}.$$

77. Supongamos ahora en la fórmula general (11) $f(p)=l.p$; se tendrá, como sabemos, $\int^{\nu} l.p.dp^{\nu}=\frac{p^{\nu}(l.p-C^{(\nu)})}{2.3...N}$, y por consiguiente la indicada fórmula se convertirá en la (13).

Si se hace primeramente en ella $p=a^x$, de donde

$$x=\frac{l.p}{l.a},\quad \frac{d^N x}{dp^{\nu}}=(-1)^{N-1}\times\frac{2.3...(N-1)}{l.a\times p^{\nu}}$$

vendrá

$$\int l.a^x.\,dx=\Sigma\frac{l.p-C^{(N)}}{N}\times\frac{1}{l.a}=x\Sigma\frac{1}{N}-const.=\infty$$

resultando una espresion inasignable.

Sea $p=l.x$, $x=e^p$, $\frac{d^N x}{dp^N}=e^p$, vendrá

$$\int l.lx\,dx=x\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{p^N(l.p-C^{(N)})}{2.3...N}$$

$$=xl.p.\Sigma\frac{(-1)^{\nu-1}.p^{\nu}}{2.3...N}-x\Sigma\frac{(-1)^{\nu-1}p^{\nu}.C^{(\nu)}}{2.3...N}$$

teniéndose separadamente la suma del primer término

$$\Sigma xl.p\times\frac{(-1)^{N-1}p^N}{2.3...N}=xl.p\left(p-\frac{p^2}{2}+\&c.\right)=xl.p\left(1-\frac{1}{e^p}\right)=-l.lx+xl.lx$$

con lo que será

$$\int l.l.x dx = l.l.x + x\left[l.l.x + \Sigma\frac{(-1)^{N-1}.\,C^N.\,(l.x)^N}{2.3...N}\right],$$

y para que esta espresion sea idéntica á la que se dedujo en el número (72), será preciso que se verifique la ecuacion

$$e^p.\,\Sigma\frac{2.3...(N-1)}{p^n} = e^p.\,\Sigma\frac{(-1)^{N-1}.\,C^{(N)}.\,p^N}{2.3...N} + l.p + const...(a).$$

Sea, en fin, $p=x^k$, será $\frac{d^N x}{dp^N} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)...\left(\frac{1}{k}-N+1\right).\,p^{\frac{1}{k}-N}$ y

$$\int l.x^k dx = \Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)...\left(\frac{1}{k}-N+1\right)}{2.3...N}\times p^{\frac{1}{k}}.(l.p - C^{(N)})$$

la suma del coeficiente del primer término es

$$\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)...\left(\frac{1}{k}-N+1\right)}{2.3...N}$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2} + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)}{2.3} - \&c. = 1-(1-1)^{\frac{1}{k}} = 1$$

la suma del coeficiente del segundo término debe ser $=k$, y la espresion se reducirá á

$$\int l.x^k.\,dx = kx(l.x-1).$$

78. Hagamos ahora en la fórmula (11), $f(p)=a^p$, será

$$\int^N a^p . dp^N = a^p \times \frac{1}{(l.a)^N},$$

y dicha fórmula se transformará en la (14).

Si se hace en esta $p=lx$, será $\frac{d^N x}{dp^N}=e^p$, y la fórmula dará

$$\int a^{l.x}.dx = x.a^{l.x}\times\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{1}{(l.a)^N} = x.a^{l.x}\left(\frac{1}{l.a}-\frac{1}{(l.a)^2}+\frac{1}{(l.a)^3}-\&c.\right)$$

$$=\frac{xa^{l.x}}{l.a+1}$$

si se hace $p=x^k$, será como sabemos $\frac{d^N x}{dp^N}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{k}-N+1\right)\times$

$\times p^{\frac{1}{k}-N}$, y vendrá

$$\int a^{x^k}.dx = x.a^{x^k}\times\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{k}-N+1\right)\times\frac{1}{(xl.a)^N}$$

$$=x.a^{x^k}\Sigma\frac{\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(2-\frac{1}{k}\right)\ldots\left(N-1-\frac{1}{k}\right)}{(xl.a)^N}$$

esta serie será finita siempre que $\frac{1}{k}$ sea un número entero.

Hagamos por último $p=b^x$, será $\frac{d^N x}{dp^N}=\frac{1}{1.6}\times(-1)^N\times\frac{2.3\ldots(N-1)}{p^N}$, y

$$\int a^{b^x}\,dx = a^{b^x}\times\frac{1}{l.b}\Sigma\frac{2.3\ldots(N-1)}{(pl.a^N)} = \frac{1}{l.b}\int\frac{a^p}{p}dp$$

79. Finalmente, si se supone $f(p)=p^m$ será

$$\int^N p^m . dp^N = \frac{p^{m+N}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+N)},$$

y viene la fórmula (15), en la cual haciendo $p=l.x$ se tendrá

$$\int (l.x)^m = x\times\Sigma\frac{(-1)^{N-1}.\,p^{m+N}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+N)} = x\times 2.3\ldots m\times$$

$$\times\Sigma\frac{(-1)^{N+1}\times p^{m+N}}{2.3\ldots(m+N)} = x\times 2.3..m\left(\pm 1\mp p\pm\frac{p^2}{2}\ldots+\frac{p^m}{2.3\ldots m}\mp\frac{1}{e^p}\right)=$$

$$=x((l.x)^m-m(l.x)^{m-1}+m(m-1)(l.x)^{m-2}-\&c.).$$

80. La fórmula (11), haciendo $p=l.x$, da

$$\int f(l.x).dx = x.\Sigma(-1)^{N-1}\times\int^N f(p).\,dp^N$$

y comparando esta espresion de la integral del primer miembro con la de la fórmula (6), resultará la ecuacion

$$f(p)\ldots+\Sigma(-1)^n\times\frac{d^n f(p)}{dp^n} = \Sigma(-1)^{N-1}\times\int^N f(p).dp^N+\frac{const.}{e^p}$$

y como nada restrinje la generalidad de $f(p)$, se podrá enunciar esta propiedad notable, á saber; *que la suma indefinida de una funcion cualquiera y sus coeficientes diferenciales sucesivos tomados alternativamente con signos + y —, es igual á la suma indefinida de las integrales de la misma funcion, tomadas tambien alternativamente con signos + y —, mas una cantidad constante partida por* e^p.

En virtud de la indeterminacion ó generalidad de la funcion significada por $f(p)$, ha lugar á formar la conjetura, de que el coeficiente diferencial general del órden n $\dfrac{d^n f(p)}{dp^n}$ podrá considerarse que representa el término general del mismo orden n de una serie cualquiera, y por consiguiente que si en la serie general $z=A+\Sigma A^{(n)}x^n$ se toman los valores negativos de n desde 1 en adelante, se podrá escribir la

$$z=-\Sigma A^{(-n)}.\,\frac{1}{x^n}+\varphi.x$$

que representará el mismo valor de z, siendo $\varphi.x$ una funcion constante de forma, que reemplazará la cantidad variable $const.\times e^{-p}$. Haciendo aplicacion de esta conjetura á dos ejemplos, sea primeramente

$$\frac{1}{(a+x)^m}=\frac{1}{a^m}\ldots+\Sigma(-1)^n\times\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{2.3\ldots n}\times\frac{x^n}{a^{m+n}}$$

siendo m un número entero, el coeficiente se podrá escribir de esta manera

$$\frac{1}{(a+x)^m}=\Sigma(-1)^n\times\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{2.3\ldots(m-1)}\cdot\frac{x^n}{a^{m+n}}$$

y haciendo n negativo se convertirá en

$$\Sigma(-1)^n\times\frac{(-n+1)(-n+2)\ldots(-n+m-1)}{2.3\ldots(m-1)}\times\frac{a^{n-m}}{x^n}=$$

$$=\Sigma(-1)^{n+m-1}\times\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{2.3\ldots(m-1)}\times\frac{a^{n-m}}{x^n}$$

en fin, haciendo $n-m=n'$, $n=n'+m$, se transformará en

$$(-1)^{n'+1}\times\frac{(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+m-1)}{2.3\ldots(m-1)}\times\frac{a^{n'}}{x^{m+n'}}=$$

$$=-(-1)^{n'}\times\frac{m(m+1)\ldots(m+n'-1)}{2.3\ldots n'}\times\frac{a^{n'}}{x^{m+n'}}$$

y por los principios anteriores se tendrá

$$\frac{1}{(a+x)^m}=\Sigma(-1)^{n'}\frac{m(m+1)\ldots(m+n'-1)}{2.3\ldots n'}\times\frac{a^{n'}}{x^{m+n'}}$$

que es como se ve el desarrollo de la misma funcion invertido, y en este caso particular es $\varphi.x=0$.

Sea ahora

$$l.(a+x)=l.a+\Sigma(-1)^{n+1}\times\frac{1}{n}.\frac{x^n}{a^n}$$

haciendo n negativo, el término general se transformará en

$$(-1)^n\times\frac{1}{n}.\frac{a^n}{x^n}$$

y se tendrá segun lo establecido

$$l.(a+x)=\Sigma(-1)^{n+1}.\frac{1}{n}.\frac{a^n}{x^n}+\varphi x=l.\left(1+\frac{a}{x}\right)+\varphi x$$

pero $l.\left(1+\frac{a}{x}\right)=l.(a+x)-l.x$, luego en este caso la funcion $\varphi.x=l.x$.

No se puede hacer aplicacion al término general de la serie que representa la esponencial

$$e^x=\Sigma\frac{x^n}{2.3...n}$$

porque el quebrado $\frac{1}{2.3...n}$, suponiendo ser m un número constante mayor que n, puede escribirse así $\frac{(n+1)(n+2)...m}{2.3...m}$, y se ve que desde luego que se dé á n un valor negativo igual ó mayor que 1, este quebrado se reduce siempre á 0.

Cuando en la composicion de la funcion que representa una serie ordenada por las potencias de $\frac{x}{a}$, entren las dos cantidades a y x de un modo simétrico, como sucede en los dos ejemplos que hemos puesto, y su término constante sea una funcion de a espresada por $f.(a)$,

es claro que cuando la misma serie sea ordenada por las potencias de $\frac{a}{x}$, su término constante deberá ser una funcion idéntica de x, ó tenerse $\varphi.x=f(x)$. En fin, si á una serie ordenada por las potencias de x, conocida ó no conocida que sea la funcion de que procede, corresponde un valor asignable y finito, cuando se haga en ella $x=\infty$, ó $\frac{1}{x}=0$, es tambien claro que este valor deberá ser su término constante cuando la misma serie sea ordenada por las potencias de $\frac{1}{x}$.

81. Si en la fórmula (2) se determina el valor de la espresion

$$2.3...N\Sigma P.\left[\frac{\frac{\Delta^N}{d^{\Delta^{N(i)}}t}}{\frac{\Delta^N}{dx^{\Delta^{N(i)}}}}\right]^{\Delta^{N(i)}}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^{N(i)}}\right)^{\Delta^{N(i)}}\times 2.3...\Delta^{N(i)}}$$

en el supuesto de ser N negativa, dará tambien el valor de la integral correspondiente ordenado por los coeficientes diferenciales de las funciones inmediatas sucesivas de que se forma la mediata á que dicha fórmula se refiere; mas es facil conocer que esta fórmula está refundida en la (1), porque el producto sucesivo de los factores $2.3...N'$, $2.3...N''$, &c., por los diferentes signos $\Sigma P.$, constituyen la diferencial $\frac{d^{N(i)}f(t)}{dt^{N(i)}}$ de la funcion de que se trata, referida inmediatamente á la variabilidad de t. Por consiguiente, para obtener en este caso la integral que se desea, no habrá mas que sustituir la espresion de este coeficiente diferencial dado en las fórmulas (3), (4) y (5).

Por un procedimiento análogo al empleado en el número (74) para deducir el valor de la integral de una funcion mediata formada de dos

inmediatas, en funcion de las integrales sucesivas de la una, y coeficientes diferenciales de la otra, podríamos deducir igualmente la espresion de la integral de una funcion mediata formada de tres ó mas inmediatas consecutivas. Suponiendo que sean tres, no habrá mas que sacar en la fórmula (2) el coeficiente diferencial de primer órden relativo al segundo signo $\Sigma P.$, que sería $\frac{dq}{dx}$, fuera de dicho signo, suponiéndole elevado á la potencia $N-N''$, haciendo $N'=N-N_{,}$. Verificado esto se supondrá $n=N-N_{,}-n'$, y se estraería tambien el primer coeficiente diferencial del otro signo $\Sigma P.$ elevándolo á la potencia $N-N_{,}-N_{,,}$, con lo que el número de factores que quedaria en este signo sería $N_{,,}-n'$, despues de lo cual podria atribuirse á N un valor negativo; mas el resultado que por este camino se obtendrá, será el mismo que se contiene en la fórmula (8), sustituyendo á $f(p)$ la funcion inmediata en q.

82. Si se diferencia M veces el producto pq, se tendrá

$$\frac{d^M.p.q}{dx^M}=\frac{d^Mp}{dx^M}.q+M.\frac{d^{M-1}p}{dx^{M-1}}.\frac{dq}{dx}.....$$

$$+\frac{M(M-1)...(M-N+1)}{2.3...N}\times\frac{d^{M-N}p}{dx^{M-N}}\times\frac{d^Nq}{dx^N}+\&c.$$

suponiendo en esta ecuacion M negativa, con lo cual los coeficientes diferenciales á que afecta se convierten en integrales, vendrá la formula (16); y suponiendo en ella $M=1$, dará la (17). Esta fórmula contiene la serie que se deduciria del principio de la integracion por partes, continuado indefinidamente, y dará la integral del producto cuando sean conocidas las integrales sucesivas de alguno de los factores. Como la serie representada en el segundo miembro de la fórmula (17) que se acaba de escribir carece de coeficientes numéricos que afecten sus diversos términos, se ve que la integral de uno cualquiera de estos términos, es igual á la suma de todos los restantes de la serie, y por lo

tanto puede detenerse en él, afectándolo del signo de integracion; podria pues escribirse así

$$\int p.q.dx = \int p.dx \times q - \int {}^{2}p.dx^{2} \times \frac{dq}{dx} \ldots\ldots$$

$$+(-1)^{N} \int \left[\int {}^{N}p.dx^{N} \times \frac{d^{N}q}{dx^{N}} \right] dx.$$

De aqui se infiere, que puede variarse en las operaciones sucesivas la composicion del producto de las dos funciones de que se compone cada término, haciendo que hagan parte de la una algunos factores de la otra, ó al contrario. En efecto, haciendo $\int {}^{N}p.dx^{N} = q', \frac{d^{N}q}{dx^{N}} = p'$, la integral anterior que equivale á la suma de los restantes términos de la serie, se convierte en $\int p'q'dx$, cuyo valor permanecerá el mismo aun cuando se varie la composicion de los factores p' ó q', con tal que el producto $p'q'$ no se altere.

En esta propiedad consiste el espíritu por medio del cual se emplea el procedimiento de la integracion por partes en el cálculo integral.

Tomando por ejemplo la funcion binomia $\int (a+bx^{a}).x^{m}.dx$, se tendrá el primer término de la serie $\frac{x^{m+1}}{m+1} \times (a+bx^{a})^{p}$, y la primera diferencial del binomio $(a+bx^{a})^{p}$ es $pbx(a+bx^{a})^{p-1} \times x^{a-1}$, con lo que se formará el producto $p'q'$, componiéndolo del modo siguiente

$$\int \frac{pbx.x^{m+a}}{m+1} \times (a+bx^{a})^{p-1}.dx:$$

el primer término de esta integral será

$$\frac{pb^{\alpha}.x^{m+\alpha+1}}{(m+1)(m+\alpha+1)}\times(a+b\,x^{\alpha})^{p-1},$$

y tomando nuevamente la diferencial del binomio $(a+bx^{\alpha})^{p-1}$, será $(p-1).b^{\alpha}(a+bx^{\alpha})^{p-2}.\,x^{\alpha-1}$, con lo cual se formará el segundo producto $p''q''$, que será

$$\int\frac{p(p-1).\,b^{2}\alpha^{2}.x^{m+2\alpha}}{(m+1)(m+\alpha+1)}\times(a+bx^{\alpha})^{p-2}.dx$$

y se tendrá para el primer término de esta tercera integral

$$\frac{p(p-1).b^{2}\alpha^{2}.x^{m+2\alpha+1}}{(m+1)(m+\alpha+1)(m+2\alpha+1)}\times(a+bx^{\alpha})^{p-2}:$$

continuando en tomar la diferencial de este segundo factor será $(p-2)$ $\times(a+bx^{\alpha})^{p-3}\times b^{\alpha}.x^{\alpha-1}$, y el cuarto producto $p'''\,q'''$,

$$\int\frac{p(p-1)(p-2).b^{3}.\alpha^{3}.x^{m+3\alpha}}{(m+1)(m+\alpha+1)(m+2^{\alpha}+1)}\times(a+bx^{\alpha})^{p-3}dx$$

cuyo primer término

$$\frac{p(p-1)(p-2).b^{3}\alpha^{3}.x^{m+3\alpha+1}}{(m+1)(m+\alpha+1)(m+2\alpha+1)(m+3^{\alpha}+1)}\times(a+bx^{\alpha})^{p-3}:$$

y percibiéndose con claridad los resultados de estas operaciones sucesivas, se deducirá fácilmente la espresion del término general del órden n; pudiéndose escribir la ecuacion

$$\int x^{m}.(a+bx^{\alpha})^{p}dx=\Sigma(-1)^{n}\,\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1).b^{n}.\alpha^{n}.x^{m+n\alpha+1}}{(m+1)(m+\alpha+1)\ldots(m+n\alpha+1)}\times$$
$$\times(a+bx^{\alpha})^{p-n}.$$

En lugar de detener la serie en su segundo término, pudiéramos haberla detenido en el tercero ó cuarto, &c., obteniendo distintas formas para el coeficiente; y si no la hubiéramos detenido en ningun término, tomando la serie tal cual se halla escrita, se tendria sucesivamente

$$\int x^m(a+bx^\alpha)^p.\,dx=\Sigma(-1)^N\times\frac{x^{m+N+1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+N+1)}\times\frac{d^N(a+bx^\alpha)^p}{dx^N}$$

$$\frac{d^N(a+bx^\alpha)^p}{dx^N}=\Sigma\,p(p-1)\ldots(p-n+1)\times(a+bx^\alpha)^{p-n}\times b^n.\,x^{\alpha n-N}\times$$

$$\times\Sigma\frac{(-1)^{n+k}.\alpha k(\alpha k-1)\ldots(\alpha k-N+1)}{2.3\ldots k\times 2.3\ldots(n-k)}$$

$$\int x^m(a+bx^\alpha)^p.\,dx=\Sigma\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1).b^n.x^{m+\alpha n+1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+N+1)}\times$$

$$\times\Sigma\frac{(-1)^{N+n+k}.\alpha k(\alpha k-1)\ldots(\alpha k-N+1)}{2.3\ldots k\times 2.3\ldots(n-k)}(a+bx^\alpha)^{p-n},$$

el coeficiente que multiplica en esta espresion la potencia $b^n.x^{m+\alpha n+1}\times$ $\times\,(a+bx^\alpha)^{p-n}$ es una serie indefinida, que resultará de dar á N todos los valores sucesivos imaginables cuya suma debe ser igual al coeficiente obtenido por el procedimiento anterior.

Si se hace $p=a^x$, $q=l.x$ será $\int^{N+1}a^x.dx^{N+1}=\frac{a^x}{(l.a)^{N+1}}$,

$$\frac{d^Nlx}{dx^N}=(-1)^{N-1}\times\frac{2.3\ldots(N-1)}{x^N},$$

y $\int a^x l.x.\,dx=\frac{a^x}{l.a}.l.x-\frac{a^x}{l.a}\times\Sigma\frac{2.3\ldots(N-1)}{(xl.a)^N}+const.$

Haciendo $p=l.x$, $q=a^x$ es $\int^N l.x.dx^{N+1}=\frac{x^{N+1}\times(l.x-C^{(N+1)})}{2.3...(N+1)}$,

$$\frac{d^N a^x}{dx^N}=a^x\times(l.a)^N,$$

y $$\int l.x.a^x.dx=\Sigma(-1)^N\times\frac{x^{N+1}\times(l.a)^{N+1}}{2.3...(N+1)}\times\frac{a^x.l.x}{l.a}-$$

$$-\frac{a^x}{l.a}.\ \Sigma(-1)^N\frac{x^{N+1}.(l.a)^{N+1}\times C^{(N+1)}}{2.3...(N+1)}=$$

$$=\frac{a^x l.x}{la}-\frac{lx}{l.a}-\frac{a^x}{l.a}\times\Sigma(-1)^N\times\frac{(xl.a)^{N+1}\times C^{(N+1)}}{2.3...(N+1)}+const.$$

suponiendo $a=e$, y comparando estas dos espresiones, se sacará la misma ecuacion (a) del número (77).

83. El valor de la integral obtenida en la fórmula (17) para un producto $p\,q$, tiene la misma forma que la obtenida en la fórmula (11) para la funcion mediata $f(p)$; y con efecto, si en esta se determina x en funcion de p, y luego se saca el primer coeficiente diferencial $\frac{dx}{dp}=p'$, la integral propuesta en dicha fórmula (11) se convertirá en

$$\int f(p).dx=\int f(p)p'.dp.$$

con cuya transformacion se reduce á la de un producto, que desarrollada por la fórmula (17) dará la misma serie contenida en la (11). Como la integral de este producto puede ordenarse, bien sea por las integrales sucesivas de p' y coeficientes diferenciales de fp, ó bien sea por las integrales sucesivas de esta y coeficientes diferenciales de aquella, deberá dar en el primer caso las integrales que se deducen de la fórmula (1), suponiendo $N=-1$, y en el segundo las de la fórmula (9). Comparando pues los términos generales de las espresiones deducidas por

uno y otro camino, pueden aún deducirse nuevas relaciones entre estas cantidades. Contrayéndonos primeramente á las series ordenadas por los coeficientes diferenciales $\frac{d^n f(p)}{dp^n}$, se verá fácilmente que puede establecerse desde luego la relacion

$$(-1)^n \int^n . x . d . p^n =$$

$$= \left\{ 2.3...N \Sigma P. \left[\frac{d^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}} p}{dx^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}} \right]^{\Delta^n} \times \frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n} \times 2.3...\Delta n} , N = -1 \right\}$$

que establece el valor de la cantidad que está encerrada dentro de la llave cuando $N = -1$. Si queremos determinar el valor de la misma cantidad cuando $N = -2$, haremos $\int f(p) . dx = f_{,}(x)$, $\int f(p) . p .' dp = f'(p)$, con lo que $f_{,}(x) = f'(p)$, y multiplicando ambos miembros por $dx = p' . dp$ será $f_{,}(x) . dx = f'(p) . p' . dp$, y

$$\int f_{,}(x) dx = \int^2 f(p) . dx^2 = \int f'(p) p' . d . p = \Sigma (-1)^{n'} \int^{n'} x . dp^{n'} + \frac{d^{n'} f'(p)}{dp^{n'}}$$

$$\frac{d^{n'} f'(p)}{dp^{n'}} = \frac{d^{n'-1} f(p) . p'}{dp^{n'-1}} = \Sigma \frac{(n'-1)(n'-2)...(n'-r)}{2.3...r} \times \frac{d^{n'-r-1} f(p)}{dp^{n'-r-1}} \times \frac{d^{r+1} x}{dp^{r+1}}$$

$$\int^2 f(p) dx^2 = \Sigma (-1)^{n'} \times \frac{(n'-1)(n'-2)... (n'-r)}{2.3... r} \times \int^{n'} x dp^{n'} \times$$

$$\times \frac{d^{r+1} x}{dp^{r+1}} \times \frac{d^{n'-r-1} f(p)}{dp^{n'-r-1}} + x f'(p)$$

y haciendo $n'-r-1=n$ será

$$\int^2 f(p)dx^2=\Sigma(-1)^{n+r+1}\times\frac{(n+1)(n+2)...(n+r)}{2.3...r}\times\int^{n+r+1}x.dp^{n+r+1}$$

$$\times\frac{d^{r+1}x}{dp^{r+1}}\times\frac{d^nf(p)}{dp^n}+xf'(p)$$

de donde se inferirá, escribiendo $r-1$ en vez de r

$$xf'(p)+\Sigma(-1)^{n+r}\times\frac{(n+1)(n+2)...(n+r-1)}{2.3...(r-1)}\times\int^{n+r}x.dp^{n+r}\times\frac{d^rx}{dp^r}=$$

$$=\left\{2.3...N\Sigma P.\left[\frac{d^{\frac{\Delta N}{\Delta^n}}p}{dx^{\frac{\Delta N}{\Delta^n}}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n},N=-2\right\}$$

y observando que la composicion de esta suma es idéntica á la de la fórmula (16), que contiene la integral del orden M de un producto, será por fin

$$(-1)^n\left(\int^n x.dp^n-\int^{n+1}\left(x.\frac{dx}{dp}\right).d.p^{n+1}\right)=$$

$$=\left\{2.3...N\Sigma P\left[\frac{d^{\frac{\Delta N}{\Delta P}}p}{dx^{\frac{\Delta N}{\Delta^n}}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n},N=-2\right\}(*)$$

y por este mismo órden podrian determinarse otros valores de un órden superior.

(*) Véase la adicion al final.

Por un procedimiento semejante se podria obtener la integral de un órden cualquiera del producto de que tratamos, ordenada por las integrales de $f(p)$ y coeficientes diferenciales de (x), la cual comparada con la de la fórmula (8) daria una relacion entre los coeficientes diferenciales $\frac{d^{N}x}{dp^{N}}$ y los $\frac{d.^{N}p.}{dx^{N}}$.

Tomando la integral de la funcion $\int f(a_x)dx$, que en el número (73) no nos fue posible deducir de la fórmula (4) á causa de hacerse inasignable el coeficiente numérico de esta, se tendrá, despejando (x) en (p), y sustituyendo en vez de $(d.x)$ su valor correspondiente

$$\int f(a^{x}).d.x = \int f(p) \times \frac{1}{l.a.p} \times dp,$$

y ordenando la integral de este producto por las integrales sucesivas de $\frac{1}{p}$ y coeficientes diferenciales de $f(p)$, resultará la fórmula (18); y si en la fórmula (11) se supone $p=a^{x}$, se sacará la siguiente relacion general entre los coeficientes diferenciales de una funcion cualquiera, y sus integrales sucesivas

$$\frac{1}{l.a} \Sigma \frac{2.3...(N-1)}{p^{N}} \times \int^{N} f(p).d.p^{N} + const. =$$

$$= \left[\frac{l.p}{l.a}. \Sigma(-1)^{n}p^{n} - \frac{1}{l.a} \Sigma p.^{n}C^{(n)} \right] \times \frac{1}{2.3...n} \times \frac{d^{n}f(p)}{dp^{n}}.$$

84. Para concluir las investigaciones que nos ocupan, trataremos de deducir el coeficiente general del órden N de la funcion $F.(p,q)$, en la que las cantidades p y q se suponen funciones de x, y combinadas de un modo cualquiera en la funcion de que hacen parte. Para

la mayor sencillez de los procedimientos, designaremos la funcion $F(p, q)$ simplemente por la letra F. Su primer coeficiente diferencial será

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dp} \times \frac{dp}{d.x} + \frac{dF}{d.q} \times \frac{dq}{d.x}.$$

Para deducir de este el segundo coeficiente diferencial observaremos, que las funciones representadas en $\frac{d.F}{d.p}$, $\frac{d.F}{dq}$ lo son únicamente de ambas cantidades p y q, mientras que las representadas en $\frac{dp}{dx}$, $\frac{d.q}{dx}$ lo son tan solo de x; por consiguiente la diferencial respectiva de cada uno de los términos del binomio anterior será

$$\frac{d.\left(\frac{d.F}{dp} \times \frac{dp}{dx}\right)}{d.x} = \frac{dp}{dx}\left[\frac{d^2F}{dp^2} \times \frac{dp}{dx} + \frac{d^2F}{d.p.dq} \times \frac{dq}{dx}\right] + \frac{d.F}{d.p} \times \frac{d^2p}{d.x^2}$$

$$\frac{d.\left(\frac{d.F}{dq} \times \frac{dq}{dx}\right)}{dx} = \frac{dq}{dx}\left[\frac{d^2F}{dq^2} \times \frac{dq}{dx} + \frac{d.^2F}{dq.dp} \times \frac{dq}{dx}\right] + \frac{d.F}{dq} \times \frac{d^2q}{dx^2}$$

y reuniendo ambas espresiones, teniendo presente que $\frac{d.^2F}{d.p.d.q} = \frac{d^2F}{dq.dp}$ será

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d^2F}{d.p^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \frac{dF}{d.p} \cdot \frac{d^2p}{dx^2} + 2\,\frac{d^2F}{dp.dq} \times \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dq}{dx} + \frac{d^2F}{dq^2}\left(\frac{dq}{dx}\right)^2$$

$$+ \frac{dF}{dq} \cdot \frac{d^2q}{dx^2} = \frac{d^2Fp}{dx^2} + 2\,\frac{d.\left(\frac{d.Fq}{dx} = f(p)\right)}{dx} + \frac{d^2F.q}{dx^2}$$

designando en el segundo miembro por los símbolos $\frac{d.^2 F.p}{dx^2}$, $\frac{d.^2 F.q}{dx^2}$

los coeficientes diferenciales de la funcion primitiva $F.(p,q)$ considerada respectivamente como una funcion mediata en el primer caso de p y x mirando á q como constante, y en el segundo de q y x mirando á p como constante. El término duplo intermedio indica asimismo, que se ha de tomar primero la diferencial de la funcion $F(p,q)$ con relacion á q, mirándola cono funcion mediata de esta y de x, y á p como constante, y despues se ha de diferenciar este resultado considerándolo asimismo como una funcion mediata de p y de x, y mirando á q y su primer coeficiente diferencial como constante. En general, si se toma la diferencial del orden M de una funcion cualquiera u de dos variables independientes z é y, será

$$d^M u = \Sigma \frac{M(M-1)...(M-N+1)}{2.3...N} \times \frac{d.^M u}{d.z^{M-N}.d.y^N} \times dz^{M-N}.d.y^N$$

y si ahora se supone que las variables z é y sean funciones de una tercera x, los coeficientes diferenciales parciales $\frac{d^{M-N}u}{dz^{M-N}} \times dz^{M-N}$, $\frac{d^N u}{d.y^N} \times dy^N$ obtenidos de la funcion primitiva con respecto á una de las variables mirando á la otra como constante, al tomarlos relativamente á la variable x, deberán convertirse en las espresiones que correspondan á los coeficientes diferenciales del órden respectivo de la funcion primitiva u, considerada como funcion mediata de la variable respectiva y de x, mirando á la otra como constante. En consecuencia podrá establecerse la ecuacion siguiente

$$\frac{d^M F}{d.x^M} = \Sigma \frac{M(M-1)...(M-N+1)}{2.3...N} \times \frac{d^{M-N}\left(\frac{d^N Fq}{dx^N} = f^N(p)\right)}{dx^{M-N}} ...(a)$$

esto supuesto sabemos que

$$\frac{d^N F.q}{dx^N} = 2.3...N\Sigma\frac{d.^n F}{d.q^n}\times\Sigma P\left[\frac{\frac{\triangle^N}{d\triangle^n q}}{dx^{\frac{\triangle^N}{\triangle^n}}}\right]^{\triangle^n}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\triangle^N}{\triangle^n}\right)^{\triangle^n}\times 2.3...\triangle n} \quad ...(b)$$

y como al tomar como hemos dicho la diferencial del orden $M-N$ de esta suma se han de mirar como constantes los factores $\frac{d^H q}{dx^H}$ la operacion recaerá tan solo sobre el $\frac{d^n F}{dq^n}$, y representándole por $f^n(p)$ dará

$$\frac{d^{M-N} f^n(p)}{d.p^{M-N}} = 2.3...(M-N)\Sigma\frac{d^{n'} f^n(p)}{d.p^{n'}}\times$$

$$\times\Sigma P.\left[\frac{d^{\frac{\triangle(M-N)}{\triangle^{n'}}} p}{dx^{\frac{\triangle(M-N)}{\triangle^{n'}}}}\right]^{\triangle^{n'}}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\triangle(M-N)}{\triangle^{n'}}\right)^{\triangle^{n'}}\times 2.3...\triangle n'}$$

la cantidad $\frac{d^{n'} f^n(p)}{dp^{n'}}$ equivale á $\frac{d^{n+n'} F.}{dp^{n'}.d.q^n}$, y por consiguiente la espresion del coeficiente diferencial que buscamos será la contenida en la fórmula (19), atendiendo á que el coeficiente numérico

$\frac{M(M-1)...(M-N+1)}{2.3...N}$ puede escribirse $\frac{2.3...M}{2.3...(M-N)\times 2.3...N}$,

con lo que se destruirán en el denominador y numerador los factores que multiplican los respectivos signos $\Sigma P.$, habiéndose representado al propio tiempo por $\triangle' M$, $\triangle'' M$ las cantidades $M-N$, y N, y por $\triangle' n$, $\triangle'' n$ las n, n'.

Para obtener ahora el valor de la integral, supondremos M negativa en la ecuacion (a), con lo que se convertirá en la

$$\int^{M}(F.)dx^{M}=\Sigma(-1)^{N}\times\frac{M(M+1)...(M+N-1)}{2.3...N}\times$$

$$\times\int^{M+N}\left(\frac{d^{N}F.q}{dx^{N}}=f^{n}(p)\right)dx^{M+N},$$

y sustituyendo por $\frac{d_{N}F.q}{dx^{N}}$ su espresion (b), la integracion recaerá del mismo modo que anteriormente tan solo sobre el factor $\frac{d^{n}F}{dq^{n}}=f^{n}(p)$, y será

$$\int^{M+N}f^{n}(p)dx^{M+N}=\Sigma(-1)^{N'+m}\times(M+N)(M+N+1)...$$

$$...(M+N+N'+m-1)\times\frac{\int^{M+N+N'}f^{n}(p).d.p^{M+N+N'}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^{M+N+N'+m}}\times$$

$$\times\Sigma P.\left[\frac{d^{\frac{\Delta(N'+m)}{\Delta^{m}}}p}{dx^{\frac{\Delta(N'+m)}{\Delta^{m}}}}\right]\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta(N'+m)}{\Delta^{m}}\right)^{\Delta^{m}}\times 2.3...\Delta m}$$

combinando por lo tanto esta espresion y la (b), vendrá la fórmula (20), y haciendo $M=1$, escribiendo N' por $N'+1$ la (21).

85. Procederemos ahora á aplicar la inversion de las series á la resolucion de las ecuaciones finitas. Sea una ecuacion cualquiera

$$A^{(m-1)}x^{m}+A^{(m-2)}x^{m-1}...+A'x^{2}+Ax=z$$

la fórmula de inversion (5) del capítulo 3.° dará, suponiendo $p=1$

$$x=\Sigma(-1)^n(N+1)(N+2)\ldots(N+n-1)\times\frac{1}{A^{N+n}}$$

$$\times\frac{A'^{\Delta'(N-1)}\cdot A''^{\frac{\Delta''(N-1)}{2}}\ldots A^{(m-2)\frac{\Delta^{m-2}(N-1)}{m-2}}A^{(m-1)\frac{\Delta^{m-1}(N-1)}{m-1}}}{2.3\ldots\Delta'(N-1)\times 2.3\ldots\frac{\Delta''(N-1)}{2}\ldots\times 2.3\ldots\frac{\Delta^{(m-2)}(N-1)}{m-2}\times 2.3\ldots\frac{\Delta^{(m-1)}(N-1)}{m-1}}\times z^N$$

debiendo verificarse las ecuaciones siguientes:

$$\Delta'(N-1)+\Delta''(N-1)\ldots+\Delta^{(m-2)}(N-1)+\Delta^{m-1}(N-1)=N-1$$

$$\Delta'(N-1)+\frac{\Delta''(N-1)}{2}\ldots+\frac{\Delta^{m-2}(N-1)}{m-2}+\frac{\Delta^{m-1}(N-1)}{m-1}=n$$

y si suponemos

$$\frac{\Delta'''(N-1)}{3}=p,\ \frac{\Delta^{\text{IV}}(N-1)}{4}=p'\ldots\frac{\Delta^{m-2}(N-1)}{m-2}=p^{m-3},\ \frac{\Delta^{m-1}(N-1)}{m-1}=p^{m-1},$$

despejando en ellas las cantidades $\Delta'(N-1)$, $\frac{\Delta''(N-1)}{2}$ vendrán para estas los valores siguientes:

$$\Delta'(N-1)=2n-N+1+p+2p'+3p''+\&c.$$

$$\frac{\Delta''(N-1)}{2}=N-1-n-2p-3p'-4p''-\&c.,$$

y el valor de x que antecede podrá escribirse como se halla en la fórmula (22).

Contrayéndonos primeramente á la ecuacion del segundo grado

$$A'x^2+Ax=z$$

deberemos suponer en esta fórmula (22) $p=0$, $p'=0$, $p''=0$, &c., y $N-1-n=0$ en virtud de lo cual el valor de x será el que sigue:

$$x=\Sigma(-1)^{N-1}\times(N+1)(N+2)\ldots(2N-2)\times\frac{1}{A^{2N-1}}\times\frac{A^{N-1}}{2.3\ldots(N-1)}\times z^N;$$

multiplicando y dividiendo el coeficiente numérico por $2.3\ldots N$, se convertirá en

$$\frac{2.3\ldots(2N-2)}{2.3\ldots(N-1)\times 2.3\ldots N}$$

bajo cuya forma se ve que en el numerador hay $N-1$ factores pares, de los que obteniendo la mitad, equivaldrán á los factores $2^{N-1}\times 2.3\ldots(N-1)$, de los que los últimos se destruirán con los que existen en el denominador, y por lo tanto quedará dicho coeficiente reducido á

$$\frac{1.3.5\ldots(2N-3)\times 2^{N-1}}{2.3\ldots N}$$

y el valor de x será

$$x=\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{1.3.5\ldots(2N-3)}{2.3\ldots N}\times\frac{2^{N-1}.A'^{N-1}}{A^{2N-1}}\times z^N.$$

Si resolvemos la ecuacion propuesta por las fórmulas conocidas, vendrá para el mismo valor de x el siguiente,

$$x=-\frac{A}{2A'}\pm\sqrt{\frac{A^2+4A'z}{4A'^2}}$$

y si se toma el signo superior del radical, y se desarrolla este en serie, desaparecerá el término constante independiente de z, y vendrá

$$x=\Sigma(-1)^N\times\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}+N-1\right)}{2.3\ldots N}\times$$

$$\times\frac{4^N.A'^N.z^N}{2A'\times A^2\left(N-\frac{1}{2}\right)}=\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{1.3.5\ldots(2N-3)}{2.3\ldots N}\times\frac{2^{N-1}.A'^{N-1}}{A^{2N-1}}\times z^N.$$

Vemos pues que la serie de la inversion se transforma en este caso en la del radical del segundo grado que corresponde á la ecuacion propuesta.

Si esta misma ecuacion la escribimos bajo la forma

$$\frac{z}{x^2}-\frac{A}{x}=A'$$

y la resolvemos por la fórmula (4) del mismo capítulo 3.°, teniendo presente que A hace veces de A', dará

$$x=\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{N}{2}-N+2\right)\times\frac{z^{\frac{N}{2}-N+1}}{A'^{\frac{N}{2}}}\times\frac{A^{N-1}}{2.3\ldots(N-1)}$$

$$=\Sigma-\frac{(-N+2)(-N+4)\ldots(N-4)}{2.3\ldots(N-1)\times 2^{N-1}}\times\frac{A^{N-1}}{z^{\frac{N}{2}-1}.A'^{\frac{N}{2}}},$$

Siempre que N sea par, el coeficiente numérico de esta serie se reducirá á 0, porque deberá precisamente ser 0 alguno de los factores que entren en el numerador; luego no podrán existir mas términos que aquellos en que N sea impar, y haciendo por lo tanto $N=2M+1$ vendrá en el supuesto de ser $A'=1$,

$$x=\Sigma-\frac{(-2M+1)(-2M+3)\ldots(2M-3)}{2.3\ldots2M\times2^{2M}}\times\frac{A^{2M}}{z^{\frac{2M-1}{2}}}=$$

$$=\Sigma(-1)^{M-1}\times\frac{1.3.5\ldots(2M-1)\times1.3.5\ldots(2M-3)}{2.3\ldots2M\times2^{2M}}\times\frac{A^{2M}}{z^{\frac{2M-1}{2}}},$$

multiplicando y dividiendo este último coeficiente numérico por el producto de factores pares $2.4.6\ldots2M=2.3.4\ldots M\times2^M$, se tendrá convertido en

$$\frac{2.3.4\ldots2M\times1.3.5\ldots(2M-3)}{2.3.4\ldots2M\times2.3\ldots M\times2^{3M}}=\frac{1.3.5\ldots(2M-3)}{2.3\ldots M\times2^{3M}};$$

pero el término general que corresponde al desarrollo del radical $\sqrt{z+\frac{A^2}{4}}$ ordenado por las potencias negativas de z es

$$\left(z+\frac{A^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\Sigma(-1)^M\times\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}+M-1\right)}{2.3\ldots M}\times\frac{A^{2M}}{4^M\times z^{\frac{2M-1}{2}}}$$

$$=\Sigma(-1)^{M-1}\times\frac{1.3.5\ldots(2M-3)}{2.3\ldots M\times2^{3M}}\times\frac{A^{2M}}{z^{\frac{2M-1}{2}}}$$

donde se ve que confronta del mismo modo la serie que produce el radical que da el valor de la incógnita en la ecuacion del segundo grado, con la que se obtiene de la fórmula de la inversion en este segundo caso: y que la diferencia entre la serie obtenida ahora y la que se obtuvo en el caso anterior, consiste en que esta serie viene orde-

nada por las potencias negativas de z y positivas de A, sucediendo en aquella lo contrario.

Hay un caso en que el valor de N, en la primera espresion de x, es par, y el coeficiente no se reduce á 0, que es aquel en que $N=2$; y es fácil comprobar que el término que corresponde á este supuesto se reduce á $-\frac{A}{2A'}$, que es el que debe hallarse fuera del radical.

86. Sea ahora la ecuacion del tercer grado

$$A''x^3+A'x^2+Ax=z$$

la que resuelta por la fórmula (3) á que nos referimos dará

$$x=\Sigma(-1)^n\times(N+1)(N+2)\ldots(N+n-1)\times\frac{1}{A^{N+n}}$$

$$\times\frac{A'^{2n-N+1}.\,A''^{N-1-n}}{2.3\ldots(2n-N+1)\times 2.3\ldots(N-1-n)}\times z^N$$

el término general que multiplica la potencia z^N se compone, pues, de una suma de monomios determinados por los valores que pueden asignarse á n entre los límites $2n>N-1$, y $n<N-1$. Si hacemos A' ó $A''=0$, todos aquellos términos en que entre la cantidad respectiva, elevada á un esponente positivo, se reducirán á 0, y solo subsistirá aquel término en que no entre la cantidad de que se trata, ó en el que el esponente de esta sea $=0$. Si se hace $A''=0$ se recaerá en la fórmula que corresponde al segundo grado; pero si se hace $A'=0$, se tendrá

$$2n-N+1=0,\ n=\frac{N-1}{2},\ N-1-n=\frac{N-1}{2},\ N+n=\frac{3N-1}{2}$$

y el valor de x será

$$x=\Sigma(-1)^{\frac{N-1}{2}}\times\frac{(N+1)(N+2)\ldots\left(N+\frac{N-1}{2}-1\right)}{2.3\ldots\frac{N-1}{2}}\times\frac{A''^{\frac{N-1}{2}}}{A^{\frac{3N-1}{2}}}\times z^N;$$

si hacemos ahora $\frac{N-1}{2}=M$, debiendo ser este un número entero, se tendrá

$$x=\Sigma(-1)^M\frac{(2M+2)(2M+3)\ldots 3M}{2.3\ldots M}\times\frac{A''^M}{A^{3M+1}}\times z^{2M+1}.$$

La ecuacion que se resuelve por esta serie es

$$A''x^3+Ax=z$$

que suponiendo $A''=1$, $A=p$, $z=q$, corresponde á la

$$x^3+px=q$$

puede observarse en ella que el factor $\frac{z}{A}=\frac{q}{p}$ multiplica toda la serie, y sacándole fuera del signo Σ, la serie que queda viene ordenada por las potencias ascendentes del cuociente $\frac{z^2}{A^3}=\frac{q^2}{p^3}$; si suponemos éste igual al cuadrado z'^2, dicha serie representará una funcion de esta cantidad, y siendo en este supuesto el factor estraido $\frac{q}{p}=\frac{z'\sqrt{p^3}}{p}=$ $=\sqrt{p}.\,z'$, resulta que la raiz de la ecuacion propuesta deberá ser de

la forma $x=\sqrt{p}\times f(z')$; y con efecto, si en la espresion de esta raiz, que es

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$$

se sustituye por q, $z'\sqrt{p^3}$ será (tomando solo el primer radical)

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}.z'\sqrt{p^3}+\sqrt{\frac{1}{4}z'^2.p^3+\frac{1}{27}p^3}}+\&c.=$$

$$=\sqrt{p}\times\sqrt[3]{\frac{z'}{2}+\sqrt{\frac{z'^2}{4}+\frac{1}{27}}}+\&c.$$

Si suponemos $z'=1$, la serie representará una cantidad numérica α, y la raiz será $x=\alpha\frac{q}{p}$. En efecto, la ecuacion que se refiere á este supuesto es

$$x^3+px=\sqrt{p^3}$$

y escribiendo en ella, en vez de x, $\alpha.\frac{q}{p}=\alpha.\frac{\sqrt{p^3}}{p}=\alpha.\sqrt{p}$ se transforma en

$$\alpha^3.p^{\frac{3}{2}}+\alpha p^{\frac{3}{2}}=p^{\frac{3}{2}},\text{ ó }\alpha^3+\alpha=1.$$

Cuando la ecuacion carece del último término, su forma general es

$$A'x^3+Ax^2=z,$$

y resolviéndola por la fórmula (3), en el supuesto de ser $p=2$, dará

$$x=\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)\left(\frac{N}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{N}{2}+N-2\right)}{2.3\ldots(N-1)}\times\frac{A'^{N-1}}{A^{\frac{N}{2}+N-1}}\times z^{\frac{N}{2}}=$$

$$=\Sigma(-1)^{N-1}\times\frac{(N+2)(N+4)\ldots(3N-4)}{2.3\ldots(N-1)\times 2^{N-1}}\times\frac{A'^{N-1}}{A^{\frac{3N}{2}-1}}\times z^{\frac{N}{2}},$$

ó haciendo $N-1=M$

$$x=\Sigma(-1)^{M}\times\frac{(M+3)(M+5)\ldots(3M-1)}{2.3\ldots M\times 2^{M}}\times\frac{A'^{M}}{A^{\frac{3M+1}{2}}}\times z^{\frac{M+1}{2}}$$

si en la ecuacion propuesta se hace $A'=1$, $A=p$, $z=q$, se reduce á la

$$x^3+px^2=q;$$

y si en la serie anterior se saca por factor comun la cantidad $\sqrt{\frac{z}{A}}=\sqrt{\frac{q}{p}}$, vendrá ordenada por las potencias del cuociente $\sqrt{\frac{z}{A^3}}=\sqrt{\frac{q}{p^3}}=z'$, y por lo tanto la raiz que representa será de la forma $x=p.f(z')$. Con efecto, la raiz de que se trata consta de radicales iguales al que sigue

$$-\frac{p}{3}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\frac{p^3}{27}+\sqrt{-\frac{p^3q}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\&c.$$

en los cuales, escribiendo en vez de q, $p^3z'^2$, se transforman en

$$p\left[-\frac{1}{3}+\sqrt[3]{\frac{z'^2}{2}+\frac{1}{27}+\sqrt{z'^2\left(\frac{1}{27}+\frac{z'^2}{4}\right)}}+\&c.\right]$$

Si se supone $z'=1$, la serie representará una cantidad numérica α, y la raiz será $x=\sqrt[\alpha]{\frac{q}{p}}=\sqrt[\alpha]{\frac{p^3}{p}}=\alpha.\ p.$ La ecuacion que se resuelve en este caso es

$$x^3+px^2=p^3,$$

y escribiendo en ella αp en vez de x da

$$\alpha^3p^3+\alpha^2p^3=p^3,\ \text{ó}\ \alpha^3+\alpha^2=1.$$

Si escribimos la ecuacion general del tercer grado bajo la forma

$$\frac{z}{x^3}-\frac{A}{x^2}-\frac{A'}{x}=A''$$

y la resolvemos por la fórmula (4), teniendo presente que A hace veces de A', y A' de A'', vendrá

$$x=\Sigma(-1)^n\times\frac{1}{3}\left(\frac{N}{3}-1\right)\left(\frac{N}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{N}{3}-n+1\right)\times$$

$$\times\frac{A'^{N-1-n}\ A^{2n-N+1}}{2.3\ldots(N-1-n)\times 2.3\ldots(2n-N+1)}\times\frac{z^{\frac{N}{3}-n}}{A''^{\frac{N}{3}}}$$

el mayor valor de n en esta serie es $n=N-1$, y el menor $n=\frac{N-1}{2}$,

siendo la diferencia $\frac{N}{3}-\frac{N-1}{2}=\frac{-N+3}{6}$ siempre negativa desde el tercer término en adelante. Si hacemos $3n-N=M$, será

$$N=3n-M,\ N-1-n=2n-M-1,\ 2n-N+1=M-n+1,$$

y el valor anterior de x se transformará en

$$x=\Sigma(-1)^n\times\frac{\frac{1}{3}\left(n-\frac{M}{3}-1\right)\left(n-\frac{M}{3}-2\right)\ldots\left(-\frac{M}{3}+1\right)}{2.3\ldots(2n-M-1)\times 2.3\ldots(M-n+1)}\times$$

$$\times\frac{A'^{2n-M-1}\,A^{M-n+1}}{z^{\frac{M}{3}}.\,A''^{\,n-\frac{M}{3}}}=$$

$$=\Sigma-\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{M}{3}-1\right)\left(\frac{M}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{M}{3}-n+1\right)}{2.3\ldots(2n-M-1)\times 2.3\ldots(M-n+1)}\times\frac{A'^{2n-M-1}.\,A^{M-n+1}}{z^{\frac{M}{3}}.\,A''^{\,n-\frac{M}{3}}}$$

serie que viene ordenada por las potencias negativas de z.

Otro medio hay de resolver la misma ecuacion, escribiéndola para el efecto bajo la forma

$$A''x+A'+\frac{A}{x}=\frac{z}{x^2},$$

y el valor de x será por la misma fórmula (4), haciendo $p=2$

$$x=\Sigma(-1)^n\times\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)\left(\frac{N}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{N}{2}-n+1\right)\times$$

$$\times\frac{A^{\Delta'(N-1)}\,A''^{\frac{\Delta''(N-1)}{3}}}{2.3\ldots\Delta'(N-1)\times 2.3\ldots\frac{\Delta''(N-1)}{3}}\times\frac{z^{\frac{N}{2}-n}}{A'^{\frac{N}{2}}}$$

debiendo verificarse las ecuaciones

$$\Delta'(N-1)+\frac{\Delta''(N-1)}{3}=n,\ \Delta'(N-1)+\Delta''(N-1)=N-1$$

de las que se sacará

$$\Delta'(N-1)=\frac{3n-N+1}{2},\ \frac{\Delta''(N-1)}{3}=\frac{N-1-n}{2}$$

y suponiendo $\frac{N-1-n}{2}=M$, será $\frac{3n-N+1}{2}=n-M$, y $N=2M+n+1$

con cuyos valores la serie que contiene el valor x se transforma en

$$x=\Sigma(-1)^n\times\frac{(2M+n-1)(2M+n-3)\ldots(2M-n+3)}{2.3\ldots M\times 2.3\ldots(n-M)\times 2^n}$$

$$\times\frac{A^{n-M}\,A''^{M}}{A'^{\frac{2M+n+1}{2}}}\times z^{\frac{2M-n+1}{2}}$$

no pudiendo ser $M>n$, porque el factor $\frac{1}{2.3\ldots(n-M)}$ se reduciria á 0,

el coeficiente se compondrá, por cada valor fijo que se asigne á n, de la suma de los que resulten, dándolos á M desde $M=0$ hasta $M=n$. Es de notar que la suma indefinida de todos los términos de la serie que corresponden al supuesto de $M=0$, constituyen una serie idéntica á la de la inversion del segundo grado; y así debia suceder en efecto, porque el supuesto de $A''=0$, que lleva consigo el de $M=0$, convierte la ecuacion propuesta en una del segundo grado.

Se ven, pues, por lo ya espuesto, las diferentes formas que admite el desarrollo en serie de la raiz de la ecuacion general del tercer grado, pudiendo en cada caso particular elegirse aquella que sea mas ventajosa, segun la magnitud relativa de los coeficientes de la ecuacion propuesta.

87. En general, toda ecuacion de dos términos, de la forma

$$A^{(p+h)}\,x^{p+h}+A^{(p)}\,x^{p}=z$$

dará, para el valor de x, la serie

$$x=\Sigma(-1)^{n}\times\frac{1}{p}\left(\frac{N}{p}+1\right)\left(\frac{N}{p}+2\right)\ldots\left(\frac{N}{p}+n-1\right)\times$$

$$\times\frac{A^{(p+h).\frac{N-1}{h}}}{2.3\ldots\frac{N-1}{h}}\times\frac{z^{\frac{N}{p}}}{A^{(p)\frac{N}{p}+n}}$$

en la que será $n=\dfrac{N-1}{h}=M$, $N=Mh+1$, y por consiguiente

$$x=\Sigma(-1)^{M}\frac{(Mh+p+1)(Mh+2p+1)\ldots(M(p+h)-p+1)}{2.3\ldots M\times p^{M}}\times$$

$$\times\frac{A^{(p+h)M}}{A^{(p)\frac{M(p+h)+1}{p}}}\times z^{\frac{Mh+1}{p}}$$

suponiendo $A^{(p+h)}=1$, podrá sacarse fuera del signo Σ el factor $\sqrt[p]{\dfrac{z}{A^{(p)}}}$, y la suma indicada por éste representará una funcion del cuociente $\sqrt[p]{\dfrac{z_h}{A^{(p)p+h}}}$. Esta misma ecuacion admitirá para su solucion

tres series diferentes, dividiéndola para este efecto por x^p ó por x^{p+h};

y si en vez de x se escribe $\frac{1}{x'}$, transformándose en

$$zx'^{(p+h)}-A^{(p)}\,x'^{h}=A^{(p+h)}$$

se podrán deducir otras tres series para obtener el valor de x'.

Si la ecuacion constase de tres términos, siendo por ejemplo la

$$A^{(h+h')}x^{p+h+h'}+A^{(h)}\,x^{p+h}+Ax^{p}=z$$

dará

$$x=\Sigma(-1)^n\times\frac{1}{p}\left(\frac{N}{p}+1\right)\left(\frac{N}{p}+2\right)\ldots\left(\frac{N}{p}+n-1\right)\times$$

$$\times\frac{A^{(h)\frac{\Delta'(N-1)}{h}}\times A^{(h+h')\frac{\Delta''(N-1)}{h+h'}}}{2.3\ldots\frac{\Delta'(N-1)}{h}\times 2.3\ldots\frac{\Delta''(N-1)}{h+h'}}\times\frac{z^{\frac{N}{p}}}{A^{\frac{N}{p}+n}}$$

y estableciendo las ecuaciones

$$\frac{\Delta'(N-1)}{h}+\frac{\Delta''(N-1)}{h+h'}=n,\ \Delta'(N-1)+\Delta''(N-1)=N-1$$

vendrá $\frac{\Delta'(N-1)}{h}=\frac{(h+h')n-N+1}{h'}$, $\frac{\Delta''(N-1)}{h+h'}=\frac{N-1-hn}{h'}$

y haciendo $\frac{N-1-hn}{h'}=M$ será $\frac{\Delta'(N-1)}{h}=n-M$, y $N=Mh'+nh+1$;

en fin,

$$x=\Sigma(-1)^n\times\frac{(Mh'+hn+p+1)(Mh'+hn+2p+1)\ldots(Mh'+(h+p)n-p+1)}{2.3\ldots M\times 2.3\ldots(n-M)\times p^n}\times$$

$$\times \frac{A^{(h)n-M}.\ A^{(h+h')M}.\ z^{\frac{Mh'+nh+1}{p}}}{A^{\frac{Mh'+(h+p)n+1}{p}}}$$

Otras series se obtendrian dividiendo la ecuacion dada por cada una de las potencias á que se halla elevado x.

Por último, si la ecuacion constase de mas términos, se formarian análogamente las hipótesis necesarias á fin de obtener los esponentes en números enteros.

88. Siendo genérica la forma de la serie que se ha obtenido para el valor de una de las raices de una ecuacion dada, y debiendo ser asimismo genéricas las fórmulas que contienen la espresion de todas las raices de dicha ecuacion en funcion de sus coeficientes, resulta que la serie hallada debe convenir á una sola de estas fórmulas escluyendo las demás. Esto supuesto, si la ecuacion es de grado impar, y contiene el último término en que x está elevada á la primera potencia, la serie de que nos ocupamos y fórmula que la corresponde debe dar la espresion de una raiz real de la propuesta, cuando z sea una cantidad muy pequeña; porque haciendo $z=0$ se desvanecerá del mismo modo esta raiz, y quedará para la determinacion de las restantes una ecuacion de grado par, que, como se sabe, puede resolverse en factores reales del segundo grado, y ser en ella todas las raices imaginarias. Si esto se verifica y se dan valores sucesivos á z, resultará que si por consecuencia de ellos alguna de las raices se hace real, y esta es por ejemplo $\alpha+\mathfrak{C}\sqrt{-1}$, deberá asimismo hacerse real su correspondiente $\alpha-\mathfrak{C}\sqrt{-1}$; y como ha de ser siempre impar el número de raices reales de la propuesta, resultará que la raiz dada por la serie que hemos obtenido y fórmula que la corresponda, será aquella que siempre permanece real. Esto se verifica en la ecuacion del tercer grado, de que nos hemos ocupado en el número (86), y deberá verificarse en los grados superiores. Si la ecuacion dada fuese de grado par, la raiz que se obtenga debe tambien ser real cuando z sea una cantidad pequeña, porque al desvanecerse esta

queda para obtener las restantes una ecuacion de grado impar que debe dar una raiz real, la que formará con aquella que se desvanece uno de los factores reales de segundo grado de la propuesta.

Cuando la ecuacion dada carezca del último término y solo contenga el $A'x^2$, si z se desvanece, se desvanece asimismo un factor de segundo grado, y por lo tanto la espresion de la raiz resuelta por la serie general que conviene á este caso, será la contenida en una de las fórmulas generales que den los valores de la propuesta, tal que combinada con otra de las mismas forme un factor real del segundo grado, y por consiguiente podrá ser la raiz que se obtenga en este caso imaginaria. Se percibe en efecto fácilmente, que equivaliendo el coeficiente de la primera potencia de x en toda ecuacion á la suma de los productos respectivos de todas las raices de ella menos una, este coeficiente puede subsistir aun cuando se desvanezca una raiz real por la suposicion de $z=0$, pero no puede subsistir si en este mismo supuesto se desvanece una raiz imaginaria $\alpha+\varepsilon\sqrt{-1}$, porque se desvanecerá al mismo tiempo su correspondiente $\alpha-\varepsilon\sqrt{-1}$, y por consiguiente todos los sumandos que compongan el coeficiente de que se trata serán nulos, y él mismo lo será tambien.

89. Obtenida que sea una de las raices α de la ecuacion

$$A^{(m-1)}x^m+A^{(m-2)}x^{m-1}\ldots+A'x^2+Ax-z=0$$

si se parte el primer miembro por $x-\alpha$ vendrá el cuociente

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} A^{(m-2)}x^{m-1}+A^{(m-2)} & x^{m-2}+A^{(m-3)} & x^{m-3}\ldots+A' & x+A^{\circ} \\ \quad +A^{(m-1)}\alpha & \quad +A^{(m-2)}\alpha & \quad +A''\alpha & \quad +A'\alpha \\ & \quad +A^{(m-1)}\alpha^2 & \quad \ldots\ldots & \quad \ldots\ldots \\ & & \quad +A^{(m-1)}\alpha^{m-2} & \quad +A^{(m-1)}\alpha^{m-1} \end{array}\right\}=0$$

y la resta

$$A^{(m-1)}\alpha^m+A^{(m-2)}\alpha^{m-1}\ldots+A'\alpha^2+A\alpha-z$$

la cual como α es raiz de la ecuacion, debe reducirse á 0: igualando asimismo á 0 el cuociente se formará una ecuacion de grado inme-

diatamente inferior, que resuelta, dará otra raiz de la primitiva. Llamando B el término constante, esta ecuacion podrá escribirse así

$$\Sigma A^{(N+h)}.\ \alpha^h.x^N=B,$$

y resuelta por la fórmula conocida (b) del número (65) del capítulo 5.° que precede, dará

$$x=\Sigma(-1)^n\times(N+1)(N+2)...(N+n-1)\times\frac{1}{A'^{N+n}}\times$$

$$\times\Sigma P.\frac{A^{\left[\frac{\Delta^{(N+n-1)}}{\Delta^n}+\frac{\Delta^H}{\Delta^n}\right]\Delta^n}}{2.3...\Delta n}\times\alpha^H.B^N...(a).$$

Parece á primera vista que la suma de productos indicada por el signo $\Sigma P.$ podria escribirse así,

$$\Sigma P.\frac{A^{\left(\frac{\Delta^{(N+n+H-1)}}{\Delta^n}\right)\Delta^n}}{2.3...\Delta n}$$

indicando por consiguiente en cada caso la suma de aquellos productos distintos en que la suma de los acentos de sus respectivos factores sea igual á la cantidad $N+n+H-1$, y el número de estos factores en cada producto sea igual á n: mas esto no se verifica, porque si disponemos del modo que ya nos es conocido la tabla de coeficientes ordenada por las potencias ascendentes de x y de α designadas por las letras N, h, será esta

$N=1$		$N=2$		$N=3$		$N=4$		$N=5$	
$h=1$	A''	$h=0$	A''	$h=0$	A'''	$h=0$	A^{IV}	$h=0$	A^{V}
$h=2$	A'''	$h=1$	A'''	$h=1$	A^{IV}	$h=1$	A^{V}	$h=1$	A^{VI}
$h=3$	A^{IV}	$h=2$	A^{IV}	$h=2$	A^{V}	$h=2$	A^{VI}	$h=2$	A^{VII}
$h=4$	A^{V}	$h=3$	A^{V}	$h=3$	A^{IV}	$h=3$	A^{VII}	$h=3$	A^{VIII}
$h=5$	A^{VI}	$h=4$	A^{VI}	$h=4$	A^{VII}	$h=4$	A^{VIII}	$h=4$	A^{IX}

y si ahora se verifican los productos en cruz segun las reglas dadas en el número (61) del capítulo que antecede, para formar la tabla respectiva al valor de $n=2$, ó de la suma de los dobles productos, será esta

$N=2$		$N=3$		$N=4$		$N=5$	
$h=2$	$\frac{A''^2}{2}$	$h=1$	A''^2	$h=0$	$\frac{A''^2}{2}$	$h=0$	$A'''A''$
$h=3$	$A''A'''$	$h=2$	$2A'''A''$	$h=1$	$2A'''A''$	$h=1$	$2A^{\text{IV}}A''+A'''^2$
$h=4$	$A^{\text{IV}}A''+\frac{A'''^2}{2}$	$h=3$	$2A^{\text{IV}}A''+A'''^2$	$h=2$	$2A^{\text{IV}}A''+\frac{5}{2}A'''^2$	$h=2$	$2A^{\text{V}}A''+3A^{\text{IV}}A'''$
$h=5$	$A_{\text{V}}A''+A^{\text{IV}}A'''$	$h=4$	$2A^{\text{V}}A''+2A'''A^{\text{IV}}$	$h=3$	$2A^{\text{V}}A''+3A^{\text{IV}}A'''$	$h=3$	$2A^{\text{VI}}A''+3A^{\text{V}}A'''+2A^{\text{IV}^2}$

donde se ve, que á proporcion que crece el valor de N, los dobles productos formados con las cantidades A'', A''', A^{iv}, &c. deben multiplicarse por un coeficiente particular, y lo mismo deberá suceder respecto de los triples, cuádruplos, &c. productos.

Para obtener el valor de la segunda raiz x de la ecuacion propuesta determinado en la ecuacion (a) que precede en funcion inmediata de los coeficientes A, A', A'', &c. y de z, será necesario sustituir primeramente en dicha ecuacion (a) en vez de B su espresion

$$B=-A-A'\alpha-A''\alpha^2\ldots-A^{(m-1)}\alpha^{m-1}$$

ordenando siempre la serie por las potencias ascendentes de α, y despues sustituir en vez de esta raiz su valor que ya nos es conocido, ordenado por las potencias de z. Como en el valor de B entra el término constante independiente de α, A, resultará que la serie final ordenada en z que se obtenga por el camino que acabamos de prescribir tendrá por espresion de los coeficientes que multipliquen las diversas potencias de z, series indefinidas ordenadas en A: mas si esta última cantidad fuese 0, lo que equivale á carecer la ecuacion propuesta del último término, los coeficientes de dicha serie final serán finitos, y la segunda raiz se desvanecerá del mismo modo que la primera cuando $z=0$. Si la ecuacion propuesta es de grado par, las dos raices de que tratamos, deberán pertenecer á un mismo factor real de segundo grado, porque si la raiz primitiva es real, despues de dividir la propuesta por $x-\alpha$, la ecuacion que resulte será de grado impar, y tendrá reales todos sus coeficientes; por consiguiente tendrá asimismo una raiz real, que deberá combinarse con la anterior para producir un factor tambien real del segundo grado; y como las fórmulas que contengan los valores de todas las raices de la propuesta deben como hemos dicho ser generales, y formar combinadas dos á dos factores de segundo grado, que serán reales independientemente de las magnitudes de los coeficientes, se inferirá que si las dos raices de que tratamos en circunstancias determinadas de los coeficientes forman como hemos manifestado un factor real del segundo grado por ser ellas reales, pudien-

do todas las demás ser imaginarias, será porque la combinacion de las fórmulas que las contienen produzca dicho factor real, el que deberá por tanto permanecer siéndolo en todos los casos.

90. El conocimiento de las dos raices de que acabamos de tratar en el número que precede, puede inducir á investigar la forma del factor real de segundo grado que las contiene, para cuyo efecto se tendrá presente, que si las representamos por $\alpha+\epsilon\sqrt{-1}$ y $\alpha-\epsilon\sqrt{-1}$, y las sumamos, la suma será $2\alpha=p$, y si las restamos, su diferencia será $2\epsilon\sqrt{-1}$, y representando el factor real de segundo grado que forman por

$$x^2+px+q=0$$

deberá ser $p=2\alpha$ y $q=\alpha^2+\epsilon^2$. Por consiguiente, si verificada la suma que se acaba de indicar se invierte la serie que resulte, deberá conducir á una ecuacion en p que dará el valor de esta cantidad, el cual deberá ser real segun se ha manifestado.

Debe advertirse, que cuando la ecuacion propuesta carezca del último término Ax y sea la

$$A^{(m-2)}x^m+A^{(m-3)}x^{m-1}\ldots+A'x^3+Ax^2=z$$

resolviéndola por la fórmula (3) capítulo 3.°, su término general es

$$x=\Sigma(-1)^n\times\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)\left(\frac{N}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{N}{2}+n-1\right)\times\frac{z^{\frac{N}{2}}}{A^{\frac{N}{2}+n}}\times$$

$$\times\frac{A'^{2n-N+1+p+2p'+3p''+\&c.}A''^{N-1-n-2p-3p'-4p''-\&c.}A'''^{p}A^{IV p'}A^{V p''}\times\&c.}{2.3\ldots(2n-N+1+p+2p'+3p''+\&c.)\times 2.3\ldots(N-1-n-2p-3p'-4p''-\&c.)}\times$$

$$\times\frac{1}{2.3\ldots p\times 2.3\ldots p'\times 2.3\ldots p''\times\&c.}\ldots\ldots\ (a)$$

y si el cuociente $\frac{z}{A}$ es negativo, en todos los términos en que N ten-

ga un valor impar, resultará por factor $\sqrt{-1}$, de manera que podrá dividirse la serie en dos partes distintas, la una se hallará toda ella multiplicada por $\sqrt{-1}$, y en la otra no entrará este factor. Esto induce á creer con bastante fundamento que la segunda raiz de la ecuacion propuesta que debe calcularse por los procedimientos espuestos en el número anterior, debe dar por resultado la misma serie (a) que corresponde á la primera raiz, con la diferencia de tener mudados todos los signos de los coeficientes en que N sea impar, ó que están multiplicados por $\sqrt{-1}$; de modo que si llamamos α la primera serie en que se divide la (a) correspondiente á los valores pares de N, y ϵ la segunda serie correspondiente á los valores impares, resultando el valor de x representado por $x=\alpha+\epsilon\sqrt{-1}$, la espresion del mismo valor de x en la segunda raiz será $x=\alpha-\epsilon\sqrt{-1}$. Porque aunque las series α y ϵ que emánan de la (a) pueden ser ellas mismas imaginarias, debe sin embargo inferirse que sean reales para ciertos valores de los coeficientes contenidos en determinados límites, aun cuando dentro de estos puedan variar de valor afectando una forma indeterminada; y si en estos casos el cálculo ejecutado para obtener la segunda raiz debe conducir al resultado $\alpha-\epsilon\sqrt{-1}$, al mismo conducirá en todos.

La descomposicion de una ecuacion en factores del segundo grado, ó en otros, puede hacerse directamente, segun se espone en los tratados de álgebra. Proponiéndonos por ejemplo descomponer la ecuacion de cuarto grado

$$x^4+Px^2+Qx+R=0$$

en dos factores del segundo

$$(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')=0$$

tendremos, efectuando el producto indicado, la ecuacion

$$x^4+(p+p')x^3+(q+q'+pp')x^2+(p'q+q'p)x+qq'=0,$$

y comparándola término á término con la propuesta, dará para determinar las cantidades p, p', q, q' las ecuaciones siguientes:

$$p+p'=0,\ q+q'+pp'=P,\ pq'+qp'=Q,\ qq'=R$$

de las cuales se sacará

$$p'=-p,\ q'=\frac{R}{q},\ R+q^2-p^2q=Pq,\ p(R-q^2)=Qq,$$

y multiplicando la tercera de estas por p y sumándola con la cuarta, vendrá

$$q(Pp+Q+p^3)=2Rp;$$

en fin, obteniendo en esta el valor de q, y sustituyéndole en la misma cuarta de las que preceden resultará la ecuacion final en p que sigue

$$p^6+2Pp^4+(P^2-4R)p^2-Q^2=0$$

que es del sesto grado, y puede resolverse como las del tercero.

Si se toma la ecuacion del quinto grado

$$x^5+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$$

descomponiéndola en dos factores, uno del tercero y otro del segundo grado

$$(x^3+px^2+qx+r)(x^2+p'x+q')=$$
$$=x^5+(p+p')x^4+(q+q'+pp')x^3+(pq'+p'q+r)x^2+(q'q+p'r)x+q'r=0$$

y comparando esta ecuacion término á término con la propuesta, dará para determinar las cantidades p, p', q, q', r las siguientes:

$$p+p'=0,\ q+q'+pp'=P,\ q'p+qp'+r=Q,\ q'q+p'r=R,\ q'r=S$$

sustituyendo $-p$ por p' en las cuatro últimas, y despejando en la segunda y tercera á q y q', vendrán para estas dos cantidades los valores

$$q=\frac{Pp+p^3+r-q}{2p},\ q'=\frac{Pp+p^3-r+q}{2p};$$

y en fin, sustituyendo estos en la cuarta y quinta ecuaciones vendrán dos de segundo grado en r, de las que eliminando esta cantidad, saldrá la siguiente ecuacion del décimo grado en p.

$$p^{10}+3Pp^8+Qp^7+3(P^2-R)p^6+(2PQ-3S)p^5+[P(P^2-2R)-Q^2-8S]p^4$$
$$+[Q(P^2-4R)-2SP]p^3+[R(P^2-4R)-Q(PQ-7S)]p^2+[S(P^2-4R)+Q^3]p$$
$$-S^2+PQS-Q^2R=0$$

Mas entre las investigaciones dirigidas por este camino, y las que se dirijan por la via de las series que se han dado á conocer, hay la diferencia de que no habiendo condicion ni circunstancia alguna que indique en las primeras, que el factor ó factores del segundo grado en que se descompone la ecuacion propuesta, sea mas bien uno que otro de los que pueden formarse de la combinacion de sus raices, convendrá indistintamente á cualquiera de estos, y el grado de la ecuacion que dé los valores de p y q, será igual al número de combinaciones distintas que puedan formarse con dichas raices; mientras que por el segundo camino la investigacion se dirije á encontrar la forma de un factor de segundo grado particular formado de la combinacion de dos únicas fórmulas de las raices espresadas de la propuesta.

Algunos analistas, observando la forma de las raices de las ecuaciones del segundo, tercero y cuarto grados que carecen del segundo término, han creido que las de una ecuacion cualquiera podrian componerse de la suma de un número de radicales igual al esponente de la ecuacion propuesta menos una unidad, siendo las cantidades afectadas por ellos las raices de una ecuacion reducida de grado inmediatamente inferior, ó funciones de estas. Las series que hemos dado á conocer podrian tambien auxiliar las investigaciones dirijidas en este sentido, y para ello sería necesario presuponer una ecuacion reducida cualquiera con coeficientes indeterminados, hallar despues las series que convienen al desarrollo de todas sus raices, elevar estas á la potencia ó potencias

convenientes, sumarlas, y comparar por último término á término la serie final resultante, con la que proviene del desarrollo de la raiz de la ecuacion propuesta, determinando las condiciones que deban existir para que ambas series se confundan en una sola.

91. Una serie puede representar un valor imaginario, aunque todos sus términos sean reales, cuando se componga de una suma de la forma

$$z=\varphi x+\sqrt{a+\varphi' x},$$

y el valor contenido dentro del radical sea negativo. En tal caso, si se invierte la serie obteniendo el valor

$$x=Bz+B'z^2+B''z^3+\&c.$$

deberá en este corresponder á x un valor máximo ó mínimo, pasado el cual los de z se harán imaginarios: por consiguiente, si igualamos á 0 el primer coeficiente diferencial

$$\frac{dx}{dz}=B+2B'z+3B''z^2+4B'''z^3+\&c.=0$$

y despejamos á z, deberá obtenerse para ella un valor real que corresponderá al máximo ó mínimo indicado. Pero esta última ecuacion es la misma que se establece para privar á una ecuacion cualquiera de su último término; luego si llamamos α el valor de z dado en ella, y sustituimos en la serie

$$x=Bz+B'z^2+B''z^3+\&c.$$

$z'+\alpha$ en vez de z, la nueva serie que resulte deberá carecer del primer término y ser de la forma

$$x=B_{,}z'^2+B_{,}'z'^3+B_{,}''z'^4+\&c.$$

la cual si se invierte nuevamente dará

$$z'=A_{,}x^{\frac{1}{2}}+A_{,}'x^{\frac{2}{2}}+A_{,}''x^{\frac{3}{2}}+A_{,}'''x^{\frac{4}{2}}+\&c.,$$

y viniendo esta última serie ordenada por las potencias de la raiz cuadrada de x, podrá conducir para dar á conocer el imaginario de la primitiva.

92. No dejaremos de observar, que la teoría que nos ocupa puede tambien encaminar al objeto de obtener por un medio claro y directo la ecuacion general resultante de la eliminacion entre varias de distintos grados. Sean las dos ecuaciones

$$A^{(m)}x^m+A^{(m-1)}x^{m-1}\ldots+A''x^2+A'x=z$$
$$B^{(n)}x^n+B^{(n-1)}x^{n-1}\ldots+B''x^2+B'x=u$$

en las que se supone que las cantidades $A^{(m)}$, $A^{(m-1)}\ldots A''$, A', $B^{(n)}$, $B^{(n-1)}\ldots B''$, B', z y u son funciones de otra variable y, de la forma $\Sigma f(m,h)\ y^h$, $\Sigma f(m-1,\ h)\ y^h\ldots$&c., $\Sigma F(n,h)\ y^h$, $\Sigma F(n-1,\ h)\ y^h\ldots$&c., $z=\Sigma f(0,h)\ y^h$, $u=\Sigma F(0,h)\ y^h$. Si representamos por α, ϵ, $\gamma\ldots$ &c. las raices de la primera de estas ecuaciones, y las sustituimos en la segunda, vendrán las

$$B^{(n)}{}_{\alpha}{}^n+B^{(n-1)}{}_{\alpha}{}^{n-1}\ldots+B''{}_{\alpha}{}^2+B'\alpha=u$$
$$B^{(n)}\epsilon^n+B^{(n-1)}\epsilon^{n-1}\ldots+B''\epsilon^2+B'\epsilon=u$$
$$B^{(n)}{}_{\gamma}{}^n+B^{(n-1)}{}_{\gamma}{}^{n-1}\ldots+B''{}_{\gamma}{}^2+B\gamma=u$$
$$\text{&c.,}\qquad\text{&c.,}\qquad\text{&c.,}\qquad\text{&c.}$$

debiendo tener lugar todas estas ecuaciones á la vez, se obtendrá la final que las contenga efectuando su producto. El de los primeros términos dará

$$B^{(n)n}.\ {}_{\alpha}{}^n\,\epsilon^n\,{}_{\gamma}{}^n\ldots\text{&c.}=B^{(n)n}.\ z^n.$$

Si se multiplica consecutivamente uno de los segundos términos por todos los primeros, escepto aquel que corresponda á la ecuacion en que él se encuentre, resultará, atendiendo á que las raices α, ϵ, $\gamma\ldots$ se hallan elevadas en los segundos términos á una potencia inferior en una unidad, la suma

$$B^{(n)n-1}B^{(n-1)}.\ {}_{\alpha}{}^n.\ \epsilon^n\gamma^n\ldots\text{&c.}\times\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\epsilon}+\frac{1}{\gamma}+\text{&c.}\right)=B^{(n)n-1}B^{(n-1)}.z^n.S_{(-1)},$$

designándose por el signo $S_{(-1)}$ la suma de las potencias negativas de las espresadas raices α, ϵ, γ... &c. En general es fácil percibir que si se toma un número cualquiera r de factores compuestos de los segundos términos, y se multiplica por los que restan de los primeros, se obtendrá una suma de la forma siguiente

$$B^{(n)n-r}B^{(n-1)r}\alpha^n\epsilon^n\gamma^n\ldots \&c.\times(\epsilon^{-1}.\gamma^{-1}\ldots \&c.+\alpha^{-1}\gamma^{-1}\ldots \&c.+\&c.)$$
$$=B^{(n)n-r}B^{(n-1)r}z^n.S_{(-r)}$$

representando aqui $S_{(-r)}$ la suma de todas las combinaciones distintas de las raices elevadas cada una á la potencia —1, y siendo r el número de las que entran en cada combinacion. Si de un modo análogo se toman $n-r$ factores de la primera columna, y el resto r de la columna del órden h, como en esta los esponentes de las raices tendrán h unidades menos que en aquella, la suma será de la forma

$$B^{(n)n-r}B^{(n-h)r}\alpha^n\epsilon^n\gamma^n\ldots \&c.\times(\epsilon^{-h}\gamma^{-h}\ldots\&c.+\alpha^{-h}.\gamma^{-h}\ldots\&c.+\&c.)$$
$$=B^{(n)n-r}B^{(n-h)r}.z^n.S^{(h)}_{(-r)}$$

representándose ahora por el signo $S^{(h)}_{(-r)}$ la suma análoga de todas las combinaciones de las raices elevadas cada una á la potencia $-h$, siendo r el número de las que entran en cada combinacion. En general, si se toma el producto de $n-r$ términos de la primera columna, y si una parte $\triangle' r$ de los que restan se toman de la columna del órden $n-h$, otra parte $\triangle'' r$ se toman de la columna del órden $n-h'$, y asi sucesivamente, sumando despues todas las combinaciones distintas, componiendo el numerador de cada sumando del producto $\alpha^n\epsilon^n.\gamma^n\ldots$ &c., deberán aparecer en el denominador $\triangle' r$ raices elevadas á la potencia h, $\triangle'' r$ raices elevadas á la potencia h', y asi sucesivamente; por consiguiente la espresion general de la suma de estos productos será

$$B^{(n)n-r}.B^{(n-h)\triangle' r}B^{(n-h')\triangle'' r}\ldots\&c.\times z^n\times S^{(h,h'\ldots\&c.)}_{(-\triangle' r,-\triangle'' r\ldots\&c.)}.$$

Si ninguno de los términos de la primera columna entrase en esta

combinacion, se aplicará la misma espresion que se acaba de escribir haciendo $r=n$. Solo resta pues determinar en funcion de los coeficientes $A^{(m)}$, $A^{(m-1)}...A''$, A', de la otra ecuacion la espresion de la suma indicada por el signo $S^{(h,\ h...\&c.)}_{(-\Delta' r,-\Delta'' r...\&c.)}$, y sustituirla en la que precede. En los tratados de álgebra se dan á conocer los procedimientos para obtener el valor de esta suma, y aun segun se cita en el complemento de esta ciencia *(Complement d'Algèbre)* de Mr. Lacroix, al final del número 7, pág. 12, existen fórmulas generales para obtenerle. Verificada la sustitucion de que tratamos, deberá venir por resultado final una suma simétrica de los coeficientes $A^{(m)}A^{(m-1)}...$&c. y $B^{(n)}$ $B^{(n-1)}...$&c., y escribiendo en vez de los mismos su representacion bajo la forma $\Sigma f(m-k,h).\ y^h$, $\Sigma F(n-k,h)\ y^h$ se llegaria á establecer la forma general de la ecuacion resultante de la eliminacion que nos proponemos; de modo que para aplicarla á casos particulares, solo restaria atribuir los valores respectivos á los coeficientes $f(m-k,h)$, $F(n-k,h)$, y efectuar con ellos las operaciones indicadas en la fórmula. Juzgamos de utilidad esta investigacion, porque es sabido que los procedimientos que se dirijen á este objeto son muy penosos, y casi impracticables. El método de sustitucion que se ha dado á conocer en el capítulo 5.° no es aplicable al fin de que tratamos, porque el resultado á que conducirá será el mismo que se obtendría si despejando á x en una de las ecuaciones, y obtenido su valor espresado por radicales, se sustituyesen estos en la otra ecuacion desarrollándolos en serie.

93. Para terminar las observaciones de este capítulo nos propondremos hallar la espresion del término sumatorio de varios de los que consta una progresion por diferencia, suponiendo que cada uno se encuentre elevado á una potencia determinada m. La suma que nos proponemos determinar será en general la

$$a^m+(a+\delta)^m+(a+2\delta)^m...+(a+(n-1)\delta)^m.$$

Consignando por la observacion que esta suma tiene la forma

$$A^{(m)}n^{m+1}+A^{(m-1)}.\ n^m+A^{(m-2)}.\ n^{m-1}...+A'n^2+An$$

se llegan á establecer entre los coeficientes A, A', A'', &c. las relaciones siguientes. (Véase *Complement d'Algèbre de Mr. Lacroix*, pág. 202, núm. 89.)

$$(m+1)A^{(m)}=\int^m$$

$$\frac{(m+1)m}{1.2}A^{(m)}+mA^{(m-1)}=\frac{m}{1}.\ a.\int^{m-1}$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}.\ A^{(m)}+\frac{m(m-1)}{1.2}.\ A^{(m-1)}+\frac{m-1}{1}.\ A^{(m-2)}$$

$$=\frac{m(m-1)}{1.2}.\ a^2\int^2$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}.\ A^{(m)}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.\ A^{(m-1)}+$$

$$+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A^{(m-2)}+\frac{m-2}{1}A^{(m-3)}=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3\int^3$$

.....

y en general la ecuacion siguiente, escrita bajo una forma abreviada

$$\Sigma\frac{(m-p)(m-p-1)\ldots(m-p-t+1)}{1.2.3\ldots t}.\ A^{(m-p-1)}$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-p-t+1)}{1.2.3\ldots(p+t)}.\ a^{p+t}.\ \int^{m-p-t}$$

ó bien, haciendo $p+t=k$ y $p=\triangle' k-1$, $t=\triangle'' k+1$, atendido que el menor valor de p puede descender hasta -1, y el menor de t no puede bajar de 1, la ecuacion se transformará en la

$$\Sigma\frac{(m-\triangle' k+1)(m-\triangle' k)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots(\triangle'' k+1)}.\ A^{(m-\triangle'' k)}=$$

$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}.a^k.\delta^{m-k}$$

el coeficiente $A^{(m-k)}$, en que el índice de sus acentos es inferior, corresponde en esta ecuacion al supuesto de $\triangle''k=0$, $\triangle'k=k$, y despejándole vendrá

$$\frac{m-k+1}{1}.A^{(m-k)}=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}.a^k.\delta^{m-k}-$$

$$-\Sigma\frac{(m-\triangle'k+1)(m-\triangle'k)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots(\triangle''k+1)}\times A^{(m-\triangle'k)},$$

$$A^{(m-k)}=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{1.2.3\ldots k}.\alpha^k\delta^m-$$

$$-\Sigma\frac{(m-\triangle'k+1)\,(m-\triangle'k)\ldots(m-k+2)}{1.2.3\ldots(\triangle''k+1)}.A^{(m-\triangle'k)}\ldots(a)$$

habiendo supuesto $\frac{a}{\delta}=\alpha$ para la mayor sencillez de las operaciones sucesivas. Si en esta ecuacion se sustituye en vez de los factores $A^{(m-\triangle'k)}$ su espresion dada por ella misma, resultará una nueva suma, en la que el índice de los acentos del factor que lo contenga inferior, habrá aumentado una unidad; si en la espresion que se obtenga se vuelve á sustituir por dichos factores el mismo valor dado en la ecuacion (a), el índice inferior de los acentos de los nuevos factores habrá aumentado otra unidad; y continuando sustituyendo en los mismos términos, llegarán á hacerse desaparecer los factores de que tratamos, reduciéndolos al $A^{(m)}$, cuyo valor viene dado inmediatamente en α, δ y m. Esto supuesto, el valor general del coeficiente $A^{(m-\triangle'k)}$ es

$$A^{(m-\Delta' k)}=\frac{m(m-1)\ldots(m-\Delta' k+2)}{1.2.3\ldots\Delta' k}.\ {}_{\alpha}{}^{\Delta' k}\,\delta^{m}-$$

$$-\Sigma\frac{(m-\Delta'^{2}k+1)(m-\Delta'^{2}k)\ldots(m-\Delta' k+2)}{1.2.3\ldots(\Delta''\Delta' k+1)}.\ A^{(m-\Delta'^{2}k)},$$

y sustituyendo como hemos dicho en la ecuacion (a), dará

$$A^{(m-k)}=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{1.2.3\ldots k}.\ {}_{\alpha}{}^{k}\,\delta^{m}-$$

$$-\Sigma\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{1.2.3\ldots\Delta' k\times 1.2.3\ldots(\Delta'' k+1)}\,{}_{\alpha}{}^{\Delta' k}.\ \delta^{m}+$$

$$+\Sigma\frac{(m-\Delta'^{2}k+1)(m-\Delta'^{2}k)\ldots(m-k+2)}{1.2.3\ldots(\Delta''\Delta' k+1)\times 1.2.3\ldots(\Delta'' k+1)}.\ A^{(m-\Delta'^{2}k)}$$

volviendo á sustituir, en vez del factor general $A^{(m-\Delta'^{2}k)}$, su espresion deducida de (a), y continuando asi sucesivamente, se ve desde luego que se llegará á la serie siguiente:

$$A^{(m-k)}=\delta^{m}\left\{\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{2.3\ldots k}.\ {}_{\alpha}{}^{k}-\right.$$

$$-\Sigma\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{2.3\ldots\Delta' k\times 2.3\ldots(\Delta'' k+1)}.\ {}_{\alpha}{}^{\Delta' k}+$$

$$+\Sigma\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{2.3\ldots\Delta'^{2}k\times 2.3\ldots(\Delta''\Delta' k+1)\times 2.3\ldots(\Delta'' k+1)}.\ {}_{\alpha}{}^{\Delta'^{2}k}-$$

$$\left.-\Sigma\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)\times{}_{\alpha}{}^{\Delta'^{3}k}}{2.3\ldots\Delta'^{3}k\times 2.3\ldots(\Delta''\Delta'^{2}k+1)\times 2.3\ldots(\Delta''\Delta' k+1)\times 2.3\ldots(\Delta'' k+1)}+\&c.\right\}\ (b).$$

en la cual solo restará determinar el valor de las sumas

$$S^{(1)} = \Sigma \frac{\alpha^{\Delta' k}}{2.3...\Delta' k \times 2.3...(\Delta'' k+1)},$$

$$S^{(2)} = \Sigma \frac{\alpha^{\Delta'^2 k}}{2.3...\Delta'^2 k \times 2.3...(\Delta''\Delta' k+1) \times 2.3...(\Delta'' k+1)},$$

$$S^{(3)} = \Sigma \frac{\alpha^{\Delta'^3 k}}{2.3...\Delta'^3 k \times 2.3...(\Delta''\Delta'^2 k+1) \times 2.3...(\Delta''\Delta' k+1)} \times$$

$$\times \frac{1}{2.3...(\Delta'' k+1)}.$$

El valor de $\Delta'' k$ en estas sumas no puede bajar de $\Delta'' k=1$, porque si fuese $\Delta'' k=0$ sería $\Delta' k=k$, lo cual supondria, que en el segundo miembro de la ecuacion (a) existiese el coeficiente $A^{(m-k)}$ igual al del primer miembro, y esto no se verifica por haberse este despejado: lo mismo debe entenderse respecto á las diferencias segundas, terceras, &c., $\Delta''\Delta' k$, $\Delta''\Delta'^2 k$, &c. Sin embargo, en los cálculos que vamos á emprender para determinar estas sumas supondremos primeramente, que dichas diferencias segundas, terceras, &c., pueden llegar á ser 0, y despues restaremos de las sumas que en este supuesto obtengamos los términos que produzcan los valores $\Delta''\Delta' k=1$, $\Delta''\Delta'^2 k=1$...&c., incluidos de mas en ellas. En consecuencia pues, comparando la primera $S^{(1)}$ con la

$$\Sigma \frac{\alpha^{\Delta'(k+1)}}{2.3...\Delta'(k+1) \times 2.3...\Delta''(k+1)} = \frac{(\alpha+1)^{k+1}}{2.3...(k+1)}$$

se verá fácilmente que una y otra constan de los mismos sumandos, á escepcion de que falta en aquella el término correspondiente al valor

$\Delta''(k+1)=0$, $\Delta'(k+1)=k+1$, que es $\frac{\alpha^{k+1}}{2.3...(k+1)}$; luego será

$$S^{(1)}=\frac{(\alpha+1)^{k+1}-\alpha^{k+1}}{2.3...(k+1)}.$$

Si en la segunda suma $S^{(2)}$ suponemos $\Delta' k$ constante, se verá que para cada valor determinado de esta cantidad, la suma parcial correspondiente es relativamente á $\Delta' k$ lo mismo que la suma $S^{(1)}$ es relativamente á k; luego podremos escribir

$$S^{(2)}=\Sigma\frac{(\alpha+1)^{\Delta' k+1}-\alpha^{\Delta' k+1}}{2.3...(\Delta' k+1)\times 2.3...(\Delta'' k+1)}$$

habiendo desaparecido las diferencias segundas. Esta suma se divide en dos partes, y si comparamos cada una de ellas con la general

$$\Sigma\frac{\alpha^{\Delta'(k+2)}}{2.3...\Delta'(k+2)\times 2.3...\Delta''(k+2)}=\frac{(\alpha+1)^{k+2}}{2.3...(k+2)}$$

se verá igualmente que constan de los mismos sumandos, á escepcion de los que corresponden á los supuestos $\Delta'(k+1)=0$, y $\Delta''(k+1)=0$, que son respectivamente

$$\frac{1}{2.3...(k+2)}\ \text{y}\ \frac{\alpha^{k+2}}{2.3...(k+2)};\ \text{luego tendremos}$$

$$\Sigma\frac{(\alpha+1)^{\Delta' k+1}}{2.3...(\Delta' k+1)\times 2.3...(\Delta'' k+1)}=\frac{(\alpha+2)^{k+2}-(\alpha+1)^{k+2}-1}{2.3...(k+2)}$$

$$-\Sigma\frac{\alpha^{\Delta' k+1}}{2.3...(\Delta' k+1)\times 2.3...(\Delta'' k+1)}=\frac{-(\alpha+1)^{k+2}+\alpha^{k+2}+1}{2.3...(k+2)},\qquad (d)$$

y verificando la suma de estas dos espresiones, resultará por fin el valor

$$S^{(2)}=\frac{(\alpha+2)^{k+2}-2(\alpha+1)^{k+2}+\alpha^{k+2}}{2.3...(k+2)}.$$

Pasando á la tercera suma $S^{(3)}$ se verá del mismo modo, que si se supone $\triangle' k$ constante, la suma parcial respectiva á las diferencias segundas y terceras, tiene relativamente á $\triangle' k$ la misma forma que la suma $S^{(2)}$ tiene relativamente á k; luego se podrá escribir

$$S^{(3)}=\Sigma\frac{(\alpha+2)^{\triangle' k+2}-2(\alpha+1)^{\triangle' k+2}+\alpha^{\triangle' k+2}}{2.3...(\triangle' k+2)\times 2.3...(\triangle'' k+1)}$$

comparando asimismo cada una de las tres partes de que consta esta suma, con la espresion general

$$\Sigma\frac{\alpha^{\triangle'(k+3)}}{2.3...\triangle'(k+3)\times 2.3...\triangle''(k+3)}=\frac{(\alpha+1)^{k+3}}{2.3...(k+3)}$$

se verá tambien que constan de los mismos sumandos, á escepcion de que en aquellas faltan los que corresponden á los supuestos $\triangle'(k+3)=0$, $\triangle'(k+3)=1$ y $\triangle''(k+3)=0$; luego se tendrá

$$\Sigma\frac{(\alpha+2)^{\triangle' k+2}}{2.3...(\triangle' k+2)\times 2.3...(\triangle'' k+1)}=$$

$$=\frac{(\alpha+3)^{k+3}-(\alpha+2)^{k+3}-(k+2)(\alpha+2)-1}{2.3...(k+3)},$$

$$-2\Sigma\frac{(\alpha+1)^{\triangle' k+2}}{2.3...(\triangle' k+2)\times 2.3...(\triangle'' k+1)}=\qquad (e)$$

$$=\frac{-2(\alpha+2)^{k+3}+2(\alpha+1)^{k+3}+2(k+2)(\alpha+1)+2}{2.3...(k+3)},$$

$$\Sigma\frac{{}_{\alpha}\Delta'^{k+2}}{2.3...(\Delta'k+2)\times 2.3...(\Delta''k+1)}=\frac{(\alpha+1)^{k+3}-\alpha^{k+3}-(k+2)\alpha-1}{2.3...(k+3)},$$

y sumando estas tres espresiones saldrá

$$S^{(3)}=\frac{(\alpha+3)^{k+3}-3(\alpha+2)^{k+3}+3(\alpha+1)^{k+3}-\alpha^{k+3}}{2.3...(k+3)}$$

Por los mismos razonamientos y cálculos se sacará

$$S^{(4)}=\Sigma\frac{(\alpha+3)\Delta'^{k+3}-3(\alpha+2)\Delta'^{k+3}+3(\alpha+1)\Delta'^{k+3}-{}_{\alpha}\Delta'^{k+3}}{2.3...(\Delta'k+3)\times 2.3...(\Delta''k+1)}$$

$$\Sigma\frac{(\alpha+3)\Delta'^{k+3}}{2.3...(\Delta'k+3)\times 2.3...(\Delta''k+1)}=$$

$$=\frac{(\alpha+4)^{k+4}-(\alpha+3)^{k+4}-(k+2)(k+3)(\alpha+3)^2-(k+3)(\alpha+3)-1}{2.3...(k+4)},$$

$$-3\Sigma\frac{(\alpha+2)\Delta'^{k+3}}{2.3...(\Delta'k+3)\times 2.3...(\Delta''k+1)}=$$

$$=\frac{-3(\alpha+3)^{k+4}+3(\alpha+2)^{k+4}+3(k+2)(k+3)(\alpha+2)^2+3(k+3)(\alpha+2)+3}{2.3...(k+4)},$$

$$3\Sigma\frac{(\alpha+1)\Delta'^{k+3}}{2.3...(\Delta'k+3)\times 2.3...(\Delta''k+1)}=$$

$$=\frac{3(\alpha+2)^{k+4}-3(\alpha+1)^{k+4}-3(k+2)(k+3)(\alpha+1)^2-3(k+3)(\alpha+1)-3}{2.3...(k+4)},$$

$$-\Sigma\frac{{}_{\alpha}\Delta'^{k+3}}{2.3...(\Delta'k+3)\times 2.3...(\Delta''k+1)}=$$

$$=\frac{-(\alpha+1)^{k+4}+\alpha^{k+4}+(k+2)(k+3).\alpha^2+(k+3).\alpha+1}{2.3...(k+4)}$$

$$S^{(4)}=\frac{(\alpha+4)^{k+4}-4(\alpha+3)^{k+4}+6(\alpha+2)^{k+4}-4(\alpha+1)^{k+4}+\alpha^{k+4}}{2.3...(k+4)},$$

percibiéndose ya la ley de estos resultados, podrá establecerse la ecuacion general

$$S^{(r)}=\frac{(\alpha+r)^{k+r}-r(\alpha+r-1)^{k+r}+\frac{r(r-1)}{2}(\alpha+r-2)^{k+r}-\&c.}{2.3...(k+r)}=$$

$$=\Sigma\frac{(-1)^s\times r(r-1)...(r-s+1)}{2.3...s\times 2.3...(k+r)}\times(\alpha+r-s)^{k+r}...(c).$$

Tratemos ahora de determinar las cantidades que se han de sustraer de estas espresiones por causa de los términos que contienen de mas, relativos á los valores $\Delta''k=0$, $\Delta''\Delta'k=0$, &c., los cuales son los segundos de los que componen las potencias respectivas

$$\Sigma\frac{{}_{\alpha}\Delta'^{k+1}}{2.3...\Delta'k\times 2.3...(\Delta''k+1)},\ \Sigma\frac{{}_{\alpha}\Delta'^{2k+1}}{2.3...\Delta'^2k.2.3...(\Delta''\Delta'k+1)},\ \&c.$$

y por tanto su valor será en general de la forma $-\frac{\alpha^k}{2.3...k},\frac{{}_{\alpha}\Delta'^k}{2.3..\Delta'k},\ \&c.$

En consecuencia, pues, la resta que deberemos sustraer de la primera suma $S^{(1)}$, será

$$-R^{(1)}=-\frac{\alpha^k}{2.3...k}=-S^{(0)}.$$

Para hallar la que deberemos sustraer de la suma $S^{(2)}$, observaremos, que para determinar ésta, supusimos $\triangle' k$ constante, y obtuvimos de este modo una primera suma $S^{(1)}$ relativamente á $\triangle' k$, que indicaremos por el signo $S^{(1)}_{(\triangle' k)}$, la cual combinamos despues con el factor $\frac{1}{2.3...(\triangle'' k+1)}$ para obtener la total; esto supuesto, dicha primera suma nos dará tambien la resta relativa á $\triangle' k$, $-R^{(1)}_{(\triangle' k)}=-S^{(0)}_{(\triangle' k)}$, y combinándola igualmente con el factor mencionado dará la suma

$$-\Sigma\frac{S^{(0)}_{(\triangle' k)}}{2.3...(\triangle'' k+1)}=-\frac{\alpha\triangle' k}{2.3...\triangle' k\times 2.3...(\triangle'' k+1)}=$$

$$=-S^{(1)}+R^{(1)}=-S^{(1)}+S^{(0)}$$

además, en cada una de las sumas parciales (d) que verificamos para obtener la de que se trata, deberemos asimismo sustraer el segundo término relativo á $\triangle'' k=0$, lo cual producirá dos términos que compondrán precisamente la misma suma $S^{(1)}$. Esta operacion la indicaremos asi:

$$-R\left[\Sigma\frac{S^{(1)}_{(\triangle' k)}}{2.3...(\triangle'' k+1)}\right]=-S^{(1)}$$

sumando ahora esta espresion con la anterior, vendrá la resta total que buscamos, que será

$$-R^{(2)}=-2S^{(1)}+S^{(0)}.$$

Para obtener la tercera resta observaremos de la misma manera, que

la suma $S^{(2)}$ que obtuvimos relativamente á $\triangle' k$ deberá producir una resta igual á la que acabamos de hallar con relacion á esta cantidad; será pues

$$-R^{(2)}_{(\triangle' k)} = -2S^{(1)}_{(\triangle' k)} + S^{(0)}_{(\triangle' k)}$$

esta deberemos combinarla con el factor $\frac{1}{2.3(\triangle'' k+1)}$ para obtener la suma que produce, y además cada una de las tres sumas (e) que verificamos para formar la total $S^{(3)}$ deberá producir un término, cuyo conjunto compondrá, como es facil ver, el valor $S^{(2)}$; luego la resta total que buscamos vendrá espresada por

$$-R^{(3)} = -R\left[\Sigma \frac{S^{(2)}_{(\triangle' k)}}{2.3...(\triangle'' k+1)}\right] - \Sigma \frac{R^{(2)}_{(\triangle' k)}}{2.3...(\triangle'' k+1)}$$

$$= -S^{(2)} - 2\Sigma \frac{S^{(1)}_{(\triangle' k)}}{2.3...(\triangle'' k+1)} + \Sigma \frac{S^{(0)}_{(\triangle' k)}}{2.3...(\triangle'' k+1)} ...(f).$$

Como al verificar la suma $\Sigma \frac{S^{(1)}_{(\triangle' k)}}{2.3...(\triangle'' k+1)}$ contenida en los sumandos (e) debemos sustraer en cada uno el segundo término de la potencia respectiva, cuyo conjunto forma como hemos visto la misma suma $S^{(1)}$, y esta observacion es general cualquiera que sea el órden de esta suma, podemos establecer la ecuacion genérica

$$\Sigma \frac{S^{(h)}_{(\triangle' k)}}{2.3...(\triangle'' k+1)} = S^{(h+1)} - S^{(h)} .....(g)$$

y en virtud de ella la (f) se transformará en

$$-R^{(3)}=-3S^{(2)}+3S^{(1)}-S^{(0)}.$$

Por raciocinios enteramente conformes estableceremos, que la resta $R^{(4)}$ tiene por espresion

$$-R^{(4)}=-R\left[\Sigma\frac{S^{(3)}_{(\Delta'k)}}{2.3...(\Delta''k+1)}\right]-\Sigma\frac{R^{(3)}_{(\Delta'k)}}{2.3...(\Delta''k+1)}=$$

$$=-S^{(3)}-3\Sigma\frac{S^{(2)}_{(\Delta'k)}}{2.3...(\Delta''k+1)}+3\Sigma\frac{S^{(1)}_{(\Delta'k)}}{2.3...(\Delta''k+1)}-\Sigma\frac{S^{(0)}_{(\Delta'k)}}{2.3...(\Delta''k+1)}$$

la cual se transforma en virtud de la misma ecuacion general (g) en

$$-R^{(4)}=-4S^{(3)}+6S^{(2)}-4S^{(1)}+S^{(0)}$$

Continuando los cálculos se verá fácilmente que estas espresiones de las restas siguen una ley análoga á la de las potencias del binomio, y se podrá por consiguiente escribir la general

$$-R^{(r)}=-rS^{(r-1)}+\frac{r(r-1)}{2}.S^{(r-2)}...+(-1)^{r-1}\times rS^{(1)}+(-1)^r.S^{(0)}.$$

Determinados ya los valores, que en la serie general (b) corresponden á las sumas indicadas en sus diversos términos, sustituyéndolos en ella quedará transformada en la siguiente

$$A^{(m-k)}=\Delta^m\times m(m-1)...(m-k+2)\times$$

$$\times\{S^{(0)}-(S^{(1)}-S^{(0)})+(S^{(2)}-R^{(2)})...+(-1)^r(S^{(r)}-R^{(r)})+\&c.\},$$

y en fin, poniendo en esta en vez de las restas $R^{(r)}$ los suyos respectivos, se observará que las diferentes cantidades $S^{(k)}$ de que estos se

componen, se suman entre sí. Teniendo presente que en la serie primitiva (a) existe un término conocido, siendo el coeficiente desconocido de órden inferior el $A^{(m-k+1)}$; que en la serie que proviene de la primera sustitucion hay dos términos constantes ó conocidos, y el coeficiente mas inferior es el $A^{(m-k+2)}$; y en fin, que por cada sustitucion se aumenta un término conocido y una unidad al órden del coeficiente inferior $A^{(m-k+r)}$, resulta que como este no puede pasar del $A^{(m)}$, cuyo valor es dado ya en funcion de m, δ y a, los términos de que conste la serie definitiva cuando se hayan hecho desaparecer todos los coeficientes desconocidos, no podrán esceder del número $k+1$. En consecuencia, la suma $S^{(0)}$, cuyo coeficiente en las diversas espresiones de R es 1, vendrá multiplicada por el número

$$S^{(0)}\times(1+1+1\ldots+\&c.=k+1).$$

La suma $S^{(1)}$, cuyo coeficiente en las diversas espresiones de $R^{(r)}$ es en general r, vendrá multiplicada por la suma de los números naturales; y como no aparece sino desde el segundo término en adelante de la serie hallada, será

$$-S^{(1)}\times(1+2+3\ldots+k)=-\frac{k(k+1)}{2}.\ S^{(1)}.$$

La suma $S^{(2)}$ en las referidas espresiones de $R^{(r)}$, tiene por coeficiente los números que corresponden á los terceros términos de las potencias del binomio, y como aparece desde el tercer término en adelante de la serie hallada, su coeficiente total será

$$S^{(2)}\times\left(1+\frac{3.2}{2}+\frac{4.3}{2}\ldots+\frac{k(k-1)}{2}\right)=\frac{(k+1)k(k-1)}{2.3}.\ S^{(2)}$$

en fin, continuando estas consideraciones, se verá que el coeficiente de la suma $S^{(r)}$ es

$$(-1)^r.S^{(r)}\times\left(1...+\frac{h(h-1)...(h-r+1)}{2.3...r}...+\frac{k(k-1)...(k-r+1)}{2.3...r}\right)=$$

$$=(-1)^r\times\frac{(k+1)k(k-1)...(k-r+1)}{2.3...(r+1)}.S^{(r)}.$$

En consecuencia la serie deducida anteriormente se transforma en la que sigue

$$A^{(m-k)}=\delta^m\times m(m-1)...(m-k+2)\times$$

$$\times\Sigma(-1)^r\times\frac{(k+1)k(k-1)...(k-r+1)}{2.3...(r+1)}\times S^{(r)},$$

y sustituyendo en esta por $S^{(r)}$ su valor general hallado en (c), será

$$A^{(m-k)}=\delta^m\times m(m-1)...(m-k+2)\times$$

$$\times\Sigma(-1)^{r+s}\times\frac{(k+1)k(k-1)...(k-r+1)\times r(r-1)...(r-s+1)}{2.3...(r+1)\times 2.3...(k+r)\times 2.3...s}\times(\alpha+r-s)^{k+r}$$

en fin, desarrollando la potencia $(\alpha+r-s)^{k+r}$, y escribiendo por α su igual $\frac{a}{\delta}$, se tiene

$$(\alpha+r-s)^{k+r}=\Sigma\frac{(k+r)(k+r-1)...(k+r-p+1)}{2.3...p}\times(r-s)^p\times\left(\frac{a}{\delta}\right)^{k+r-p},$$

y sustituyendo esta espresion, advirtiendo que en el numerador y denominador se destruirán los factores $(k+r)(k+r-1)...(k+r-p+1)$, vendrá por último

$$A^{(m-k)}=\Sigma(-1)^{r+s}\times\frac{m(m-1)...(m-k+2)}{2.3...(k+r-p)}\times$$

$$\times\frac{(k+1)k(k-1)...(k-r+1)\times r(r-1)...(r-s+1)}{2.3...(r+1)\times 23...p\times 2.3...s}\times(r-s)^p.a^{k+r-p}\delta^{m-k-r+p}.$$

y haciendo en esta espresion $p-r=N$, vendrá la contenida en la fórmula (23). Debe tenerse presente para hacer uso de esta fórmula, que en el caso particular de $N=0$, $r=0$, la suma

$$r^{N+r}-r(r-1)^{N+r}+\frac{r(r-1)}{2}(r-2)^{N+r}-\&c.$$

que aparece en el numerador del coeficiente, y toma la forma 0°, es igual á la unidad.

94. Podemos tambien determinar otra espresion de la suma que nos hemos propuesto, partiendo de la ecuacion conocida

$$l^m-a^m=\frac{m}{1}\delta(S_{m-1}-l^{m-1})+\frac{m(m-1)}{2}\delta^2(S_{m-2}-l^{m-2})+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\delta^3(S_{m-3}-l^{m-3})+\&c.$$

en la cual l representa el último término de la progresion $a+(n-1)\delta$, y las cantidades S_{m-1}, S_{m-2}, &c. las sumas de los términos de esta elevados respectivamente á las potencias $m-1$, $m-2$, &c. Efectuando la multiplicacion de los binomios de que consta el segundo miembro de la ecuacion precedente, y pasando al primer miembro todos los términos que contienen á l, vendrá la ecuacion siguiente:

$$m\delta S_{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}\delta^2S_{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\delta^3S_{m-3}+\&c.=(l+\delta)^m-a^m$$

de la cual se inferirá, escribiéndola bajo una forma abreviada, la que sigue:

$$S_m = \frac{(l+\delta)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1).\delta} - \Sigma \frac{m(m-1)\ldots(m-N+1)}{2.3\ldots(N+1)} . \delta^N . S_{m-N} \qquad (h).$$

siguiendo el mismo camino que en el caso anterior, tendremos sucesivamente

$$S_{m-N} = \frac{(l+\delta)^{m-N+1} - a^{m-N+1}}{(m-N+1)\delta} -$$

$$- \Sigma \frac{(m-N)(m-N-1)\ldots(m-N-N'+1)}{2.3\ldots(N'+1)} \delta^{N'} . S_{m-N-N'} \qquad (h')$$

$$S_m = \frac{(l+\delta)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\delta} - \Sigma \frac{m(m-1)\ldots(m-N+2)}{2.3\ldots(N+1)} \delta^{N-1} [(l+\delta)^{m-N+1} - a^{m-N+1}] +$$

$$+ \Sigma \frac{m(m-1)\ldots(m-N+1)}{2.3\ldots(\triangle' N+1) \times 2.3\ldots(\triangle'' N+1)} . \delta^N . S_{m-N};$$

habiéndose representado en el tercer término la suma $N+N'$ por N, y cada uno de los sumandos que la componen respectivamente por $\triangle' N$, $\triangle'' N$. Continuando las sustituciones sucesivas, es fácil comprobar que se llegará á la serie siguiente:

$$S_m = \frac{(l+\delta)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\delta} -$$

$$- \Sigma m(m-1)\ldots(m-N+2) . \delta^{N-1} [(l+\delta)^{m-N+1} - a^{m-N+1}] \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2.3\ldots(N+1)} - \Sigma \frac{1}{2.3\ldots(\triangle' N+1) \times 2.3\ldots(\triangle'' N+1)} + \right.$$

$$\left. + \Sigma \frac{1}{2.3\ldots(\triangle' N+1) \times 2.3\ldots(\triangle'' N+1) \times 2.3\ldots(\triangle''' N+1)} - \&c. \right\} \qquad (i)$$

obteniendo ahora las diferentes sumas contenidas en esta llave, se determinará el coeficiente numérico que multiplica la potencia respectiva. Debemos observar para este efecto, que el mínimo valor de cada una de las diferencias $\triangle' N$, $\triangle'' N$, &c. que entran en ellas, no puede bajar de la unidad, porque en la ecuacion de sustitucion (h') que precede, el órden superior de la suma S_{m-N} del primer miembro es S_{m-1}, y el órden superior de las sumas análogas contenidas en el segundo miembro no puede tampoco esceder de S_{m-N-1}; y por tanto, el menor valor de las cantidades N y N' reemplazadas despues por las $\triangle' N$, $\triangle'' N$ es la unidad, cuya observacion se estiende á las demás sustituciones consecutivas. Sin embargo, siguiendo el mismo órden que en el caso resuelto anteriormente, determinaremos primero estas sumas, considerando que las referidas diferencias $\triangle' N$, $\triangle'' N$, &c. pueden tener el valor 0, y despues restaremos las sumas de términos que produzcan los valores 1 de las mismas diferencias. Bajo este concepto, comparando la primera suma

$$\Sigma \frac{1}{2.3...(\triangle' N+1)\times 2.3...(\triangle'' N+1)}$$

con la conocida

$$\Sigma \frac{1}{2.3...\triangle'(N+1)\times 2.3...\triangle''(N+1)} = \frac{2^{N+2}}{2.3...(N+2)}$$

se ve que una y otra constan de los mismos sumandos, á escepcion de que en aquella faltan el primero y último término; luego será

$$S^{(2)} = \Sigma \frac{1}{2.3...(\triangle' N+1)\times 2.3...(\triangle'' N+1)} = \frac{2^{N+2}-2}{2.3...(N+2)}$$

Si en la tercera suma suponemos $\triangle' N$ constante, y representamos por $\triangle_{,} N$ la suma de las otras dos diferencias $\triangle'' N+\triangle''' N$, se verá que, por cada valor determinado de $\triangle' N$, la suma relativa á estas es

idéntica á la que antecede, con la diferencia de sustituir $\triangle_{,}N$ en vez de N; luego es

$$S^{(3)}=\Sigma\frac{S^{(2)}_{(\triangle_{,}N)}}{2.3\ldots(\triangle'N+1)}=\Sigma\frac{2\triangle_{,}N+2-2}{2.3\ldots(\triangle_{,}N+2)\times 2.3\ldots(\triangle'N+1)}$$

adoptando los mismos símbolos que en el problema anterior. Comparando asimismo la primera parte de esta suma con la

$$\Sigma\frac{2(\triangle_{,}N+3)}{2.3\ldots\triangle_{,}(N+3)\times 2.3\ldots\triangle'(N+3)}=\frac{3^{N+3}}{2.3\ldots(N+3)}$$

se verá igualmente que una y otra constan de los mismos sumandos, á escepcion de que en aquella hay tres menos, que corresponden á los valores $\triangle_{,}(N+3)=0$, $\triangle_{,}(N+3)=1$ y $\triangle'(N+3)=0$. Se tendrá, pues, en consecuencia

$$\Sigma\frac{2\triangle_{,}N+2}{2.3\ldots(\triangle_{,}N+2)\times 2.3\ldots(\triangle'N+1)}=$$

$$=\frac{3^{N+3}}{2.3\ldots(N+3)}-\frac{2^{N+3}}{2.3\ldots(N+3)}-\frac{2}{2.3\ldots(N+2)}-\frac{1}{2.3\ldots(N+3)}$$

y análogamente

$$-2\Sigma\frac{1}{2.3\ldots(\triangle_{,}N+2)\times 2.3\ldots(\triangle'N+1)}=$$

$$-2\times\frac{2^{N+3}}{2.3\ldots(N+3)}+2\times\frac{1}{2.3\ldots(N+3)}+2\times\frac{1}{2.3\ldots(N+2)}+2\times\frac{1}{2.3\ldots(N+3)}$$

sumando estas dos espresiones, vendrá la suma que buscamos

$$S^{(3)}=\frac{3^{N+3}-3\times 2^{N+3}+3}{2.3...(N+3)}.$$

Por raciocinios análogos deduciremos que la suma $S^{(4)}$ tiene por espresion

$$S^{(4)}=\Sigma\frac{S^{(3)}_{(\Delta' N)}}{2.3...(\Delta' N+1)}=\frac{4^{N+4}-4\times 3^{N+4}+6\times 2^{N+4}-4}{2.3...(N+4)}$$

y en general llegaríamos á inferir para la $S^{(r)}$ la siguiente

$$S^{(r)}=\frac{r^{N+r}-r(r-1)^{N+r}+\frac{r(r-1)}{2}.(r-2)^{N+r}-\&c.}{2.3...(N+r)}.$$

Podíamos haber previsto desde luego este resultado, porque la espresion general

$$S^{(r)}=\Sigma\frac{1}{2.3...(\Delta' N+1)\times 2.3...(\Delta'' N+1)\times...\&c.}$$

en que se supone que el número de diferencias que entran en el denominador es r, y que cada una de estas puede tomar sucesivamente todos los valores que le caben, no es otra cosa que la significada por el símbolo

$$2.3...r\times\Sigma P\frac{1}{\left(2.3...\left(\frac{\Delta N}{\Delta r}+1\right)\right)^{\Delta r}\times 2.3...\Delta r}=$$

$$=2.3...r\times\Sigma P\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta(N+r)}{\Delta r}\right)^{\Delta r}\times 2.3...\Delta r}.....(j).$$

y como las diferencias $\triangle N$ pueden descender hasta ser iguales á 0, los cuocientes $\frac{\triangle(N+r)}{\triangle r}$ podrán descender hasta ser iguales á 1; por consiguiente, haciendo $N+r=M$, la espresion que antecede representa el término general del órden M de la funcion desarrollada en serie

$$(e^x-1)^r=\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\&c.\right]^r$$

el que como sabemos tiene la forma deducida anteriormente para el valor de $S^{(r)}$. Dividiendo ambos miembros de esta ecuacion por x^r, la espresion hallada representará el término general del órden N de la funcion

$$\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^r=\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.3}\cdots+\frac{x^h}{2.3\ldots(h+1)}+\&c.\right]^r$$

teniendo en cuenta que en el signo $\Sigma P.$ entra en combinacion el factor constante designado en general por el símbolo A°.

Establecida la observacion que se acaba de hacer, puede deducirse desde luego el valor de la resta general $R^{(r)}$, que debe sustraerse de la espresion de $S^{(r)}$ por causa de los valores $\triangle' N=1$, $\triangle'' N=1$, &c. que se han incluido de mas en ella. En efecto, cuando en la espresion (j) que precede se suponga que las diferencias $\triangle N$ no pueden descender hasta 0, los cuocientes $\frac{\triangle N}{\triangle r}$ no podrán bajar de la unidad, y la espresion representará en tal caso el término general de la potencia r de la serie siguiente:

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.3}\cdots+\frac{x^h}{2.3\ldots(h+1)}+\&c.\right)^r=\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)^r=$$

$$=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^r-r\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{r-2}-\&c.$$

el cual se compondrá de la suma de los términos generales que corresponden á las funciones del tercer miembro, multiplicados por sus respectivos coeficientes. Por consiguiente se tendrá

$$-R^{(r)}=-rS^{(r-1)}+\frac{r(r-1)}{2}.\ S^{(r-2)}...+(-1)^{r-1}\times rS^{(1)}+(-1)^r.\ S^{(0)}.$$

Ahora bien, la serie (i) equivale á la

$$S_m=\frac{(l+\delta)^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)\delta}-\Sigma m(m-1)...(m-N+1)\times$$

$$\times\delta^{N-1}[(l+\delta)^{m-N+1}-a^{m-N+1}]\times$$

$$\times\{(S^{(1)}-S^{(0)})-(S^{(2)}-R^{(2)})...+(-1)^{r+1}(S^{(r)}-R^{(r)})+\&c.]$$

debiendo advertirse que el valor $S^{(0)}$ es en general nulo, mientras N conserve un valor cualquiera, pero equivale á la unidad cuando $N=0$, cuyo supuesto corresponde al primer término de esta serie. El número de sumandos comprendidos en la llave de esta misma espresion, ó bien el número de sumas comprendidas en la llave de la (i), debe ser igual á N, porque la última de estas sumas será aquella en que todas las diferencias $\triangle'N$, $\triangle''N$, &c. sean iguales á la unidad; por consiguiente deduciremos de un modo semejante al del teorema antecedente, que los coeficientes de $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, &c., serán

$$S^{(1)}\times(1+2+3...+N)=S^{(1)}\times\frac{(N+1)N}{2}-$$

$$-S^{(2)}\times\left(1-\frac{3.2}{2}+\frac{4.3}{2}\ldots+\frac{N(N-1)}{2}\right)=-S^{(2)}\times\frac{(N+1)N(N-1)}{2.3}$$

. . . . . .

$$(-1)^{r+1}S^{(r)}\times\left(1\ldots+\frac{h(h-1)\ldots(h-r+1)}{2.3\ldots r}\ldots+\frac{N(N-1)\ldots(N-r+1)}{2.3\ldots r}\right)=$$

$$(-1)^{r+1}S^{(r)}\times\frac{(N+1)N(N-1)\ldots(N-r+1)}{2.3\ldots r}$$

Sustituyendo pues, en la serie que precede, estos sumandos, y en vez de las sumas $S^{(r)}$ que entran en ellos, su valor general determinado antes, vendrá la fórmula (24).

Si en esta fórmula se desarrolla la potencia á que viene elevado el binomio $a+n^{\delta}$, se tendrá

$$\delta^{N-1}(a+n^{\delta})^{m-N+1}=\Sigma^{p}\frac{(m-N+1)(m-N)\ldots(m-N-p+2)}{2.3\ldots p}\times$$

$$\times n^{m-N-p+1}\,\delta^{m-p}.\,a^{p}$$

cuya espresion, sustituida en la fórmula, haciendo $p=k-N$, dará el valor del coeficiente $A^{(m-k)}$, que multiplica la potencia n^{m-k+1}, escrito en la fórmula (23′). Es notable que, comparando este valor del coeficiente que acabamos de escribir en la fórmula (23′), con el de la fórmula (23) deducida en el número anterior, hay entre ellos la diferencia de que los factores $(N+1)N(N-1)\ldots(N-r+1)$ que aparecen en el segundo signo Σ de la primera de dichas fórmulas, son en la otra $(k+1)k(k-1)\ldots(k-r+1)$, lo cual produce la ecuacion siguiente

$$\Sigma^{k>N}(-1)^{r}\times\frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-r+1)}{2.3\ldots(r+1)}\times$$

$$\times\frac{r^{N+r}-r(r-1)^{N+r}+\frac{r(r-1)}{2}(r-2)^{N+r}-\&c.}{2.3...(N+r)}=$$

$$=\Sigma(-1)^r\times\frac{(N+1)N(N-1)...(N-r+1)}{2.3...(r+1)}\times$$

$$\times\frac{r^{N+r}-r(r-1)^{N+r}+\frac{r(r-1)}{2}(r-2)^{N+r}-\&c.}{2.3...(N+r)}$$

Esta ecuacion manifiesta que cualquier valor que se asigne á k, siempre que sea $>N$, efectuando las operaciones indicadas en el primer miembro, se ha de obtener un resultado constante é igual al producido por las operaciones indicadas en el segundo miembro, ó bien, que si en ella se despejase á k, se obtendria un valor indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ con la condicion de ser $>N$. Bajo este concepto la fórmula (23′) es mas ventajosa para el cálculo que la (23), porque es en ella menor el número de los sumandos.

Si en la fórmula (24) se supone $a=1$, $\delta=1$, sabiéndose *à priori* que la espresion debe ser divisible por $n+1$, y no entrando n en la suma relativa á las potencias a^{m-N+1}, deberá ésta ser nula en el caso particular de que tratamos, y en consecuencia convendrá á él la fórmula (25), y se tendrá la ecuacion siguiente, teniendo presente que N no puede esceder de m.

$$\Sigma_{N=0}^{N=m}(-1)^r\times m(m-1)...(m-N+2)\times\frac{(N+1)N(N-1)...(N-r+1)}{2.3...(r+1)}$$

$$\times\frac{r^{N+r}-r(r-1)^{N+r}+\frac{r(r-1)}{2}(r-2)^{N+r}-\&c.}{2.3...(N+r)}=0$$

95. En la solucion que acabamos de dar á la cuestion tratada en los dos números que anteceden, hemos supuesto que se tiene en general

$$1...+\frac{h(h-1)...(h-r+1)}{2.3...r}...+\frac{N(N-1)...(N-r+1)}{2.3...(r+1)}=$$

$$=\frac{(N+1)N(N-1)...(N-r+1)}{2.3...(r+1)}$$

cuya propiedad en algunos tratados de álgebra se deduce de la misma cuestion principal, que fue nuestro objeto resolver; con el fin de salvar este inconveniente vamos á deducir directamente la ecuacion que precede, estableciendo para este efecto la serie conocida

$$(1-x)^{-m}=1+mx+\frac{m(m+1)}{2}x^2...+\frac{m(m+1)...(m+N-1)}{2.3...N}.x^N+\&c.$$

la cual, multiplicándola por $(1-x)^{-1}$, dará

$$(1-x)^{-m-1}=1+(m+1)x+\frac{(m+1)(m+2)}{2}x^2.....$$

$$+\frac{(m+1)(m+2)...(m+N)}{2.3...N}\times x^N+\&c.=\left\{1+mx+\frac{m(m+1)}{2}x^2...\right.$$

$$\left.+\frac{m(m+1)...(m+N-1)}{2.3...N}\times x^N+\&c.\right\}\left(1+x+x^2+x^3+\&c.\right)$$

efectuando la multiplicacion indicada en el tercer miembro de esta igualdad, y comparando el término general que produce con el del segundo, será

$$\frac{m(m+1)...(m+N-1)}{2.3...N}+\frac{m(m+1)...(m+N-2)}{2.3...(N-1)}+$$

$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+N-3)}{2.3\ldots(N-2)}+\&c.=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+N)}{2.3\ldots N}$$

multiplicando el numerador y denominador de estos quebrados por $2.3\ldots(m-1)$, y suprimiendo en ambos las factores $2.3\ldots N$, se transforman en

$$\frac{(N+1)(N+2)\ldots(N+m-1)}{2.3\ldots(m-1)}+\frac{N(N+1)\ldots(N+m-2)}{2.3\ldots(m-1)}+$$

$$+\frac{(N-1)N(N+1)\ldots(N+m-3)}{2.3\ldots(m-1)}+\&c.=\frac{(N+1)(N+2)\ldots(N+m)}{2.3\ldots m}$$

y en fin, haciendo $N+m-1=N+r=k$, $m-1=r$, con lo que $N=k-r$ vendrá

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{2.3\ldots r}+\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-r)}{2.3\ldots r}+$$

$$+\frac{(k-2)(k-3)\ldots(k-r-1)}{2.3\ldots r}+\&c.=\frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-r+1)}{2.3\ldots(r+1)}$$

que es precisamente la misma ecuacion que nos proponíamos establecer.

96. Las fórmulas halladas proporcionan el medio de obtener la serie que represente la suma de los valores que recibe una cualquiera conocida cuando en ella se sustituye, en vez de la variable, un cierto número sucesivo de ellos. Sea, por ejemplo, la serie general

$$A+A'x+A''x^2\ldots+A^{(n)}x^n+\&c.$$

suponiendo que se sustituyen en vez de la variable los valores sucesivos a, $a+\delta$, $a+2\delta\ldots a+(n-1)\delta$, se tendrán las siguientes:

$$A+A'a+A''a^2\ldots+A^{(m)}a^m+\&c.$$

$$A+A'(a+\delta)+A''(a+\delta)^2\ldots+A^{(m)}(a+\delta)^m+\&c.$$

$$A+A'(a+2\delta)+A''(a+2\delta)^2\ldots+A^{(m)}(a+2\delta)^m+\&c.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A+A'(a+(n-1)\delta)+A''(a+(n-1)\delta)^2\ldots+A^{(m)}(a+(n-1)\delta)^m+\&c.$$

y sumándolas se ve desde luego que la suma estará representada por

$$nA+A'S_1+A''S_2\ldots+A^{(m)}S_m+\&c.$$

sustituyendo en esta, en vez de la cantidad general S_m, el valor dado en las fórmulas, vendrá una serie que podrá ordenarse, bien por las potencias de n, bien por las de δ, ó en fin por las de $a+n\delta$; pero en todos estos casos los coeficientes de la resultante serán asimismo series ilimitadas.

Tambien nos podríamos proponer determinar una serie de que la dada fuese la espresion sumatoria en un valor determinado de la variable, tal como l. Para este efecto, representando la desconocida por

$$B+B'u+B''u^2\ldots+B^{(m)}u^m+\&c.$$

se haria $l=a+(n-1)\delta$; determinando la sumatoria correspondiente y comparando luego los coeficientes, vendrian los siguientes valores

$$B=\frac{A}{n},\ B'=A'.\frac{l}{S_1},\ B''=A''.\frac{l}{S_2},\ldots B^{(m)}.\frac{l^m}{S_m}.$$

Se conoce asimismo que estas series sumatorias podrán ser útiles en muchos casos para comparar y determinar los valores de aquellas de que proceden.

Ecuaciones y fórmulas del capítulo 6.°

1.
$$\frac{d^N f(p)}{dx^N} = \Sigma \frac{d^n f(p)}{dp^n} \times 2.3...N \Sigma P. \left[\frac{\frac{\Delta^N}{d\Delta^n} p}{dx^{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}}} \right]^{\Delta^n} \times \frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^N}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n} \times 2.3...\Delta n}$$

2.
$$\frac{d^N f(p)}{dx^N} = \Sigma \frac{d^n f(p)}{dp^n} \times 2.3...N \times 2.3...N' \times 2.3...N'' \times \&c. \times$$
$$\times \Sigma P \left[\frac{\frac{\Delta^{N'}}{d\Delta^n} p}{dq^{\frac{\Delta^{N'}}{\Delta^n}}} \right]^{\Delta^n} \times \frac{1}{\&c.} \times \Sigma P \left[\frac{\frac{\Delta^{N''}}{d\Delta^{N'}} q}{dr^{\frac{\Delta^{N''}}{\Delta^{N'}}}} \right]^{\Delta^{N'}} \times \frac{1}{\&c.} ... \times \&c. \times$$
$$\times \Sigma P. \left[\frac{\frac{\Delta^N}{d\Delta^{N(i)}} t}{dx^{\frac{\Delta^N}{\Delta^{N(i)}}}} \right]^{\Delta^{N(i)}} \times \frac{1}{\&c.} .$$

En las &c. de cada signo estan incluidos los factores

$$\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^{N'}}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n} \times 2.3...\Delta n} , \quad \frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^{N''}}{\Delta^{N'}}\right)^{\Delta^{N'}} \times 2.3...\Delta N'} , \text{ \&c.}$$

3.
$$\frac{d^N f(l.x)}{dx^N} = \frac{2.3...N}{x^N} \times \Sigma(-1)^{N+n} \times \frac{d^n f(l.x)}{d(l.x)^n} \times \Sigma P \left[\frac{1}{\frac{\Delta^N}{\Delta^n}} \right]^{\Delta^n} \times \frac{1}{2.3...\Delta n}$$

4.
$$\frac{d^N f(a^x)}{dx^N} = (l.a)^N \times \Sigma \frac{d^n f(a^x)}{d(a^x)^n} \times a^{xn} \times \frac{n^N - n(n-1)^N + \frac{n(n-1)}{2}.(n-2)^N - \&c.}{2.3...n}$$

5.
$$\frac{d^N f(x^m)}{dx^N} = \frac{1}{x^N} \times \Sigma \frac{d^n f(x^m)}{d(x^m)^n} \times x^{mn} \times \Sigma(-1)^{n+k} \frac{mk\,(mk-1)...(mk-N+1)}{2.3...(n-k) \times 2.3...k}$$

6 $$\int f(l.x).dx = x\left[f(l.x) + \Sigma(-1).^{n}\frac{d^{n}f(l.x)}{d.(l.x)^{n}}\right]$$

7 $$\int^{N} f(x^{m})dx^{N} = x^{N}\times\Sigma\frac{d^{n}f(x^{m})}{d(x^{m})^{n}}\times x^{mn}\times \times\Sigma\frac{(-1)^{n+k}}{2.3...(n-k)\times 2.3...k\times(mk+1)(mk+2)...(mk+N)}$$

8 $$\int^{N} f(p)dx^{N} = \Sigma(-1)^{N'+m}\times N(N+1)...(N+N'+m-1)\times \times\frac{\int^{N+N'} f(p)dp^{N+N'}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^{N+N'+m}}\times\Sigma P\left[\frac{d^{\frac{\Delta(N'+m)}{\Delta^{m}}}p}{dx^{\frac{\Delta(N'+m)}{\Delta^{m}}}}\right]^{\Delta^{m}}\times\frac{1}{\&c.}$$

9 $$\int f(p)dx = \Sigma(-1)^{N+m-1}\times 1.2.3...(N+m-1)\times\frac{\int^{N} f(p)dp^{N}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^{N+m}}\times \times\Sigma P\left[\frac{d^{\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta^{m}}}p}{dx^{\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta^{m}}}}\right]^{\Delta^{m}}\times\frac{1}{\&c.}$$

10 $z = f(x)$, $x = \varphi(z)$.

$$\frac{d^{N}x}{dz^{N}} = \Sigma(-1)^{m}\times 1.2.3...(N+m-1)\times\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^{N+m}}\times \times\Sigma P.\left[\frac{d^{\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta^{m}}}z}{dx^{\frac{\Delta(N+m-1)}{\Delta^{m}}}}\right]^{\Delta^{m}}\times\frac{1}{\&c.}$$

11 $$\int f(p)dx = \Sigma(-1)^{N-1}\times\int^{N} f(p)dp^{N}\times\frac{d^{N}x}{dp^{N}}$$

12 $$\left\{ \int p dx = \Sigma(-1)^{N-1} \times \frac{p^{N+1}}{2.3\ldots(N+1)} \times \frac{d^N x}{dp^N} \right.$$

13 $$\left\{ \begin{array}{l} \int (l.p)\, dx = \Sigma(-1)^{N-1} \times \dfrac{p^N (l.p - C^{(N)})}{2.3\ldots N} \times \dfrac{d^N x}{dp^N} \\ C^{(N)} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \ldots + \dfrac{1}{N} \end{array} \right.$$

14 $$\left\{ \int (a^p) dx = a^p \times \Sigma(-1)^{N-1} \times \frac{1}{(l.a)^N} \times \frac{d^N x}{dp^N} \right.$$

15 $$\left\{ \int (p^m) dx = \Sigma(-1)^{N+1} \times \frac{p^{N+m}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+N)} \times \frac{d^N x}{dp^N} \right.$$

16 $$\left\{ \begin{array}{l} \int^M pq dx^M = \Sigma(-1)^N \times \dfrac{M(M+1)\ldots(M+N-1)}{2.3\ldots N} \times \\ \qquad\qquad \times \int^{M+N} p.dx^{M+N} \times \dfrac{d^N q}{dx^N} \end{array} \right.$$

17 $$\left\{ \int pq dx = \Sigma(-1)^N \int^{N+1} p.dx^{N+1} \times \frac{d^N q}{dx^N} \right.$$

18 $$\left\{ \int f(a^x) dx = \Sigma \frac{(-1).^n a^{xn}}{2.3\ldots n} \times \frac{d^n f(a^x)}{d(a^x)^n} \times \left\{ x - \frac{C^{(n)}}{l.a} \right\} \right.$$

19 $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^M f(p,q)}{dx^M} = 2.3\ldots M \times \Sigma \dfrac{d^n f(p,q)}{dp^{\Delta' n}.dq^{\Delta'' n}} \times \\ \qquad \times \Sigma P \left[\dfrac{\dfrac{\Delta\Delta' M}{d.\overline{\Delta\Delta' n}} p}{\dfrac{\Delta\Delta' M}{dx^{\Delta\Delta' n}}} \right]^{\Delta\Delta' n} \times \frac{1}{\&c.} \times \Sigma P. \left[\dfrac{\dfrac{\Delta\Delta'' M}{d^{\Delta\Delta'' n}} q}{\dfrac{\Delta\Delta'' M}{dx^{\Delta\Delta'' n}}} \right]^{\Delta\Delta'' n} \times \frac{1}{\&c.} \end{array} \right.$$

$$20\left\{\begin{array}{l}\int^{M} f(p,q)dx^{M}=\Sigma(-1)^{N+N'+m}\times M(M+1)\ldots(M+N+N'+m-1)\times \\ \qquad \int^{M+N+N'}\left(\frac{d^{n}f(p,q)}{dq^{n}}\right).dp^{M+N+N'}\times\left(\frac{dp}{dx}\right)^{-(M+N+N'+m)}\times \\ \qquad \times\Sigma P.\left[\frac{\frac{\Delta^{(N'+m)}}{\Delta^{m}}}{d\,\frac{\Delta^{(N'+m)}}{\Delta^{m}}p}\right]^{\Delta^{m}}\times\frac{1}{\&c.}\times\Sigma P\left[\frac{\frac{\Delta^{N}}{\Delta^{n}}}{d\,\frac{\Delta^{N}}{\Delta^{n}}q}\right]^{\Delta^{n}}\times\frac{1}{\&c.}\end{array}\right.$$

$$21\left\{\begin{array}{l}\int f(p,q)dx=\Sigma(-1)^{N+N'+m-1}\times 1.2.3\ldots(N+N'+m-1)\times \\ \qquad \times\int^{N+N'}\left(\frac{d^{n}f(p,q)}{dq^{n}}\right).dp^{N+N'}\times\left(\frac{dp}{dx}\right)^{-(N+N'+m)}\times \\ \qquad \times\Sigma P.\left[\frac{\frac{\Delta^{(N'+m-1)}}{\Delta^{m}}}{d\,\frac{\Delta^{(N'+m-1)}}{\Delta^{m}}p}\right]^{\Delta^{m}}\times\frac{1}{\&c.}\times\Sigma P.\left[\frac{\frac{\Delta^{N}}{\Delta^{n}}}{d\,\frac{\Delta^{N}}{\Delta^{n}}q}\right]^{\Delta^{n}}\times\frac{1}{\&c.}\end{array}\right.$$

$$22\left\{\begin{array}{l}A^{(m-1)}x^{m}+A^{(m-2)}x^{m-1}\ldots+A'x^{2}+Ax=z \\ x=\Sigma(-1)^{n}\times(N+1)(N+2\ldots(N+n-1)\times\frac{1}{A^{N+n}}\times \\ \qquad \times\frac{A'^{2n-N+1+p+2p'+3p''+\&c.}}{2.3\ldots(2n-N+1+p+2p'+3p''+\&c.)}\times \\ \times\frac{A''^{N-n-1-2p-3p'-4p''-\&c.}\times A'''^{p}.A^{IV p'}.A^{V p''}\ldots\&c.}{2.3\ldots(N-n-1-2p-3p'-4p''-\&c.)\times 2.3\ldots p\times 2.3\ldots p'\times 2.3\ldots p''\times\ldots\&c.}\end{array}\right.$$

$$23\left\{\begin{array}{l}a^{m}+(a+\delta)^{m}+(a+2\delta)^{m}\ldots+[a+(n-1)\delta]^{m}=S_{m} \\ S_{m}=A^{(m)}n^{m+1}+A^{(m-1)}n^{m}\ldots+A^{(m-k)}n^{m-k+1}\ldots+A'n^{2}+An \\ A^{(m-k)}=\Sigma\frac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{2.3\ldots(k-N)}\times a^{k-N}\delta^{m-k+N}\times \\ \Sigma(-1)^{r}\times\frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-r+1)}{2.3\ldots(r+1)}\times\frac{r^{N+r}-r(r-1)^{N+r}+\frac{r(r-1)}{2}(r-2)^{N+r}-\&c.}{2.3\ldots(N+r)}\end{array}\right.$$

$$23'\left\{\begin{array}{l} A^{(m-k)}=\Sigma\dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+2)}{2.3\ldots(k-N)}\times a^{k-N}\delta^{m-k+N}\times \\ \qquad\qquad \times\Sigma(-1)^r\times\dfrac{(N+1)N(N-1)\ldots(N-r+1)}{2.3\ldots(r+1)}\times \\ \qquad\qquad \times\dfrac{r^{N+r}-r(r-1)^{N+r}+\dfrac{r(r-1)}{2}(r-2)^{N+r}-\&c.}{2.3\ldots(N+r)} \end{array}\right.$$

$$24\left\{\begin{array}{l} S_m=\Sigma(-1)^r\times\dfrac{m(m-1)\ldots(m-N+2)\times(N+1)N(N-1)\ldots(N-r+1)}{2.3\ldots(r+1)}\times \\ \qquad \times\dfrac{r^{N+r}-r(r-1)^{N+r}+\dfrac{r(r-1)}{2}(r-2)^{N+r}-\&c.}{2.3\ldots(N+r)}\times\delta^{N-1}[(a+n\delta)^{m-N+1}-a^{m-N+1}] \end{array}\right.$$

$$25\left\{\begin{array}{l} a=1,\ \delta=1 \\ S_m=(n+1)\Sigma(-1)^r\times\dfrac{m(m-1)\ldots(m-N+1)\times(N+1)N(N-1)\ldots(N-r+1)}{2.3\ldots(r+1)}\times \\ \qquad \times\dfrac{r^{N+r}-r(r-1)^{N+r}+\dfrac{r(r-1)}{2}(r-2)^{N+r}-\&c.}{2.3\ldots(N+r)}\times(n+1)^{m-N}. \end{array}\right.$$

ADICION.

Como las series que se refieren al desarrollo de las integrales son siempre de interés, vamos á realizar aquí las indagaciones que hemos dejado indicadas en el número (83). Para este efecto haremos sucesivamente, suponiendo $\frac{dx}{dp}=p'$

$$\int f(p)dx=\int f(p)p'dp=f'(p),\ \int^2 f(p)dx^2=\int f'(p)p'dp=f''(p),$$

$$\int^3 f(p)dx^3=\int f''(p)p'dp=f'''(p),\ \&c.$$

se tendrá por la fórmula (17) del último capítulo

$$\int f(p)dx=\int f(p)p'd.p=\Sigma(-1)^n\int^n xdp^n\times\frac{d^nf(p)}{dp^n}\ldots(a)$$

y para la integral del 2.° órden

$$\int^2 f(p)dx^2=\int f'(p)p'dp=\Sigma(-1)_{n'}\times\int^{n'} xdp^{n'}\times\frac{d^{n'}f'(p)}{dp^{n'}}$$

$$\frac{d^{n'}f'(p)}{dp^{n'}}=\frac{d^{n'}\int f(p)p'dp}{dp^{n'}}=\frac{d^{n'-1}f(p)p'}{dp^{n'-1}}=$$

$$=\Sigma\frac{(n'-1)(n'-2)\ldots(n'-r)}{2.3\ldots r}\times\frac{d^{n'-r-1}f(p)}{dp^{n'-r-1}}\times\frac{d^rp'}{dp^r},\ \ldots(\alpha)$$

sustituyendo este valor en la espresion que precede, escribiendo por separado el término que corresponde al valor de $n'=0$ á fin de que el de $n'=1$ no pueda hacerse negativo, se tendrá

$$\int^2 f(p)dx^2=xf'(p)+\Sigma(-1)^n\times\frac{(n'-1)(n'-2)\ldots(n'-r)}{2.3\ldots r}\times$$

$$\times\frac{d^{n'-r-1}f(p)}{dp^{n'-r-1}}\times\frac{d^rp'}{dp^r}\times\int^{n'}x.dp^{n'},$$

y haciendo en esta espresion $n'-r-1=n$, se convertirá en

$$\int^2 f(p)dx^2=xf'(p)+\Sigma(-1)^{n+r+1}\times\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{2.3\ldots r}\times$$

$$\times\int^{n+r+1}x.dp^{id}\times\frac{d^rp'}{dp^r}\times\frac{d^nf(p)}{dp^n}$$

pero por la fórmula (16) del mismo capítulo se tiene

$$\Sigma(-1)^r\times\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{2.3\ldots r}\times\int^{n+1+r}xdp^{id}\times\frac{d^rp'}{dp^r}=\int^{n+1}(xp')dp^{n+1}=$$

$$=\int^n\left(\int xp'.dp\right)dp^n=\int^n\frac{x^2}{2}dp^n$$

por consiguiente, sustituyendo este valor en lugar de la serie que precede, así como por $f'(p)$ el que le corresponde en la misma ecuacion (a), se tendrá

$$\int^2 f(p)dx^2=\Sigma(-1)^n\times\frac{d^nf(p)}{dp^n}\left(x\int^n xdp^n-\int^n\frac{x^2}{2}dp^n\right)\qquad(b).$$

Pasando á obtener la integral del tercer órden, observaremos que la funcion $f'''(p)$ que la representa tiene con respecto á la funcion $f'(p)$

la misma composicion que la $f''(p)$ con respecto á $f(p)$; por consiguiente, el valor de la intégral de que tratamos será el mismo dado por la serie (b) que precede: escribiendo en ella $f'(p)$ en vez $f(p)$ se tendrá pues

$$\int^3 f(p)dx^3=\Sigma(-1)^{n'}\times\frac{d^{n'}f'(p)}{dp^{n'}}\left(x\int^{n'}xdp^{n'}-\int^{n'}\frac{x^2}{2}dp^{n'}\right)$$

sustituyendo en esta espresion en vez de $\frac{d^{n'}f'(p)}{dp^{n'}}$ su valor (α), teniendo presente que el primer término de la serie que corresponde á $n'=0$ es

$$f'(p)\times\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)=f'(p)\times\frac{x^2}{2}$$

y haciendo del mismo modo que antes $n'-r-1=n$, se transformará esta serie en la

$$\int^3 f(p)dx^3=\frac{x^2}{2}f'(p)+\Sigma(-1)^{n+r+1}\times\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{2.3\ldots r}\times$$

$$\times\frac{d^rp'}{dp^r}\left(x\int^{n+r+1}xdp^{id}-\int^{n+r+1}\frac{x^2}{2}dp^{id}\right)\times\frac{d^nf(p)}{dp^n}$$

y en ella tomando las que provienen de los valores de r se verificará que

$$\Sigma(-1)^r\times\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{2.3\ldots r}\times x\int^{n+r+1}xdp^{id}\times\frac{d^rp'}{dp^r}=$$

$$=x\int^{n+1}(xp')dp^{n+1}=x\int^n\frac{x^2}{2}.dp^n$$

$$-\Sigma(-1)^r\times\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{2.3\ldots r}\times\int^{n+r+1}\cdot\frac{x^2}{2}.dp^{id}\times\frac{d^rp'}{dp^r}=$$

$$=-\int^{n+1}\left(\frac{x^2}{2}.p'\right)dp^{n+1}=-\int^{n}\frac{x^3}{2.3}dp^n$$

y por consiguiente, escribiendo en vez de $f'(p)$ su valor (a), y sustituyendo estas espresiones en la serie anterior, vendrá

$$\int^3 f(p)dx^3=\Sigma(-1)^n\times\frac{d^nf(p)}{dp^n}\times$$

$$\times\left(\frac{x^2}{2}.\int^n xdp^n-x\int^n\frac{x^2}{2}.dp^n+\int^n\frac{x^3}{2.3}.dp^n\right)\qquad(c).$$

Del mismo modo, para pasar á la integral cuarta sustituiríamos en esta última serie $f''(p)$ en vez de $f(p)$, y luego por el coeficiente diferencial $\frac{d^{n'}f'(p)}{dp^{n'}}$ su valor (α), y observando que el primer término de esta misma serie correspondiente á $n=0$ es, escribiendo $f'(p)$ por $f(p)$,

$$f'(p)\times\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2.3}\right)=f'(p)\times\frac{x^3}{2.3}$$

se llegaria por el mismo procedimiento seguido anteriormente á la ecuacion

$$\int^4 f(p)dx^4=f'(p)\times\frac{x^3}{2.3}+\Sigma(-1)^{n+r+1}\times\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{2.3\ldots r}\times$$

$$\times\frac{d^r p'}{dp^r}\times\frac{d^n f(p)}{dp^n}\times\left(\frac{x^2}{2}\int^{n+r+1}x dp^{id}-x\int^{n+r+1}\frac{x^2}{2}dp^{id}+\int^{n+r+1}\frac{x^3}{2.3}.dp^{id}\right)$$

y observando del mismo modo que las sumas relativas á los infinitos valores de r tienen respectivamente por valor

$$(-1)^{n+1}\frac{x^2}{2}\int^{n+1}(x.p')dp^{n+1}=(-1)^{n+1}.\frac{x^2}{2}\int^{n}\frac{x^2}{2}dp^n,$$

$$(-1)^n x\int^{n+1}\left(\frac{x^2}{2}.p'\right)dp^{n+1}=(-1)^n x\int^{n}\frac{x^3}{2.3}.dp^n,$$

$$(-1)^{n+1}\int^{n+1}\left(\frac{x^3}{2.3}.p'\right)dp^{n+1}=(-1)^{n+1}.\int^{n}\frac{x^4}{2.3.4}.dp^n$$

sustituyendo asimismo por $f'(p)$ su valor (a), se llegará á la espresion

$$\int^{4} f(p)dx^4=\Sigma(-1)^n\times\frac{d^n f(p)}{dp^n}\times$$

$$\times\left(\frac{x^3}{2.3}\int^{n}.x dp^n-\frac{x^2}{2}\int^{n}\frac{x^2}{2}.dp^n+x\int^{n}\frac{x^3}{2.3}.dp^n-\int^{n}\frac{x^4}{2.3.4}dp^n\right).$$

Sin necesidad de proseguir mas adelante, se percibe de un modo claro la ley de estos resultados, que conducirá á la ecuacion general

$$\int^{N} f(p)dx^N=\Sigma(-1)^n\times\frac{d^n f(p)}{dp^n}\left(\frac{x^{N-1}}{2.3...(N-1)}\int^{n}x dp^n-\frac{x^{N-2}}{2.3...(N-2)}\int^{n}\frac{x^2}{2}dp^n...\right.$$

$$\left...+(-1)^{r+1}\times\frac{x^{N-r}}{2.3...(N-r)}\times\int^{n}\frac{x^r}{2.3...r}...+(-1)^{N+1}\int^{n}\frac{x^N}{2.3...N}\right)$$

ó bien, escribiendo la suma contenida en el paréntesis, empezando por el último término, y observando que cuando $n=0$ esta suma se reduce á

$$x^N \times \Sigma(-1)^{N+1} \times \frac{1}{2.3...(N-r)\times 2.3...r}$$

que es la que corresponde al desarrollo de $(1-1)^N=0$, con la diferencia de faltar en ella un término negativo, que es $-\frac{x^N}{2.3...N}$, añadiéndosele y quitándosele, quedará reducida al mismo con signo positivo, y por consiguiente la integral general que nos proponemos determinar será

$$\int^N f(p)dx^N = f(p)\times\frac{x^N}{2.3...N} - \Sigma(-1)^{N+n}\times\frac{d^n f(p)}{dp^n}\times$$

$$\times\Sigma(-1)^r\times\frac{x^r}{2.3...r}\times\int^n\frac{x^{N-r}}{2.3...(N-r)}dp^n...(1).$$

Si hacemos primeramente $p=l.x$, de donde $x=e^p$, vendrá

$$\int^n \frac{e^{p(N-r)}}{2.3...(N-r)}.dp^n = \frac{e^{p(N-r)}}{2.3...(N-r)\times(N-r)^n},$$

$$(-1)^r\times\frac{x^r}{2.3...r}\times\int^n\frac{x^{N-r}}{2.3...(N-r)} = \frac{e^{pN}}{2.3...N}\times$$

$$\times\Sigma(-1)^r\times\frac{N(N-1)...(N-r+1)}{2.3...r}\times\frac{1}{(N-r)^n}$$

y por consiguiente el valor de la integral será

$$\int^N f(l.x)dx^N = \frac{x^N}{2.3...N}\Big[f(l.x) - \Sigma(-1)^{N+n}\frac{d^n f(l.x)}{d(l.x)^n}\times$$

$$\times\Sigma(-1)^r\times\frac{N(N-1)...(N-r+1)}{2.3...r}\times\frac{1}{(N-r)^n}$$

suponiendo en esta $f(l.x)=(lx)^m$ se tendrá

$$\int^N (l.x)^m dx^N = \frac{x^N}{2.3...N}[(l.x)^m - \Sigma(-1)^{N+n}\times m(m-1)...(m-n+1)(l.x)^{m-n}\times$$

$$\times\Sigma(-1)^r\times\frac{N(N-1)...(N-r+1)}{2.3...r}\times\frac{1}{(N-r)^n}.]$$

Haciendo ahora en la integral general (1) $p=e^x$ será

$$\int^N f(e^x)dx^N = f(e^x)\times\frac{x^N}{2.3...N} - \Sigma(-1)^{N+n}\times\frac{d^n f(e^x)}{d(e^x)^n}\times\frac{p^n}{2.3...n}\times$$

$$\times\Big\{(l.p)^N\times\Sigma\frac{(-1)^r}{2.3...r\times 2.3...(N-r)} - (l.p)^{N-n'}\times\Sigma\frac{(-1)^{n+n'+r}}{2.3...r\times 2.3...(N-n'-r)}\times$$

$$\times\Sigma(-1)^{r'}\times\frac{n(n-1)...(n-r'+1)}{2.3...r'\times(n-r')^{n'}}\Big\}$$

la suma relativa á los valores de r es en general

$$\Sigma(-1)^r\times\frac{1}{2.3...r\times 2.3...(N-n'-r)} = 0$$

siempre que n tenga un valor cualquiera, escepto en dos casos, cuan-

do $n'=N$ y cuando $n'=0$. El primero de estos casos corresponde al primer término de la llave, y como el mayor valor de r es $N-1$, da

$$\Sigma_{r=0}^{r=N-1}\frac{(-1)^r}{2.3...r\times 2.3...(N-r)}=-\frac{(-1)^N}{2.3...N}$$

en el segundo caso siendo por precision $r=0$, el segundo término de la llave se reduce á

$$-(-1)^{N+n}\times\Sigma(-1)^{r'}\times\frac{n(n-1)...(n-r'+1)}{2.3...r'\times(n-r')^N}$$

con estas simplificaciones, la integral propuesta será la siguiente:

$$\int^{x^N} f(e_x)dx^N=f(e^x)\times\frac{x^N}{2.3...N}+$$

$$+\Sigma\frac{d^n f(e^x)}{d(e^x)^n}\times\frac{e^{xn}}{2.3...n}\left\{\frac{(-1)^n x^N}{2.3...N}+\Sigma(-1)^r\times\frac{n(n-1)...(n-r+1)}{2.3...r\times(n-r)^N}\right\}.$$

Si suponemos $f(e^x)=e^{xm}$, esta integral se reducirá á

$$\int^{x^N} e^{xm}dx^N=e^{xm}\left\{\Sigma_{n=0}^{n=m}(-1)^n\times\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{2.3...n}\times\frac{x^N}{2.3...N}+\right.$$

$$\left.+\Sigma_{n=1}^{n=m}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{2.3...n}\times\Sigma(-1)^r\times\frac{n(n-1)...(n-r+1)}{2.3...r}\times\frac{1}{(n-r)^N}\right\}$$

la suma contenida en el primer término de la llave se reduce á 0, quedando por consiguiente tan solo la suma contenida en el 2.° término, y deberá verificarse la ecuacion

$$\Sigma_{n=1}^{n=m}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}\times\Sigma(-1)^r\times\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{2.3\ldots r}\times\frac{1}{(n-r)^N}=\frac{1}{m^N}.$$

Hagamos ahora en la fórmula general (1) $p=x^m$, será $x=p^{\frac{1}{m}}$ y

$$(-1)^r.\frac{x^r}{2.3\ldots r}\int^n\frac{p^{\frac{N-r}{m}}}{2.3\ldots(N-r)}.dp^n=$$

$$=(-1)^r\frac{x^{N+mn}}{2.3\ldots r\times 2.3\ldots(N-r)\times\left(\frac{N-r}{m}+1\right)\left(\frac{N-r}{m}+2\right)\ldots\left(\frac{N-r}{m}+n\right)}$$

y por consiguiente la integral se transformará en

$$\int^N f(x^m)dx^N=\frac{x^N}{2.3\ldots N}\Big\{f(x^m)-$$

$$-\Sigma(-1)^{N+n}\frac{d^nf(x^m)}{d(x^m)^n}.x^{mn}\Sigma(-1)^r\frac{N(N-1)\ldots(N-r+1)\times m_n}{2.3\ldots r\times(N-r+m)(N-r+2m)\ldots(N-r+nm)}.$$

Comparando esta espresion con la de la fórmula (7) del último capítulo, se sacará la ecuacion

$$\Sigma(-1)^{n+k}\frac{1}{2.3\ldots(n-k)\times 2.3\ldots(k)\times(mk+1)(mk+2)\ldots(mk+N)}$$

$$=\Sigma\frac{(-1)^{N+n+r+1}\times N(N-1)\ldots(N-r+1)\times m^n}{2.3\ldots r\times 2.3\ldots N\times(N-r+m)(N-r+2m)\ldots(N-r+nm)}.$$

La ecuacion general indicada en el mismo (83) viene pues á ser

$$\Sigma(-1)^{N+n+r+1}\times\frac{x^r}{2.3...r}\int^n\frac{x^{N-r}}{2.3...(N-r)}dp^n=$$

$$=\left\{2.3...N'\Sigma P.\left[\frac{\frac{\Delta^{N'}}{d^{\Delta^n}p}}{\frac{\Delta^{N'}}{dx^{\Delta^n}}}\right]^{\Delta^n}\times\frac{1}{\left(2.3...\frac{\Delta^{N'}}{\Delta^n}\right)^{\Delta^n}\times 2.3...\Delta n}\,,\ N'=-N\right\}$$

y si la suma contenida en el primer miembro fuese una espresion cuyo valor pudiera asignarse haciendo N negativa, daria el de la suma de productos contenida en el 2.° miembro cuando N' es en él positiva; mas esto no puede conseguirse en general, porque el producto

$$\frac{1}{2.3...r\times 2.3...(N-r)}=\frac{N(N-1)...(N-r+1)}{2.3...N\times 2.3...r}$$

se hace nulo asignando á N un valor negativo.

Pasemos ahora á determinar la serie que representa el valor de la misma integral general del órden N de una funcion mediata ordenada por las integrales sucesivas de $f(p)$ y coeficientes diferenciales de x con respecto á p. La integral de primer órden será

$$\int f(p)dx=\int f(p)p'dp=\Sigma(-1)^n\times\int^{n+1}f(p)dp^{n+1}\times\frac{d^{n+1}x}{dp^{n+1}}$$

y para la del segundo órden, haciendo las mismas hipótesis que anteriormente, se tendrá

$$\int^2 f(p)dx^2=\int f'(p)p'dp=\Sigma(-1)^{n'}\int^{n'+1}f(p)dp^{n'+1}\times\frac{d^{n'+1}x}{dp^{n'+1}},\ \text{pero}$$

$$\int^{n'+1}f'(p)dp^{n'+1}=\int^{n'+2}f(p)p'dp^{n'+2}=$$

$$=\Sigma(-1)^r\times\frac{(n'+2)(n'+3)\ldots(n'+r+1)}{2.3\ldots r}\times\int^{n'+2+r}f(p)dp^{n'}\times\frac{d^rp'}{dp^r}$$

y sustituyendo vendrá

$$\int^2 f(p)dx^2=\Sigma(-1)^{n'+r}\times\frac{(n'+2)(n'+3)\ldots(n'+r)}{2.3\ldots r}\times\int^{n'+2+r}f(p)dp^{n'}\times$$

$$\times\frac{d^rp'}{dp^r}\times\frac{d^{n'+1}x}{dp^{n'+1}}$$

suponiendo ahora $n'+r=n$, se transformará esta espresion en

$$\int^2 f(p\,dx^2=\Sigma(-1)^n\times\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+2}{2.3\ldots r}$$

$$\times\int^{n+2}f(p)dp^{n+2}\times\frac{d^rp'}{dp^r}\times\frac{d^{n-r+1}x}{dp^{n-r+1}}$$

teniendo presente, que no pudiendo hacerse n' negativa, el mayor valor de r no puede esceder de n, vendrá, para la suma relativa á los valores de dicha r, la espresion siguiente:

$$\Sigma\frac{(n+1)n\,n-1)\ldots(n-r+1)}{2.3\ldots r}\times\frac{d^{n-r+1}x}{dp^{n-r+1}}\times\frac{d^rp'}{dp^r}=$$

$$=\frac{d^{n+1}(xp')}{dp^{n+1}}-x\frac{d^{n+1}p'}{dp^{n+1}},$$

y por consiguiente, el valor de la integral será

$$\int^2 f(p)dx^2=\Sigma(-1)^n.\int^{n+2}f(p).dp^{n+2}\left(\frac{1}{2}\frac{d^{n+2}x^2}{dp^{n+2}}-x\frac{d^{n+2}x}{dp^{n+2}}\right).$$

El de la integral de tercer órden podrá deducirse, como sabemos, de esta misma espresion, escribiendo $f'(p)$ en lugar de $f(p)$; se tendrá pues

$$\int^3 f(p)dx^3 = \Sigma(-1)^{n'}.\int^{n'+2} f'(p)dp^{n'+2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}.\frac{d^{n'+2}x^2}{dp^{n'+2}} - x\frac{d^{n'+2}x}{dp^{n'+2}}\right)$$

y poniendo por $f'(p)$ su igual $\int f(p)p'.dp$

$$\int^3 f(p)dx^3 = \Sigma(-1)^{n'+r}\times\frac{(n'+3)(n'+4)\ldots(n'+r+2)}{2.3\ldots r}\times\int^{n'+r+3} f(p).dp^{n'+r+3}$$

$$\times\frac{d^r.p'}{dp^r}\times\left(\frac{1}{2}.\frac{d^{n'+2}x^2}{dp^{n'+2}} - x.\frac{d^{n'+2}x}{dp^{n'+2}}\right),$$

por último, haciendo del mismo modo $n'+r=n$, se tendrá

$$\int^3 f(p)dx^3 = \Sigma(-1)^n\times\frac{(n+2)(n+1)\ldots(n-r+3)}{2.3\ldots r}\times\int^{n+3} f(p).dp^{n+3}$$

$$\times\frac{d^rp'}{dp^r}\times\left(\frac{1}{2}.\frac{d^{n-r+2}x^2}{dp^{n-r+2}} - x\frac{d^{n-r+2}x}{dp^{n-r+2}}\right).$$

Observando tambien que r no puede esceder de n, las sumas relativas á los valores de dicha r serán los coeficientes diferenciales del órden $n+2$ de los respectivos productos, menos los dos últimos términos de su desarrollo, correspondientes á los valores $r=n+1$ y $r=n+2$; se tendrá pues

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{(n+2)(n+1)\ldots(n-r+3)}{2.3\ldots r}\times\frac{d^{n-r+2}x^2}{dp^{n-r+2}}\times\frac{d^rp'}{dp^r} =$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{d^{n+2}(x^2p')}{dp^{n+2}}-\frac{1}{2}(n+2).\frac{dx^2}{dp}.\frac{d^{n+1}p'}{dp^{n+1}}-\frac{1}{2}.x^2.\frac{d^{n+2}p'}{dp^{n+2}},$$

$$-x\Sigma\frac{(n+2)(n+1)\ldots(n-r+3)}{2.3\ldots r}\times\frac{d^{n-r+2}x}{dp^{n-r+2}}\times\frac{d^rp'}{dp^r}=$$

$$=-x\frac{d^{n+2}(xp')}{dp^{n+2}}+x(n+2).\frac{dx}{dp}\times\frac{d^{n+1}p'}{dp^{n+1}}+x.\frac{d^{n+2}p'}{dp^{n+2}}$$

sumando estas espresiones, y observando que $\frac{dx^2}{dp}=2x\frac{dx}{dp}$, se destruirán los términos multiplicados por $n+2$ y resultará

$$\int^{n}f(p)dx^2=\Sigma(-1)^n.\int^{n+3}f(p)dp^{n+3}\left(\frac{1}{2.3}.\frac{d^{n+3}x^3}{dp^{n+3}}-\frac{x}{2}.\frac{d^{n+3}x^2}{dp^{n+3}}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^2}{2}.\frac{d^{n+3}x}{dp^{n+3}}\right).$$

Para obtener la integral de cuarto órden sustituiremos en esta $f'(p)$ en vez de $f(p)$, y es fácil ver, que practicando las mismas operaciones y supuestos, será necesario verificar las sumas análogas siguientes:

$$\frac{1}{2.3}\Sigma\frac{(n+3)\ldots(n-r+4)}{2.3\ldots r}\times\frac{d^{n-r+3}x^3}{dp^{n-r+3}}\times\frac{d^rp'}{dp^r}=\frac{1}{2.3}.\frac{d^{n+3}(x^3p')}{dp^{n+3}}-$$

$$-\frac{1}{2.3}\times\frac{(n+3)(n+2)}{2}\times\frac{d^2x^3}{dp^2}t-\frac{1}{2.3}(n+3)\frac{d.x^3}{dp}.s-\frac{1}{2.3}x^3.\frac{d^{n+3}p'}{dp^{n+3}},$$

$$-\frac{x}{2}\Sigma\frac{(n+3)\ldots(n-r+4)}{2.3\ldots r}\times\frac{d^{n-r+3}x^2}{dp^{n-r+3}}\times\frac{d^rp'}{dp^r}=-\frac{x}{2}.\frac{d^{n+3}(x^2p')}{dp^{n+3}}+$$

$$+\frac{x}{2}.\frac{(n+3)(n+2)}{2}\frac{d^2x^2}{dp^2}.t+\frac{x}{2}(n+3).\frac{dx^2}{dp}.s+\frac{x}{2}.x^2.\frac{d^{n+3}p'}{dp^{n+3}},$$

$$\frac{x^2}{2}\Sigma\frac{(n+3)\ldots(n-r+4)}{2.3\ldots r}\times\frac{d^{n-r+3}x}{dp^{n-r+3}}\times\frac{d^rp'}{dp^r}=\frac{x^2}{2}.\frac{d^{n+3}(xp')}{dp^{n+3}}-$$

$$-\frac{x^2}{2}.\frac{(n+3)(n+2)}{2}.\frac{d^2x}{dp^2}.t-\frac{x^2}{2}(n+3)\frac{dx}{dp}.s-\frac{x^2}{2}.x.\frac{d^{n+1}p'}{dp^{n+1}}$$

en las que hemos supuesto $t=\frac{d^{n+1}p'}{dp^{n+1}}$, y $s=\frac{d^{n+2}p'}{dp^{n+2}}$, y verificando la suma de estas tres espresiones, desarrollando para el efecto las diferenciales segundas

$$d^2x^3=3x^2d^2x+2.3.x(dx)^2,\ d^2x^2=2xd^2x+2(dx)^2$$

desaparecerán los términos que contienen á t y s, y resultará

$$\int^4 f(p)dx^4=\Sigma(-1)^n.\int^{n+4}f(p)dp^{n+4}\times\left(\frac{1}{2.3.4}.\frac{d^{n+4}x^4}{dp^{n+4}}-\right.$$

$$\left.-\frac{x}{2.3}\frac{d^{n+4}x^3}{dp^{n+4}}+\frac{x^2}{2.2}.\frac{d^{n+4}x^2}{dp^{n+4}}-\frac{x^3}{2.3}.\frac{d^{n+4}x}{dp^{n+4}}\right).$$

Prosiguiendo el mismo camino llegará á establecerse por analogía la ecuacion siguiente, análoga á la del caso anterior

$$\int^N f(p)dx^N=\Sigma(-1)^n\int^{n+N}f(p)dp^{n+N}\times\Sigma(-1)^r\times\frac{x^r}{2.3\ldots r\times2.3\ldots(N-r)}\times$$

$$\times\frac{d^{n+N}x^{N-r}}{dp^{n+N}}.....(2).$$

Haciendo primeramente $p=lx$, será

$$\frac{(-1)^r x^r}{2.3...r\times 2.3...(N-r)}\times\frac{d^{n+N}e^{p(N-r)}}{dp^{n+N}}=$$

$$=e^{pN}\times(-1)^r\times\frac{(N-r)^{n+N}}{2.3...r\times 2.3...(N-r)},\text{ y}$$

$$\int^N f(l.x)dx^N=\frac{x^N}{2.3...N}\times\Sigma(-1)^n\int^{N+n}f(l.x).d(l.x)^{N+n}\times$$

$$\times\Sigma(-1)^r\times\frac{N(N-1)...(N-r+1)\times(N-r)^{N+n}}{2.3...r}.$$

Haciendo $p=e^x$, será por la fórmula (3)

$$\frac{d^{N+n}(l.p)^{N-r}}{dp^{N+n}}=\frac{2.3...(N+n)}{p^{N+n}}\times\Sigma(-1)^{N+n+n'}$$

$$\times(N-r)(N-r-1)...(N-r-n'+1)(l.p)^{N-r-n'}\times F^{n'}\left(\frac{1}{N+n}\right)$$

indicando por el símbolo abreviado $F^{n'}\left(\frac{1}{N+n}\right)$ la suma de productos de dicha fórmula; sustituyendo esta espresion en la ecuacion anterior (2), vendrá

$$\int^N f(e^x)dx^N=\Sigma(-1)^{N+n'+r}\int^{N+n}f(e^x)^{N+n}\times d(e^x)^{N+n}$$

$$\times\Sigma\frac{2.3\ldots(N+n)\times(l.p)^{N-n'}}{2.3\ldots r\times 2.3\ldots(N-n'-r)}\times\frac{1}{p^{N+n}}\times F^{n'}\left(\frac{1}{N+n}\right).$$

Observaremos, como precedentemente lo hemos hecho, que la suma

$$\Sigma(-1)^r\times\frac{1}{2.3\ldots r\times 2.3\ldots(N-n'-r)}=0$$

para todos los valores de n', escepto dos de ellos, que son $n'=0$ y $n'=N$; el primero de estos valores no tiene lugar al presente, porque el menor valor de n, en la fórmula (3), es $n=1$; por consiguiente, la integral que nos ocupa será

$$\int^N f(e^x)dx^N=\Sigma(-1)^N\times\frac{2.3\ldots(N+n)}{e^{x(N+n)}}\times$$

$$\times F^N\left(\frac{1}{N+n}\right)\times\int^{N+n}f(e^x)d(e^x)^{N+n}.$$

Suponiendo $p=x^m$, será

$$\frac{d^{N+n}\,p^{\frac{N-r}{m}}}{dp^{N+n}}=\frac{N-r}{m}\left(\frac{N-r}{m}-1\right)\ldots\left(\frac{N-r}{m}-N-n+1\right).\,p^{\frac{N-r}{m}-N-n}\ \text{y}$$

$$\int^N f(x^m)dx^N=\Sigma(-1)^n\int^{N+n}f(x^m).d(x^m)^{N+n}\times\frac{1}{x^{N(m-1)+mn}}$$

$$\times\Sigma(-1)^r\times\frac{\frac{N-r}{m}\left(\frac{N-r}{m}-1\right)\ldots\left(\frac{N-r}{m}-N-n+1\right)}{2.3\ldots r\times 2.3\ldots(N-r)}$$

Como las funciones á que afectan los signos $\int$ y d, en las espre-

siones $\int^n x^{N-r}dp^n$, $\frac{d^{N+n}x^{N-r}}{dp^{N+n}}$, que entran en la composicion de las integrales (1) y (2), son asimismo mediatas, podrian desarrollarse por las mismas fórmulas, y obtener otras en funcion directa de los coeficientes diferenciales é integrales de las inmediatas.

Comparando la fórmula (8) del último capítulo con la espresion de la integral general (2), se inferirá la ecuacion siguiente

$$\Sigma(-1)^{N'+r}\times\frac{x^r}{2.3...r\times 2.3...(N-r)}\times\frac{d^{N+N'}x^{N-r}}{dp^{N+N'}}$$

$$=\Sigma(-1)^{N'+m}\times\frac{N(N+1)...(N+N'+m-1)}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^{N+N'+m}}\times$$

$$\times\Sigma P\left[\frac{\frac{\Delta^{(N'+m)}}{\Delta^m}p}{d\,\frac{\Delta^{(N'+m)}}{\Delta^m}}\right]^{\Delta^m}\times\frac{1}{\&c.}$$

suponiendo que sea

$$p=A'x+A''x^2+A'''x^3+\&c.$$

$$x=B'p+B''p^2+B'''p^3+\&c.$$

el coeficiente diferencial del órden H de la primera de estas series, cuando se haga $x=0$, será $2.3...H.A^{(H)}$. El primer miembro de la ecuacion que precede en el mismo supuesto de $x=0$, se reduce al término $\frac{(-1)^{N'}}{2.3...N}\times\frac{d^{N+N'}x^N}{dp^{N+N'}}$; y como dicha condicion de $x=0$ trae consigo la de $p=0$, este término tendrá por espresion

$$(-1)^{\nu}\times 2.3\ldots(N'+N)\times\Sigma P.\frac{B^{\left(\frac{\Delta^{(N'+N)}}{\Delta^{N}}\right)}}{2.3\ldots\Delta N}$$

de donde vendrá la relacion siguiente entre los coeficientes de una serie cualquiera y los de su inversa

$$2.3\ldots(N'+N)\times\Sigma P\frac{B^{\left(\frac{\Delta^{(N'+N)}}{\Delta^{N}}\right)}\Delta N}{2.3\ldots\Delta N}$$

$$=\Sigma(-1)^{m}\times\frac{N(N+1)\ldots(N+N'+m-1)}{A^{N+N'+m}}\times\Sigma P\frac{A^{\left(\frac{\Delta^{(N'+m)}}{\Delta^{m}}\right)}\Delta m}{2.3\ldots\Delta m}$$

Las series que hemos dado á conocer tienen la ventaja de ofrecer el desarrollo de una misma funcion en sentido inverso, por cuanto la operacion de integrar es inversa de la de diferenciar, y tienen alguna semejanza con las que se obtendrian del desarrollo de un polinomio elevado á una potencia negativa, tomando para denominador de los diversos términos uno ú otro de los monomios de que él consta. Bajo este aspecto, profundizando su estudio podria tal vez deducirse alguna consecuencia útil, aun respecto de aquellas series para las que, ni para sus coeficientes diferenciales, se conoce representacion en algoritmos de forma finita.

Al final del núm. (89) hemos dicho, que si dos raices de una ecuacion, en circunstancias determinadas, forman un factor real del segundo grado, deberán formarlo asimismo en todos los casos. Esto podrá acaso no ser exacto, porque suponiendo que sean estas raices $\alpha+\varepsilon\sqrt{-1}$ y $\alpha-\varepsilon\sqrt{-1}$, al hacerse reales se convertirán en $\alpha+\varepsilon$ y $\alpha-\varepsilon$, y podrá tal vez suceder, que dando otros valores á los coeficientes de la ecuacion propuesta, las cantidades α ó ε se hagan imaginarias, tomando la forma $\alpha'+\alpha''\sqrt{-1}$, $\varepsilon'+\varepsilon''\sqrt{-1}$, en cuyo caso no formarian ya las raices dadas un factor de segundo grado; mas siempre

sucederá, que si una de dichas raices, siendo real se hace imaginaria, se ha de hacer tambien imaginaria su correspondiente, de modo que los grupos de á dos raices que en una ecuacion dada forman los factores reales del segundo grado, se han de combinar siempre entre sí para formar los mismos ú otros factores reales; y que en una ecuacion de grado impar habrá un factor de primer grado que nunca podrá hacer parte de esta combinacion, y por tanto permanecerá siempre real, y será dado por la serie de inversion que hemos dado á conocer, segun lo establecimos en el número (88).

Miranda de Ebro á 31 de octubre de 1850.

Francisco Marron.

INDICE

de las materias contenidas en esta 1.ª parte del tomo 2.º de Memorias.

Páginas

Discurso sobre la importancia filosófica de la Química, considerada en su historia y en sus relaciones con otras ciencias que, como ella, tienen por objeto el estudio de la naturaleza: *leido por el Dr. D. Manuel Rioz y Pedraja en el acto de su recepcion de Académico.* 7

Discurso sobre el inmenso desarrollo que desde el siglo XVII han recibido las matemáticas, manifestando su íntima asociacion con la Física, é indicando los trabajos de las Academias: *leido por el Excmo. Sr. D. Manuel Monteverde en el acto de su recepcion de Académico.* 19

Discurso en que se manifiesta que las condiciones que la España reune por su posicion geográfica y su topografía física en favor de los progresos de las ciencias, son y han sido en todos tiempos numerosas y privilegiadas: *leido por el Excmo. Señor D. Antonio Remon Zarco del Valle, Presidente de la Academia, al contestar á los dos discursos anteriores.* 29

Discurso sobre la aparente sencillez del organismo vegetal: *leido por el Sr. D. José Martin de Leon en el acto de su recepcion de Académico.* 39

Discurso acerca del contrapeso que las ciencias de la naturaleza, y señaladamente la química, ejercen con sus pasmosos adelantamientos sobre los males que aflijen á la humanidad: *leido por el Sr. D. Juan Pou y Camps en el acto de su recepcion de Académico.* 53

Páginas.

Memoria sobre la forma mas conveniente de los triángulos geodésicos: *por el Sr. D. Antonio Terrero, Académico numerario en la seccion de ciencias exactas*. 77

Astronomía.=Del tiempo. *Memoria escrita por el mismo Señor Terrero*. 85

Elementos de cronología analítica: *por el Sr. D. José Sanchez Cerquero, Académico numerario en la seccion de ciencias exactas*. 107

Teoría sobre la resolucion general de los problemas algebráicos por medio de las series: *por el Sr. D. Francisco Marron, corresponsal de la Academia, Teniente Coronel graduado, Comandante efectivo y Capitan de Ingenieros retirado*. 253

ERRATAS.

Pág.	Lín.	Dice.	Léase.
101	23	antes de Jesucristo	despues de Jesucristo.
237	16	$A_a^{(h'')})$+&c.	$+A_a^{(h'')})\times$&c.
248	7 y 8	Falta añadir á continuacion del valor de $A^{(N)}$ la llamada ... (b)	
249	4	$a^{(h')'m}\times a^{(h'')}\Delta''^m$	$a^{(h')}\Delta'^m\times a^{(h'')}\Delta''^m$
317	*última*	$\Sigma\Delta'(N+1)\times a(\Delta'^1)^N+.a(\Delta^N)$	$\Sigma\Delta'(N+1)\times a(\Delta'^N+1).a(\Delta^N)$
342	7	$\Sigma\times$...	$\times\Sigma$...
343	12 y 14	$A^{[\Delta_r(N''-2)]}$	$A^{[\Delta_r(N_r''-2)]}$
357	5	$\left(\frac{\angle(N_r''-1)}{\angle q}+1\right)\angle q$	$\left(\frac{\Delta(N_r''-1)}{\Delta q}+1\right)^{\Delta q}$
366	5	$N_r''-1-\angle_r''(N_r'''-q'+1)$	$N_r''-1+\Delta_r''(N_r'''-q'+1)$
395	*penúlt.*	y en la $4.^a\frac{1}{1-x^{k-1}}=$	y en la $k.^a\frac{1}{1-x^{k-1}}=$
448	7	de la variable $\frac{\Delta H}{\Delta n}$	de la variable $\frac{\Delta N}{\Delta n}$
Id.	8 y 9	$H+m-1+1\times n=H+m+n-1$	$N+m-1+1\times n=N+m+n-1$
450	13	$=a+\Sigma f(0,\ h,\ h',\ h'',$ &c.)	$=a+\Sigma f(0,\ h,\ h',\ h'',$ &c.)
475	2	$\int l.l.x dx=l.l.x+x[l.l.x+\Sigma$...	$\int l.l.x dx=-l.l.x+x[l.l.x-\Sigma$...
476	11	$\frac{d^Nx}{dp^N}=\frac{1}{1.6}\times(-1)^N\times\frac{2.3...(N-1)}{p^N}$	$\frac{d^Nx}{dp^N}=\frac{1}{l.b}\times(-1)^N\times\frac{2.3...(N-1)}{p^N}$
477	2	$\int(l.x)^m=$	$\int(l.x)^m dx=$

La ecuacion

488 16 y 17

$$\frac{1}{l.a}\Sigma\frac{2.3...(N-1)}{p^N}\times\int^N f(p)dp^N+const.=$$
$$=\left[\frac{l.p}{l.a}.\Sigma(-1)^n p^n-\frac{1}{l.a}\Sigma p.^nC^{(n)}\right]\times\frac{1}{2.3...n}\times\frac{d^nf(p)}{dp^n}$$

debe leerse

$$\Sigma\frac{2.3...(N-1)}{p^n}\times\int^N f(p).dp^N+const.=\Sigma\frac{(-1).^np^n}{2.3...n}\times\frac{d^nf(p)}{dp^n}\times(l.p-C^{(n)})$$

Pág.	Lín.	Dice.	Léase.
543	19	$\ldots B^{(m)}.\frac{l^m}{S_m}$	$\ldots B^{(m)}=A^{(m)}.\frac{l^m}{S_m}$
553	*última*	Añádase bajo los dos signos de integracion dp^n	
559	11	$\Sigma\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+1)}{2.3\ldots r}\times\ldots$	$\Sigma\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+2)}{2.3\ldots r}\times\ldots$
562	3	$-\frac{x^2}{2}.x.\frac{d^{n+1}p'}{dp^{n+1}}$	$-\frac{x^2}{2}.x.\frac{d^{n+3}p'}{dp^{n+3}}$
563	*última*	$\int^{N+n} f(e^x)^{N+n}\times d(e^x)^{N+n}$	$\int^{N+n} f(e^x).d(e^x)^{N+n}$

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DE MADRID.

TOMO II.

PRIMERA SERIE.—CIENCIAS EXACTAS.

TOMO 1.°—PARTE 2.ª

Bon
1563.

DISCURSO

SOBRE

EL ORIGEN Y PROGRESOS DE LOS INSTRUMENTOS DE ASTRONOMIA Y GEODESIA

LEIDO POR

EL SR. D. CARLOS IBAÑEZ É IBAÑEZ

EN EL ACTO

de su recepcion de Académico numerario el dia 8 de Marzo de 1863.

Señores:

No extrañeis que la emocion embargue la voz de quien por primera vez se presenta ante un concurso tan respetable, con el espíritu agitado por diversas sensaciones. La gratitud por la honra que dispensais á mi escaso merecimiento; el recuerdo del sábio á quien sustituyo; lo elevado de vuestras tareas; un sentimiento de fundado recelo; todo se agolparia á confundirme, si no contase con que siempre andan unidas la sabiduría y la indulgencia, viéndolas aquí personificadas en el venerable General (1), bajo cuya paternal direccion dí, como militar, los primeros pasos en mi carrera.

Al cumplir hoy un precepto de los estatutos, intento únicamente presentaros una débil muestra de la voluntad con que me asocio á vuestros trabajos, impulsados con tanto empeño por el Ilmo. Sr. D. Gerónimo del Campo, cuya vacante me habeis llamado á ocupar. Este

(1) El Teniente General D. Antonio Remon Zarco del Valle, Presidente de la Academia.

sábio ingeniero, lumbrera del Cuerpo de Caminos, alcanzó desde muy jóven la rara distincion de ser elegido para la enseñanza de los ramos más importantes de las matemáticas, á cuya difícil tarea se consagró durante el largo espacio de veinte años. Con su vasto saber é incansable laboriosidad conquistó, como en esta Academia, un puesto de distincion en otras asambleas científicas y literarias, siendo una de ellas la Comision encargada de ejecutar los trabajos geodésicos del mapa de nuestro pais, á la que perteneció como vocal de su Junta consultiva. Lícito me será, puesto que tengo la honra de contarme entre los individuos que formaron esta Comision desde su orígen, rendir público y merecido testimonio de respetuoso dolor á tan esclarecido matemático, uniendo mis pobres alabanzas á las que unánimes resuenan en cuantas Corporaciones tuvieron la fortuna de apreciar sus talentos.

La memoria de mi antecesor acrece aún más la desconfianza con que vengo á sentarme entre vosotros, ocupando ántes vuestra atencion por cortos instantes en acatamiento á la costumbre establecida. Indeciso anduve en la eleccion del tema: me los ofrecia fecundos la variedad de mi servicio como ingeniero militar; pero dedicado exclusivamente en los últimos años al estudio y práctica de la geodesia y de las ciencias que con ella se enlazan, encuentro en su dilatado campo mayor facilidad, ya que no mejores condiciones de acierto. Voy pues á recordaros, en brevísima reseña, el orígen y progresos de los principales instrumentos de astronomía y geodesia, así como la influencia que han tenido en los adelantamientos de ambas ciencias. Y para evitar lo que en mí pudiera haber de atrevimiento, internándome en los dominios de la astronomía, me ceñiré estrictamente á considerarla bajo el punto de vista práctico y en sus relaciones con la geodesia, sin otro objeto que el de coordinar estos desaliñados apuntes.

Pasada la época de la astronomía puramente contemplativa, cuando el hombre se contentaba con admirar la magnificencia de la bóveda celeste, y deducir algunas consecuencias de la repeticion de los fenómenos que se presentaban á su vista; trascurrido igualmente el grande intervalo de tiempo en que los acontecimientos notables se referian á dia determinado con arreglo á períodos más ó menos inexactos, co-

mienza la observacion de los astros con el auxilio de los primeros instrumentos destinados á la medicion del espacio y el tiempo.

Desde la más remota antigüedad era ya conocido el gnómon, que en su primitiva sencillez puede considerarse más bien como tomado de la naturaleza misma que como una verdadera invencion del hombre. Trasladándonos rápidamente á tiempos ménos ignotos, y deteniendo nuestra vista en las vastas comarcas del Asia, favorecidas por un cielo siempre despejado, veremos al pueblo caldeo, asíduo observador de los fenómenos celestes, dividir el zodíaco en doce signos, empleando las observaciones de ortos y ocasos de Sol, y midiendo el tiempo con clepsidras ó relojes de agua, al paso que el gnómon y el hemisferio hueco proporcionaban, consultados en dilatada série de observaciones, el conocimiento de la duracion del año, que ya otros pueblos más antiguos habian empezado á determinar.

Todas estas tentativas, dirigidas por el sentimiento investigador de los caldeos, no llegaron á constituir una ciencia, y es preciso recurrir á Grecia para encontrar la cuna de la verdadera astronomía, fundada en teorías que enlazan entre sí los diferentes hechos observados aisladamente, los esplican, proporcionan los medios de calcular su reaparicion y de conocer las dimensiones, las distancias y los movimientos de los cuerpos celestes. La célebre escuela de Alejandría nos ha legado, desde tres siglos ántes de la era cristiana, algunas declinaciones de estrellas, observadas por Aristillo y Timocaris con las armillas solsticiales, instrumentos que Eratóstenes popularizó, estableciéndolos con las ecuatoriales en el pórtico de Alejandría, donde sirvieron para determinar la oblicuidad de la eclíptica; habiendo contribuido en gran manera al adelantamiento de la astronomía. La geodesia debe igualmente al mismo instrumento la conocida determinacion de la magnitud del grado terrestre por Eratóstenes: con él observó la distancia solsticial en Alejandría, que le sirvió para deducir la amplitud del arco celeste comprendido entre esta capital y Siene; y es muy notable que el astrónomo griego, aunque llegó á un resultado erróneo, debido á los elementos inexactos que introdujo en su cálculo, partió del mismo principio que los modernos, armados de poderosos y delicados instrumentos, han aplicado

diez y nueve siglos despues para conocer las dimensiones de nuestro planeta.

El nombre de Arquímedes, inseparable de las primeras conquistas de la geometría y de la mecánica, se ve igualmente asociado al de los más distinguidos astrónomos de su época, habiendo determinado el diámetro del Sol por medio de su ocultacion con un cilindro que se movia á lo largo de una regla, y averiguando despues gráficamente el ángulo subtendido: procedimiento que manifiesta el estado á que se hallaba reducida la astronomía práctica, por carecer de instrumentos adecuados y de métodos trigonométricos para someter al cálculo los resultados obtenidos.

El genio de Hiparco vino en ayuda de la ciencia astronómica, imprimiéndole con sus descubrimientos nuevo impulso, y elevándola á la mayor altura que en la antigüedad pudo alcanzar. Su primer cuidado fué repetir las observaciones hechas anteriormente, perfeccionando los instrumentos con la introduccion de las alidadas y pínulas que, permitiendo dirigir la visual con más exactitud, minoraron considerablemente los errores de puntería. Así determinó de nuevo el diámetro del Sol, valiéndose de su dioptra que le sirvió despues para interesantes trabajos. La observacion asidua de la Luna le hizo fácilmente advertir la desigualdad de su distancia á las estrellas, segun la altura de aquella sobre el horizonte, lo que le condujo al importante descubrimiento de la paralaje, y al método de medir la distancia de los planetas á la Tierra. Durante algunos años se valió el sábio astrónomo de las armillas ecuatoriales para observar la ascension recta y declinacion de los astros, coordenadas que transformaba en longitud y latitud por los métodos que inventó en aquella época, y que forman la base de la moderna trigonometría esférica: pero deseando llegar al mismo resultado sin pasar por los penosos cálculos que exigia la transformacion, imaginó el astrolabio armilar, que le proporcionaba directamente los elementos con que formó el catálogo de 1080 estrellas, el primero que con tal nombre merece citarse. Comparando las posiciones así determinadas con las que se deducen de las observaciones de Timocaris, reconoció 120 años ántes de nuestra era la precesion de los equinoccios, descubrimiento que por sí solo bastaria para inmortalizar su nombre.

Cerca de tres siglos trascurren sin que la astronomía experimente el más leve progreso, hasta que Ptolomeo, utilizando los trabajos de Hiparco, y verificando por sí mismo algunas observaciones, compone sus célebres obras, depósito precioso de la sabiduría astronómica de la antigua Grecia. El cuadrante de círculo y las reglas paralácticas que median la cuerda de la distancia zenital del astro, fueron los instrumentos que con el astrolabio armilar de Hiparco sirvieron á Ptolomeo para sus observaciones, coronadas con el importante descubrimiento de la refraccion astronómica, cuya teoría física expone en uno de sus últimos escritos. Con la invencion de su planisferio nace el nuevo astrolabio portátil, instrumento que, modificado sucesivamente con el uso de distintas proyecciones, ha prestado grandes servicios á la astronomía, á la geodesia y muy particularmente á la navegacion.

Para seguir los progresos más notables de la astronomía práctica, forzoso nos será, salvando una laguna de siete centurias, durante las cuales el estruendo de los combates absorbia con sobrada frecuencia la atencion de los hombres, volver de nuevo la vista hácia las comarcas bañadas por el Eufrates, cerca de la antigua Babilonia, donde los árabes, aleccionados por los escritos de los griegos, se dedicaban con ardor al estudio de la sublime ciencia de los astros. Iniciados en las antiguas teorías, multitud de observadores, protejidos por ilustrados príncipes, se ocupaban en preparar cuadrantes de círculo y sextantes de extraordinarias dimensiones, dirigiendo su construccion y la division de sus limbos, que superó bien pronto en exactitud á la de los griegos. Tambien dedicaron su actividad é inteligencia al trazado de las proyecciones de la esfera, aplicadas á los astrolabios portátiles para determinadas latitudes, de los cuales se conservan algunos muy notables, construidos en España, que dan idea del estado en que se hallaban entre nosotros las artes hace 800 años (1). La medicion del tiempo, objeto de los trabajos del griego Ctesibio, que llegó á perfec-

(1) Existe en la Biblioteca Nacional un pequeño astrolabio árabe de 24 centímetros de diámetro, construido en Toledo por Alhakem Ibrahim Said Almuazeni Absahli en el año de 1067.

cionar notablemente las clepsidras, haciendo aplicacion de los adelantamientos que la mecánica debió á la escuela de Alejandría, fué considerada con grande interés por los árabes que, adoptando el método de calcular el tiempo verdadero por el ángulo horario, observaban la altura de un astro en el momento de presentarse el fenómeno que deseaban estudiar. Alkoresmi, reemplazando las cuerdas con los senos; el célebre Albatenio observando la oblicuidad de la eclíptica, los equinoccios y el cambio del perigeo solar; el astrónomo Ebn-Junis, corrigiendo las tablas griegas con sus observaciones de eclipses y de conjunciones de planetas y estrellas, é imaginando la sustitucion del gnómon ordinario con el de taladro; el sabio Azarquiel, que á fines del siglo XI inventaba en Toledo su *azafeha* ó astrolabio universal, fundado en una nueva proyeccion de los círculos de la esfera; el matemático Geber, que proyectaba poco despues en Sevilla un complicado instrumento armilar, conocido con el nombre de *machina collectitia;* el ilustre Alhazen, cuya óptica trata ya extensamente de los efectos de la refraccion; y tantos otros árabes distinguidos, conservaron los conocimientos astronómicos de los griegos, trasmitiéndolos á Europa enriquecidos con abundantes observaciones, cuya precision era superior á la que alcanzaron en la antigüedad.

El precioso tesoro de conocimientos científicos acumulado por los árabes, fué acrecentado considerablemente por los españoles en el memorable reinado del sábio Don Alfonso de Castilla, que llegó á ser aurora del nuevo dia, á la que debian seguir los vivísimos resplandores del astro de la ciencia, como la astronomía de los griegos fué, al decir de un escritor moderno, crepúsculo de la tarde que precedió á una noche de muchos siglos. Entre los importantes trabajos de la Academia toledana presidida por el mismo Príncipe, y á la par de sus célebres tablas astronómicas, descuella el notabilísimo códice *Del saber de astronomía*, que ha sido objeto de las tareas de esta Corporacion, y que publicado por el Gobierno de S. M., sacará del olvido los esfuerzos de nuestros antepasados para el adelantamiento de la ciencia, y lo que esta debe á los sábios toledanos del siglo XIII. Léjos de contentarse con practicar la astronomía en el estado en que la hallaban, y deseando

ante todo difundir la instruccion, legando á las edades futuras el fruto de sus vigilias y de su ingenio, comienzan por verter al romance vulgar, «*faciendo libros que non moriessen con ellos*,» los tratados más notables de los árabes, dándoles la forma que reclamaban los progresos posteriores á su composicion, ó corrigiendo y completando con nuevos instrumentos y mas hábiles prácticas lo que hallaban erróneo, incompleto ú oscuro. Don Alfonso, que se distinguia por la gala de la expresion y elegancia del lenguaje, compuso al parecer los prólogos de sus libros de astronomía, y corrigió los escritos de sus sábios colaboradores, exponiendo con aquella claridad propia de la verdadera ciencia, los principios fundamentales que mandaba desarrollar á cada uno de los astrónomos de su Corte. De las diez y seis partes en que se divide el códice, solo la primera y novena son en cierta manera agenas á los aparatos astronómicos, esplicándose en las demás el tratado de la esfera ó *alcora* de los árabes, su combinacion con los círculos principales para la observacion, el astrolabio *redondo*, el *llano*, la *lámina universal*, la *azafeha* de Azarquiel, las diferentes *armellas*, el cuadrante vertical, y cuantas observaciones astronómicas se pueden ejecutar con tales instrumentos, dando reglas claras y precisas para su construccion y manejo. Otros libros se hallan exclusivamente consagrados á la medicion del tiempo, con aplicacion á la astronomía, y entre los relojes solares, clepsidras perfeccionadas y aparatos más ó ménos ingeniosos, que recibian los nombres de *relogio de la piedra de la sombra*, *relogio dell agoa* y *relogio de la candela*, se halla la descripcion del *relogio dell argent uiuo*, que presentando la idea del *volante*, y una especie de *escape* que ha podido ser orígen de los modernos, es importantísimo bajo el punto de vista histórico. Fundándose tan solo en una inscripcion sepulcral que atribuia á Pacífico, Arcipreste de Verona, la construccion de un *reloj nocturno*, han supuesto algunos autores que este eclesiástico del siglo IX habia inventado el reloj de máquina movido por un peso; pero entre otros escritores, Falconnet ha hecho notar que el adjetivo *nocturno*, aplicado ya por Casiodoro á las clepsidras, no podia dar lugar á tal deduccion; quedando completamente desconocido el inventor del relój dinámico, así como el primer constructor del escape, mecanismo inge-

nioso que puede considerarse como base de la moderna relojería. El aparato astronómico de D. Alfonso contiene además de las ruedas movidas por un peso, un volante de mercurio que oscila en un plano vertical; oyéndose el sonido de las horas cuando una palanca, semejante al brazo de las balanzas, deja en libertad de girar á la linterna que comunica con las campanas, las cuales cesan cuando la misma palanca, solicitada por un peso, *escapa* de cada uno de los dientes de la gran rueda de las horas (1). En suma: los trabajos de la Academia toledana, dignos de una descripcion especial que no puede encerrarse en el reducido cuadro de este rápido bosquejo, dan la medida del ingenio y erudicion de aquellos astrónomos. Poned en sus manos los instrumentos que las artes han creado en las edades modernas, y la astronomía práctica hubiera tomado inmenso vuelo, y ocupado en Castilla, durante el siglo XIII, el lugar que alcanzó algunas centurias despues en comarcas muy distantes de la imperial Toledo.

Extendidas sucesivamente por Europa las nociones astronómicas, se imaginan nuevos aparatos, se presentan hipótesis, y va levantándose lentamente el grandioso edificio científico de las modernas generaciones. A mediados del siglo XV, Purbach, Regiomonte y Walter se distinguen en Alemania por sus esfuerzos en pro del adelantamiento de la astronomía práctica, mandando fabricar primero los instrumentos de Ptolomeo y la ballestilla, muy usada posteriormente en la mar, é imaginando despues el cuadrado geométrico, que media los senos de los ángulos observados, y el célebre *torqueto*, aparato complicado, que por su defectuosa construccion no prestó los servicios que de él se esperaban.

---

(1) «Et despues arma el cerco yguador de guisa que se alleguen los cabos de »las estacas luengas que hy pusistes al cabo del braço del peso do es colgado el »plomo. et que trauen dél. et que lo alçen por su movimiento. et que quando se »alçare este cabo abaxarse ell otro. et soltarse a el açenña de las campaniellas. »et mouersa et tañersan las campaniellas tañiendo fata que escape el cabo del »braço del peso de la estaca que lo fizo alçar. et abaxarsa. et supra ell otro cabo »et trabara dell açenña de las campaniellas et retenersa et quedarán las campa»niellas de se tañer fata que se allegue la segunda estaca que es en pos de la »primera. que fará assí cuemo fizo la primera (et esta es su figura).»

Tambien Copérnico intentó, perfeccionando los medios de observacion, allegar resultados numéricos para compararlos con los antiguos y comprobar las diversas teorías; pero sus instrumentos solo le condujeron á determinaciones imperfectas: que si este grande hombre consiguió con la profundidad de sus concepciones introducir una verdadera revolucion en la astronomía, no pudo crear las artes mecánicas, que en sus adelantamientos sucesivos habian de ser el auxiliar mas poderoso de la ciencia.

Conocidas por los chinos las propiedades de la aguja imanada, y aplicada esta á la navegacion desde los primeros siglos de nuestra era, adquirieron los árabes en su comercio con los pueblos del Asia algunas nociones de tan útil invento, que pasando despues á Europa, donde se cita ya como muy usado en las sábias leyes del Rey D. Alfonso (1) y en los cantos inmortales del Dante (2), sirvió de clara antorcha en las grandes empresas navales, llevadas á cabo por los españoles y portugueses durante los siglos XV y XVI. Miéntras Colon iba en busca de un nuevo continente que agregar á los dominios de la corona de Castilla, observaba con la mayor atencion cuantos fenómenos se presentaban á su vista; y hallándose á 200 leguas al Oeste de la isla de Hierro, advirtió que la direccion de las agujas de marear sufria grandes alteraciones, pasando del Nordeste al Noroeste, y cruzando por lo tanto una línea sin declinacion, cuyo importante descubrimiento fué el orígen de los trabajos hechos en Europa sobre el magnetismo terrestre. La brújula de declinacion, tan perfeccionada por los artistas modernos, fué inventada en 1525 por Felipe Guillen, entendido farmacéutico de Sevilla, que intentó determinar las longitudes en la mar por la variacion de la aguja;

---

(1) «E bien assí como los marineros se guian en la noche escura por el aguja, »que les es medianera entre la piedra e la estrella, e les muestra por do vayan, »tambien en los malos tiempos, como en los buenos.....» 2.ª Partida, tit. IX, ley XXVIII.

(2) «Del cuor dell' una delle luci nuove
»Si mosse voce, che l' ago alla stella
»Parer mi fece in volgermi al suo dove.»
(*Il Paradiso*, Canto XII.)

teniendo presentes sus ensayos el cosmógrafo Alonso de Santa Cruz, en los estudios que emprendió cinco años despues para la formacion del primer mapa general de las variaciones magnéticas: trabajos seguidos de otros no ménos notables, entre los que figura el viaje de Juan Jaime desde Manila á Acapulco en 1585, verificado sin mas objeto que el de experimentar el instrumento que habia imaginado para el estudio de las curvas de declinacion, y las importantísimas observaciones ilustradas con los nombres de Halley, Eulero, Buffon, Humboldt y otros sábios de nuestro siglo.

La marcha seguida por la astronomía práctica era todavía muy lenta, cuando vino á imprimirle un poderoso impulso el ilustre Tycho-Brahe, cuyo inmenso caudal de observaciones preparó el inmortal descubrimiento de las leyes de Képlero. Comprendiendo que en los instrumentos de grandes dimensiones, la solidez y la estabilidad son las condiciones mas esenciales para obtener resultados precisos, concibió el grande observador dinamarqués la idea del cuadrante mural de siete pies de radio, que hizo asegurar permanentemente en direccion del meridiano; perfeccionó las pínulas para obtener punterías menos erróneas; y subdividiendo el limbo de metal por el sistema de transversales, aplicado ya en el siglo XV á la ballestilla ó báculo de Jacob, consiguió apreciar hasta los arcos de cinco segundos. Sus sextantes astronómicos de seis pies de radio, divididos en cuartos de minuto, eran de dos clases: unos exclusivamente destinados á la determinacion de la altura del astro observado en un plano vertical; y otros, que llamaba de distancias, se montaban en una esfera que facilitaba los movimientos, ejecutándose la observacion, lo mismo que en el *arcus bipartitus*, por dos personas á la vez. Los grandes cuadrantes de siete pies de radio, divididos de diez en diez segundos, giraban al rededor de un eje vertical, y servian igualmente para la observacion del azimut, por medio de un círculo dividido en minutos y asegurado en la parte superior del muro de la torre, cubierta ya con una cúpula giratoria. El diámetro de sus armillas ecuatoriales era generalmente de seis pies, pero llegó á construir un aparato armilar compuesto tan solo de un círculo dividido en cuartos de minuto, con un semi-ecuador de veintidos pies de diámetro.

Tambien usó otro sextante portátil, cuyas alidadas se movian lentamente por medio de un tornillo, que da la primera idea del moderno de coincidencia; habiendo imaginado además un pequeño cuadrante vertical subdividido por el sistema de circunferencias concéntricas, descrito ya por Nuñez desde 1542, con círculo azimutal y tornillos en el pié para situar verticalmente el eje de rotacion, de la manera que se practica en nuestros dias. Pero lo que hace mas interesante la época de Tycho, es que de ella data la rectificacion de los instrumentos, que tanta importancia ha adquirido en los tiempos modernos, y sin la cual, combinada con el estudio de todas las piezas que los constituyen, y con los procedimientos imaginados para conocer ó eliminar los errores de construccion, no es posible alcanzar la deseada exactitud. Todos estos cuidados y las innumerables dificultades que encontraba á cada paso para realizar sus ideas respecto á la perfeccion de los aparatos, le inspiraron esta exclamacion: «*Un buen instrumento es el fénix de la Arabia.*» Siguió, no obstante, avanzando con la mayor perseverancia por el camino que habia elegido, llegando á reunir en su famoso observatorio de Uraniburgo la más rica coleccion de goniómetros y de relojes de segundos que hasta entónces se habia conocido; así como el fruto de diez y siete años de incesantes trabajos, entre los cuales se distinguen su célebre catálogo de estrellas, y la discusion de las observaciones solares, en que por primera vez tomaba en cuenta el valor de la refraccion atmosférica, deducido, aunque imperfectamente, de sus propias determinaciones.

Al mismo tiempo que Tycho-Brahe asentaba la astronomía práctica sobre sólidas bases, observaba en España el cosmógrafo Andrés de Céspedes con un cuadrante de su invencion dividido directamente en minutos, comparando sus determinaciones con las de Bartolomé de la Gasca y del licenciado Caravallido, que hacian uso en Valladolid de un gnómon de 120 pies de altura, y con las del doctor Sobrino, diligente observador, que poseia un gran cuadrante de metal, cuya graduacion era muy celebrada. El distinguido maestro Gerónimo Muñoz se dedicaba igualmente á las más difíciles observaciones, cuyos resultados introducia en sus cálculos el célebre astrónomo de Uraniburgo; y el nuevo planisferio de Juan de Rojas, aplicado á su ingenioso astrolabio

universal, era de dia en dia más apreciado por los observadores de mar y tierra. La construccion de instrumentos astronómicos habia sido muy alentada por el Rey D. Felipe II, de cuya órden se formó en el monasterio del Escorial una numerosa y variada coleccion de toda clase de aparatos, procedentes de los talleres españoles y de los que el Gobierno sostenia en Flandes, atendiendo á la importancia que los escritores de náutica, y entre ellos Pedro de Medina, daban á los instrumentos para guiarse en medio de los horribles temporales á que se veian expuestos los marinos en la carrera de Indias. Algunos aparatos de esta época que han llegado hasta nosotros perfectamente conservados (1), manifiestan lo adelantada que se hallaba su fabricacion; siendo notable, por su finura y exactitud, el grabado de las diferentes *láminas* en los astrolabios de grandes dimensiones.

Con la aplicacion de estos instrumentos perfeccionados, y de procedimientos seguros para medir en toda clase de terrenos las distancias terrestres por medios trigonométricos, dió la geodesia un gran paso, saliendo del estado de abatimiento en que yacia. Pedro Esquivel en España con los aparatos de su época, mas tarde Snell en Holanda con los medios de observacion imaginados por Tycho-Brahe, y el geógrafo Blaeu, discípulo de este último y autor del magnífico *Atlas universal y cosmográfico de los orbes celestes y terrestres*, dedicado á Felipe IV de España, fueron los primeros que entraron en la nueva senda, abierta á los trabajos relativos á la determinacion de la figura y dimensiones del planeta que habitamos.

Dedicado Képlero con singular empeño á los estudios astronómicos, y disponiendo de las observaciones originales y preciosos documentos de Tycho, llega, despues de laboriosos trabajos y profundas meditaciones, á los descubrimientos que harán pasar su nombre á la más remota posteridad, y que forman hoy una de las épocas mas memorables de la

---

(1) En la Biblioteca Nacional se custodia un astrolabio de 59 centímetros de diámetro, dividido en sextas partes de grado, y dedicado al Rey D. Felipe II por el sobrino del célebre Gemma Frisio, Gualtero Arsenio, que lo construyó en Lobayna, año de 1566.

historia de la astronomía. Entre los eminentes servicios que este grande hombre ha prestado á la ciencia, atañen más directamente al asunto que nos ocupa, la teoría de la vision, fundada en las propiedades del cristalino, que le permitieron esplicar satisfactoriamente la formacion de las imágenes que se pintan en la retina, y las causas de la claridad ó de la confusion con que se distinguen los objetos; los principios generales sobre la refraccion, que condujeron al célebre Snell al descubrimiento de su importante ley; y por último, las fórmulas usadas aún en nuestra época para calcular en determinados casos la distancia focal de las lentes, conocidas desde algunos siglos ántes, y que tanto habian de contribuir á los rápidos progresos de la astronomía en los últimos tiempos.

El siglo XVII, fecundo cual ninguno en inventos aplicables á perfeccionar más y más la observacion, estaba llamado á presenciar el cambio radical de la astronomía y de la geodesia, la inesperada exactitud de las determinaciones y el nacimiento de la astronomía física, nueva rama de la ciencia que habia de crecer y extenderse prodigiosamente en los dos últimos siglos. Miéntras Képlero en Alemania daba cima á sus grandes descubrimientos, un modesto fabricante de lentes en Middleburgo, debia, segun parece, á la casualidad, la invencion que ha cambiado por completo la faz de la astronomía. Los Estados generales de Holanda examinaban en el año de 1608 el nuevo instrumento de Lippershey, *destinado á ver desde léjos:* este instrumento, era el anteojo.

Difundida por Europa la noticia de tan curioso invento, llega rápidamente á Italia, donde sin más noticias que las vagas indicaciones de la fama, halla bien pronto Galiléo la combinacion de las lentes convexa y cóncava, que constituian el nuevo instrumento: pero aunque en Holanda lo usan únicamente para la vision de los objetos terrestres, comprende el ilustre filósofo que en la exploracion del cielo han de encontrarse sus más vastas aplicaciones, y con el corazon lleno de esperanza, dirige el anteojo al firmamento. ¡Cuál fué su admiracion al descubrir cuerpos celestes cuya existencia no sospechaba; al convencerse de que hay un astro alrededor del cual circulan planetas secundarios, como lo

verifican alrededor del Sol los que de antiguo se conocian; al distinguir la constitucion de la via láctea; al ver, en una palabra, prodigiosamente ensanchado el vasto campo de la ciencia astronómica! Como el delicado instrumento del hábil operador abate la catarata que impide al ojo enfermo divisar los objetos, así el anteojo, penetrando al través de la atmósfera que nos circunda, y acortando como por encanto la inmensa distancia que separa los astros de la Tierra, permitió á Galiléo asistir al magnífico espectáculo vedado hasta entónces á los mortales. Tan grande fué la sorpresa causada por la relacion de los descubrimientos debidos al nuevo instrumento, que algunos filósofos, suponiéndolos efecto de una pura alucinacion, se negaron á dirigir al cielo el anteojo. No se cuenta ciertamente en este número á Képlero: á la primera noticia de la existencia de los pequeños globos que giran en torno de Júpiter, y que, corroborando las ideas del gran Copérnico, demostraban incontestablemente los principios generales del sistema solar, exclamó repitiendo las célebres palabras atribuidas al Emperador Juliano: *¡Vicisti, oh Galilæe!*

La combinacion de lentes con que se formó el instrumento holandés, á la que debemos los primeros descubrimientos en los espacios celestes, se hallaba sin embargo muy distante de satisfacer las vastas aspiraciones del hombre, ansioso de conocer la constitucion del universo, y estimulado por las conquistas hechas ya en sus imperfectas exploraciones. A medida que aumentaba la amplificacion del anteojo, disminuia rápidamente el campo de la vision, y era forzoso detenerse sin haber obtenido los resultados que se anhelaban. Al imaginar Képlero en 1611 la sustitucion de la lente cóncava con otra convexa, dió la primera idea del anteojo astronómico, cuya disposicion permite aumentar considerablemente sus dimensiones, y con ellas la amplificacion de los objetos observados; pero la circunstancia de presentarlos invertidos impidió tal vez su pronta y general adopcion, continuando durante más de treinta años el uso exclusivo del primitivo anteojo, que proporcionó sucesivamente el descubrimiento de las manchas del Sol, examinado ya entónces al través de un vidrio de color, la observacion de la primera nebulosa, la de las fases del planeta Vénus, la de los eclipses de los satélites

de Júpiter aplicada á la determinacion de la diferencia de longitudes geográficas, y el estudio de otros muchos fenómenos importantes de la física celeste.

El mismo anteojo de Galiléo adaptado á la cámara oscura, que permitia determinar gráficamente las posiciones de los astros y sus diámetros aparentes, fué el instrumento usado en Inglaterra por Horrockes para observar en 1639 la célebre conjuncion inferior de Vénus, anunciada por Képlero, que le daba grande importancia para el conocimiento de la extension de nuestro sistema, y de la magnitud de los principales cuerpos que lo componen. Poco ántes Morin, que fué el primero en observar los planetas y las estrellas cuando el Sol se hallaba sobre el horizonte, habia intentado dar una grande exactitud á las determinaciones astronómicas aplicando el anteojo á los instrumentos graduados; pero no era posible reemplazar las alidadas de pínulas miéntras no hubiese en el interior de aquel algun punto fijo á que referir la observacion. El P. Rheita contribuyó en gran manera á la solucion del problema, construyendo y dando á conocer en 1645 el anteojo astronómico de Képlero, cuyo ocular bi-convexo, amplificando cuanto se halla en el foco del objetivo, presenta la imágen de Júpiter, del que nos separan 140.000.000 de leguas, y que es 1.300 veces mayor que nuestro planeta, y permite observarla del mismo modo que el naturalista observa la constitucion del más diminuto de los insectos por medio del microscopio, cuya invencion es anterior á la del anteojo holandés.

Si bien en Inglaterra habia hecho Gascoigne desde 1638 varias séries de observaciones astronómicas con el auxilio del micrómetro, no fueron conocidos sus trabajos hasta despues de haber concebido el holandés Huyghens la idea de medir la imágen formada en el foco comun del objetivo y del ocular, para apreciar la magnitud del objeto observado. Antes de 1659 se valia ya este célebre astrónomo de un diafragma circular, cuyo diámetro aparente determinaba por el tiempo que una estrella empleaba en recorrerlo; y valiéndose de pequeñas lengüetas de distintas dimensiones, que introducia lateralmente en el anteojo hasta conseguir la ocultacion exacta del astro, obtenia su diámetro aparente, comparando la anchura de la lengüeta con la abertura

del diafragma. Tres años despues del invento de Huyghens imaginaba en Bolonia el Marqués de Malvasía el primer retículo conocido, que formado por una cuadrícula de hilos de plata muy finos, cuyas distancias aparentes determinaba, podia servir á la vez de referencia en las observaciones angulares y de micrómetro en las mediciones de pequeñas distancias; pudiendo considerarse esta invencion como el complemento indispensable de la idea de Morin, y por consiguiente como el orígen de las observaciones precisas. Faltaba, no obstante, enseñar á corregir el error de colimacion, lo que hicieron Picard y Auzout, perfeccionando además notablemente el micrómetro, que en 1666 se componia, como en nuestros dias, de varios hilos paralelos y uno transversal fijos, y de otro movible por medio de un tornillo, que ha tomado despues el nombre de *micrométrico;* pero no habiendo alcanzado en aquella época las artes mecánicas toda la perfeccion necesaria para conseguir la igualdad de los pasos de rosca, se usaba tan solo el tornillo para hacer marchar el bastidor, y en vez de contar en un tambor graduado las vueltas y fracciones correspondientes, se preferia generalmente determinar la separacion á que habian quedado los hilos por medio de una regla dividida con la mayor finura, y examinada con un microscopio.

Los cuadrantes y demás sectores de círculo, provistos de anteojos astronómicos con micrómetro, graduados cada vez con más exactitud, y subdivididos por líneas transversales, ofrecian á los astrónomos poderosos medios de observacion, que utilizaron con notable inteligencia Picard, Cassini y La-Hire en las determinaciones astronómicas y vastas operaciones geodésicas que llevan sus nombres. Asombro causa que en medio de la general aceptacion con que fueron recibidos los últimos inventos, llamados á hacer progresar rápidamente la ciencia, levantase su autorizada voz el astrónomo Hevel contra la sustitucion de las pínulas por el anteojo. A pesar de su obstinacion en este punto, prestó el célebre observador de Dantzick grandes servicios á la astronomía práctica, habiendo aplicado á sus numerosos instrumentos varias mejoras, tales como los movimientos lentos con tornillos de coincidencia, y el pequeño arco dividido que, para apreciar las fracciones de la graduacion, habia imaginado el geómetra Pedro Vernier. Algun autor ha atribuido el mérito

de tan útil invencion al P. Clavio, que resolvió en 1611 el problema de dividir gráficamente una recta en partes iguales, valiéndose de dos divisiones trazadas en su prolongacion, una en el mismo número de partes que deseaba obtener, y otra en una parte más; pero Vernier, en su tratado del nuevo cuadrante, que dedica en 1631 á la Infanta de España Doña Isabel, manifiesta que la novedad del instrumento consiste en el arco graduado que acompaña constantemente á la visual, y no en el principio aritmético que sirve de base á la subdivision, pues este es bien conocido de todo matemático, así como los demás sistemas en que es preciso hacer uso del compás ó de una multitud de circunferencias, con incertidumbre y confusion. Y en efecto, los instrumentos experimentaron un verdadero progreso, que todos los observadores han sabido apreciar, por lo que parece justo dar á tan sencilla pieza el nombre del inventor, como se hace ya en varias naciones: si bien se conoce en otras con el nombre latino del sábio portugués Nuñez, que empleó por primera vez las circunferencias concéntricas, y que por sus importantes trabajos ha alcanzado gran celebridad.

Aunque la astronomía no utilizó verdaderamente hasta el siglo XVIII los principales aparatos físicos destinados al estudio de la atmósfera, pertenece al siglo XVII la gloria de su invencion. El termómetro de alcohol, conocido desde algun tiempo ántes, y usado ya en 1641 para las observaciones de temperatura en varios puntos de Italia; el barómetro, descubierto tres años despues por Torricelli al comprobar las ideas de Galiléo sobre la ascension del agua en las bombas, ideas conformes con la opinion de Képlero, á quien la contemplacion de la naturaleza habia hecho decir en 1604 que nuestra atmósfera era pesada; el higrómetro, que aunque tan imperfecto en su orígen presentaba indicaciones interesantes, han venido á ser con frecuencia compañeros del astrónomo, é inseparables del observador dedicado al estudio del relieve del globo, en cuya investigacion tanta influencia tiene el estado de la atmósfera.

Dos nuevas é importantísimas invenciones vienen á aumentar el número de aparatos que ayudan á los astrónomos en sus delicados trabajos. Huyghens aplica en 1656 el péndulo á los relojes, y Gregory cons-

truye siete años despues el telescopio de reflexion, cuya idea habia ocurrido ya á Mersenne, aunque sin haberla publicado. El ilustre Galiléo empleó el péndulo simple para medir pequeños intervalos de tiempo; el matemático Vicente Mut determinó en Mallorca, ántes del año de 1640, la longitud del péndulo de segundos; y estos primeros ensayos condujeron al astrónomo holandés á su célebre aplicacion: pero geómetra profundo al par que diligente observador, investigó la forma de la curva que debia recorrer el péndulo para alcanzar el perfecto isocronismo de las oscilaciones; curioso problema cuya resolucion, inaplicable al objeto que la promovió, ha proporcionado el conocimiento de las propiedades de la cicloide. Formado por Gregory un aparato catóptrico, y reconocida la aberracion de refrangibilidad, superior á la producida por la figura esférica de las lentes, que Descartes habia intentado sustituir con la hiperbólica, se dedica el inmortal Newton al estudio de los aparatos de reflexion, construyendo por sí mismo un telescopio que regaló á la Sociedad Real de Londres el dia de su ingreso en aquella ilustre Academia: mostrando así que el cultivo de las matemáticas en sus más elevadas especulaciones, no está reñido con los trabajos mecánicos que las ciencias de observacion reclaman para su progresivo desarrollo.

De la misma época data el orígen de los goniómetros de reflexion, fundados en un principio tan sencillo como fecundo, que aplicado á los aparatos náuticos ha sido de incalculables ventajas para los progresos de la navegacion. Este invento, debido al doctor Hooke en 1681, fué perfeccionado por Newton veinte años despues; pero permaneciendo sin aplicacion durante más de diez lustros, no es extraño que se haya atribuido generalmente al astrónomo Hadley, que en 1731 lo dió á conocer en una publicacion especial, y dispuso la construccion de varios octantes con doble reflexion, que fueron reemplazados por los modernos sextantes. La relojería debe tambien al siglo XVII la aplicacion que hizo Huyghens en 1665 del muelle espiral, importante mejora introducida en los antiguos relojes, de los cuales se conserva alguno del tiempo de Cárlos V, en que una hoja de espada ejerce las funciones de resorte. El mismo astrónomo, al estudiar la doble refraccion

de la luz en un trozo de cristal de Islandia, descubrió en 1678 la polarizacion, y abrió así el camino en que han brillado muchos sábios distinguidos, contribuyendo al esclarecimiento de varios fenómenos de la astronomía física.

Reconocidas las ventajas de las circunferencias completas sobre los sectores de mayor ó menor número de grados, se establecieron círculos murales de grandes dimensiones; y la dificultad que presentaban estos en su construccion para servir de verdaderos instrumentos de paso, originó la feliz idea del anteojo meridiano con los actuales colimadores, publicada en 1700 por el dinamarqués Roêmer, que habia presentado veinticinco años ántes los primeros estudios sobre la propagacion de la luz, introduciendo además el uso del microscopio con micrómetro fijo para apreciar las fracciones de division en los limbos de los instrumentos: aplicacion que, perfeccionada sucesivamente, ha contribuido á la rapidez y exactitud de las observaciones modernas, llegando á generalizarse en los instrumentos astronómicos y en los usados para las operaciones de alta geodesia.

Los nacientes estudios sobre la constitucion física de los cuerpos celestes, exigian ya, desde principios del siglo que nos ocupa, perseverantes observaciones, durante las cuales se hallase siempre el astro en el campo de la vision, lo que dió orígen al uso del pié paralático para seguir el movimiento diurno con un anteojo que giraba alrededor de un eje paralelo al de rotacion de la tierra, como lo describió Scheiner en 1626, atribuyendo su invencion al P. Gruenberger. Pero este primer ensayo no bastaba para determinar el pequeño movimiento ánuo de las estrellas, observando sus declinaciones con el auxilio de aumentos considerables, porque era preciso que el anteojo se moviese por sí mismo suave y uniformemente, á imitacion del magestuoso movimiento que nuestros sentidos perciben en la bóveda celeste; resultado que ha llegado á conseguirse en las magníficas ecuatoriales conducidas por máquinas de reloj, que poseen hoy los principales observatorios de Europa y América.

El anteojo astronómico, el reloj de péndola, el telescopio y otros varios instrumentos de observacion; el descubrimiento de los cuatro

satélites de Júpiter, el del anillo de Saturno y de cinco de sus satélites; el de la rotacion del Sol, de Júpiter, de Vénus y de Marte; el achatamiento del segundo, las sublimes leyes del movimiento de los astros, y la de la atraccion universal, constituyen el rico presente que debe la astronomía al gran siglo de Képlero, de Galiléo y de Huyghens; de Fermat, de Newton y de Leibnitz.

Los rápidos progresos que hizo la astronomía durante esta época memorable, adelantándose á las demás ciencias con que se halla más íntimamente ligada, reclamaban de estas nuevos y poderosos auxilios. Desde el siglo XVIII se ve felizmente secundada la astronomía práctica por la física y la mecánica, y bien pronto se levanta vigorosa, acercándose con paso seguro al objeto de sus difíciles aspiraciones. La medicion del tiempo, que habia ya recibido del ilustre Huyghens el péndulo y el muelle espiral, reclamaba de la física un medio de evitar las contínuas variaciones que experimentaban los relojes por los cambios de temperatura: cincuenta y nueve años despues de aquella célebre aplicacion, intentaba Graham compensar el péndulo fundándose en la desigual dilatacion de los metales, que condujo en 1721 á la compensacion de mercurio, y poco despues á la rejilla de Harrisson; habiendo alcanzado tan importante mejora á los relojes marinos ó cronómetros, que ya mediado el siglo recibieron de Le Roy el volante circular compensado y el muelle espiral isócrono; elementos que con el escape libre del mismo constructor, perfeccionado por Arnold, Earnshaw y otros artistas modernos, forman hoy esas máquinas portátiles de tan admirable regularidad.

Si la relojería de precision debe exclusivamente su existencia á los progresos de la física, la vision telescópica recibió de la misma ciencia un auxilio tan eficaz, que ha formado época en la historia de la astronomía práctica. En los colosales anteojos que llegaron á construirse por Campani y Auzout se disminuia todo lo posible la abertura del objetivo, tomando además otras precauciones, que no alcanzaban á impedir la formacion de las imágenes circundadas del iris, que tanto dificultan la observacion. Admitido, segun un experimento de Newton, el principio de que un rayo de luz no podia refractarse sin sufrir la

descomposicion, se creia imposible despojar á las imágenes de aquel grave defecto; pero el insigne Euler, que intentó asimilar el objetivo al ojo humano, valiéndose de una combinacion de cristal y agua para corregir á la vez la aberracion de esfericidad y la de refraccion, suscitó una viva controversia que, ilustrada por Klingenstierna y Dollond, concluyó con la célebre experiencia de este último, demostrando la posibilidad de formar objetivos que no produjesen imágenes rodeadas de la aureola de colores, lo que originó el anteojo acromático, premiado en 1758 con la gran medalla de la Sociedad Real de Londres.

La Academia de Ciencias de París que, haciendo uso de su poderosa iniciativa en las cuestiones científicas, habia encargado al astrónomo Richer su expedicion al ecuador, dispuso posteriormente la formacion de dos comisiones dirigidas por Maupertuis y Bouguer, encargándoles la determinacion de la magnitud del grado de meridiano terrestre hácia el círculo polar ártico y cerca del ecuador, con el objeto de disipar definitivamente las dudas acerca de la verdadera forma de la Tierra. Entre los memorables trabajos geodésicos de esta última comision, de la que formaban parte los distinguidos marinos españoles Don Jorge Juan y D. Antonio de Ulloa, se cuentan los provechosos estudios hechos sobre la constitucion física de la atmósfera, que demostraron la necesidad de introducir las indicaciones barométricas y termométricas para calcular las correcciones relativas á la refraccion; cuya teoría físico-astronómica ha sido despues cultivada con empeño por los geómetras de más nombre, é ilustrada con difíciles observaciones, tales como las recogidas por Humboldt en su excursion al imponente Chimborazo, y por Gay-Lussac, Bixio y Barral durante sus célebres ascensiones aereostáticas, en que se elevaron á más de 7000 metros sobre el nivel del mar. El astrónomo Bouguer imaginó en 1748, poco despues de su vuelta á Europa, el heliómetro de dos objetivos, perfeccionado en Inglaterra por Savery con la sustitucion de uno solo dividido en dos partes iguales, que se mueven á lo largo del diámetro comun: instrumento muy usado despues por el ilustre Bessel en sus notables trabajos sobre la paralaje de las estrellas. En medio de sus multiplicados estudios se dedicó tambien D. Jorge Juan á cuanto se enlaza más directamente con

la construccion de instrumentos, habiendo escrito á mediados del siglo su interesante memoria sobre *la fábrica y uso del cuarto de círculo*, en que considerando la graduacion como *la cosa más difícil de ser bien ejecutada*, pone de manifiesto, con cuatro triángulos de la cadena del Perú, la influencia que en aquella época tenian los errores de la division, y la importancia de determinarlos cuidadosamente para aplicar á los valores obtenidos las correspondientes correcciones, que en los ángulos presentados como ejemplo llegan alguna vez á 26 segundos.

Durante el último tercio del siglo XVIII, reciben los instrumentos importantes mejoras. Haciendo una feliz aplicacion de la idea que habia ya publicado en 1752, propone, quince años despues, el célebre astrónomo Tobías Mayer la sustitucion del octante con un círculo de reflexion, en que se disminuian los errores á medida que se multiplicaban las observaciones; cuyo pensamiento fué notablemente perfeccionado por Borda en 1775. Miéntras este distinguido marino francés, fundándose en el mismo principio de Mayer, imagina en 1786 su círculo repetidor, el teodolito inglés, compuesto de un anteojo montado en un círculo horizontal, cambia completamente en manos de Ramsden, y se convierte en un instrumento que mide á la vez los ángulos azimutales y las distancias al zenit, introduciéndose tambien, aunque lentamente, el uso del nivel de aire, que ha venido á reemplazar con inmensa ventaja á las plomadas en todos los aparatos de precision.

Pero lo que ocasionó un cambio radical en los instrumentos, permitiendo hacer uso de los de pequeñas dimensiones, fué la manera de ejecutar la division de los limbos. El procedimiento ordinario de dividir por medio del compás se perfeccionaba en Inglaterra por Bird, cuando el Duque de Chaulnes, aplicando la idea de las máquinas empleadas por los ingleses desde principios del siglo para construir las ruedas dentadas de los relojes, presentó á la Academia de Ciencias de París en 1765 el sistema de plataforma graduada y microscopios, que puede considerarse como el orígen de las inapreciables máquinas de dividir usadas en el dia, compuestas generalmente de plataformas movidas por tornillos tangentes, segun el método de Ramsden, ó de grandes círculos combinados con el uso del microscopio micrométrico.

Estudiando la paralaje ánua con un anteojo meridiano de grandes dimensiones, descubre Bradley en 1728 la aberracion de las estrellas, y despues de diez y nueve años de observar incesantemente con su gran sector zenital, comprueba el movimiento de nutacion, sospechado ya por Newton con arreglo á los principios de la gravitacion universal. Los telescopios de William Herschel, que llegan á una amplificacion de 6500 veces, proporcionan en manos de este gran observador el descubrimiento de Urano y de seis de sus satélites; el de la existencia de otros dos satélites de Saturno, y la rotacion y achatamiento de este planeta; así como los vastos y difíciles estudios sobre las nebulosas, y las observaciones de estrellas múltiples con los micrómetros de *lámpara* y de *posicion*, que le permiten presentar el sistema estelar bajo un punto de vista que tanto se presta á las futuras investigaciones de los astrónomos.

En vista de los prodigiosos resultados obtenidos con los telescopios de Herschel, ordenó el Rey D. Cárlos IV la adquisicion de uno de 25 pies de longitud con destino al naciente observatorio astronómico de Madrid, comisionando al distinguido capitan de navío de la Real Armada, D. José de Mendoza y Rios, para que examinase detenidamente el instrumento, remitiéndolo á España con las precauciones necesarias, lo que tuvo lugar á fines de 1801, segun consta en la descripcion y numerosos dibujos que con otros documentos originales se conservan en el archivo de aquel establecimiento. El marino Mendoza, que desempeñó con singular acierto esta comision, se hizo notar muy ventajosamente por sus interesantes publicaciones que, dando principio en 1787 por el tratado de navegacion, calificado por Navarrete de la obra más magistral y más completa que de esta materia tenemos en nuestro idioma, y siguiendo con otros varios trabajos que vieron la luz pública en España, en Inglaterra y en Francia, concluye con sus célebres tablas de astronomía náutica, citadas con gran elogio por Delambre (1), y de las que se

(1) «En exposant dans le volume de l'an XIV diverses méthodes pour le »calcul des distances de la Lune au Soleil et aux étoiles, j'ai donné ouvertement »la préférence à celle de M. de Mendoza sur les miennes et sur toutes les autres. »Depuis, cette méthode est devenue plus facile encore par la publication de ses

han hecho repetidas ediciones en los tres paises. Consagrado con verdadero entusiasmo á los estudios propios de la noble profesion que habia abrazado, perfeccionó los instrumentos náuticos, describiendo en las *Transacciones filosóficas* de 1801 su círculo de reflexion, que proporciona más exactitud y facilidad en las observaciones.

Otro sábio español, el matemático Rodriguez, que tomó parte con Biot, Arago y Chaix en las observaciones de la cadena del meridiano de París, prolongada á lo largo de nuestras costas orientales y hasta la isla de Formentera, rehizo por completo los penosos cálculos á que dieron lugar los trabajos geodésicos del coronel Lambton en la India, y descubrió varios errores que habian conducido á Delambre á un valor demasiado grande del achatamiento terrestre (1), considerablemente reducido despues de verificar las correspondientes correcciones. Los valores generalmente adoptados para los semi-ejes polar y ecuatorial, han sido modificados recientemente por Struve, á consecuencia de la comparacion directa entre el arco de la India y el de 25° 20′ medido desde el Danubio al mar Glacial; trabajo inmenso publicado por la Academia de Ciencias de San Petersburgo (2).

Imaginados, como se ha indicado ya, los principales instrumentos de observacion, reciben en nuestro siglo numerosas modificaciones que

---

»Tables. Cet ouvrage est le plus complet, le mieux conçu, le plus commode qui »ait encore paru sur l'astronomie nautique.» Delambre, *Connaissance des temps pour l'an* 1808.)

(1) «Hence Delambre deduced the oblateness of the terrestrial spheroid to be »the 206th. part. But Rodriguez, an able Spanish mathematician, who had »already criticised the observations of Mudge, detected various mistakes in »Lambton's calculations, which being rectified, reduced the depression of the »Earth to the 320th. part.» (Leslie, profesor de filosofía en la Universidad de Edimburgo, *Enciclopedia Británica*, vol. I, disertacion V.)

(2) En esta obra se asigna al semi-eje ecuatorial la longitud de 6378298,7 m, resultando el achatamiento de $\frac{1}{294{,}73}$. («Arc du Meridien de 25° 20′ entre le Danube et la Mer Glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855. St. Petersbourg, 1860.»)

los perfeccionan notablemente: sábios astrónomos y distinguidos artistas combinan sus esfuerzos para cultivar con decidido empeño este fructífero campo de la ciencia; y llamando en su auxilio al análisis, poderosa palanca intelectual, que desde el siglo XVII se ha engrandecido sucesivamente, elevan á la astronomía práctica á una altura tal que, como ha dicho un autor moderno, medio siglo bastaría para rehacer una ciencia que ha tardado más de dos mil años en desarrollarse y llegar al estado de prosperidad en que hoy la vemos. Los círculos meridianos reunen por sí solos las propiedades de los murales y de los anteojos de paso; los objetivos alcanzan dimensiones desconocidas hasta ahora, conservando y aun aumentando la claridad y exactitud de las imágenes; invéntanse diferentes especies de micrómetros, y se modifican otros conocidos ya anteriormente, construyéndose roscas micrométricas de admirable precision; los instrumentos de medir ángulos adquieren una forma simétrica y una solidez que proporciona los más felices resultados; la division de los círculos se hace con notable perfeccion en talleres de primer órden, cuyas máquinas marchan alguna vez á impulsos de un motor eléctrico; la sensibilidad y uniforme trabajo interior de los niveles llegan á cuanto se puede desear; progresa grandemente la relojería, tanto en la disposicion de sus principales mecanismos, como en el ajuste general de todas las piezas; y los instrumentos portátiles usados en las operaciones mas elevadas de la geodesia, dan resultados que hubiera sido quimérico esperar de los que las artes producian hace un siglo.

Los teodolitos y círculos conocidos con el nombre de *repetidores*, despues de prestar grandes servicios á la astronomía y á la geodesia, son reemplazados por muchos observadores de nuestra época, con los instrumentos fundados en el principio que se ha convenido en llamar de la *reiteracion* ó medicion simple del ángulo, hecha diferentes veces sobre distintas partes del limbo; principio que presenta ventajas evidentes en la observacion de distancias zenitales, y que aplicado á círculos divididos con esmero y provistos de buenos aparatos subdivisores, tiene tambien superioridad sobre el primero en la medicion de ángulos azimutales, prestándose además admirablemente al sistema de vueltas de

horizonte, adoptado para observar las diferentes *direcciones* que concurren en cada uno de los vértices geodésicos. El capitan inglés Mudge indicó ya en 1799 el sistema de reiteracion; pero empleado metódicamente desde 1823 en los trabajos geodésicos de Rusia, y en los que verificaron el ilustre Bessel y el sábio General Baeyer para la medicion del arco de meridiano en la Prusia oriental, síguenle igualmente los primeros astrónomos de Alemania, Suecia y Noruega, así como los observadores norte-americanos, los ingleses que operan en la India, y los españoles que se ocupan en las operaciones geodésicas que han de servir para la formacion del mapa de nuestro pais.

Si los progresos hechos en la construccion de goniómetros permiten obtener los valores angulares con grande aproximacion, las modificaciones que sucesivamente se han ido introduciendo en los aparatos de medir bases, cuyo orígen data apenas de un siglo, y el uso de los comparadores modernos para determinar la relacion entre las diferentes unidades de medida, proporcionan hoy los medios de conocer la longitud de las líneas de partida con toda la exactitud que requieren los trabajos geodésicos más delicados. Pero miéntras que algunos observadores, atribuyendo á las determinaciones angulares un *peso* muy inferior al de la medicion de las bases, han elegido estas de la mayor longitud posible, para que al enlazar con los grandes lados de la triangulacion no se ocasionasen errores considerables, parece á muchos autores conveniente, cuando se dispone de buenos instrumentos, limitarse á medir líneas de 2 ó 3 kilómetros, ligando sus extremos á los primeros vértices por medio de un sistema poligonal, cuya forma ofrezca diferentes comprobaciones, y empleando un método analítico para la compensacion de los errores. Importaba mucho hacer en España un estudio sobre este punto tan controvertido, para decidir si deben elegirse de mucha ó de poca longitud las bases geodésicas que se midan: y con objeto de reunir los datos necesarios, al mismo tiempo que se verificaba la medicion de la base central, se hicieron todas las observaciones angulares para obtener, además del valor directo, otro calculado por una triangulacion especial apoyada en una seccion de la gran base, presentando un grande acuerdo los dos resultados.

Con el auxilio del telégrafo eléctrico y de los modernos aparatos que marcan el instante en que se observa un fenómeno, se determina hoy con extraordinaria exactitud la diferencia de longitudes geodésicas, que se obtenia desde el tiempo de Hiparco observando algunos fenómenos instantáneos, ó bien por medio de penosos viajes en que se trasportaba un número considerable de cronómetros, realizando las ideas de Gemma Frisio, que indicó ya este procedimiento á principios del siglo XVI. Por el sistema de señales electro-magnéticas, y evitando cuidadosamente los errores debidos á la *ecuacion personal*, indicados por Maskelyne, y que tanto ocuparon al sábio Bessel, se hallan ya ligados entre sí los primeros observatorios astronómicos de Europa; en los Estados-Unidos de América se han hecho algunas operaciones análogas; y en España la Junta general de Estadística, representada por el distinguido astrónomo que debe hablar hoy en este recinto á nombre de la Academia, prosigue por iguales medios la determinacion de las posiciones geográficas de las principales poblaciones del Reino.

Los grandes trabajos emprendidos para establecer la moderna red de vias de comunicacion, que constituye uno de los timbres de nuestro siglo, y la necesidad de conocer las altitudes de los puntos notables para enlazar los numerosos estudios topográficos que en el dia se ejecutan, han dado nuevo interés á las nivelaciones geodésicas, que si bien presentan algunas discordancias cuando se hace uso en el cálculo de un coeficiente general de refraccion, proporcionan resultados muy satisfactorios si se observa recíproca y simultáneamente sobre lados de corta longitud, adoptando para señales las miras planas, ó los heliotropos de Gauss, usados ya con éxito admirable en las observaciones azimutales de la triangulacion española, aun en diagonales de comprobacion á distancias de 125 kilómetros. Las nivelaciones que ligan entre sí las costas bañadas por los principales mares de Europa, y el pequeño trabajo de esta especie que se ha ejecutado en España con objeto de indagar el desnivel de los dos extremos de la base de partida, son otras tantas pruebas de la exactitud con que la geodesia moderna puede determinar la tercera coordenada de los puntos trigonométricos.

Tal es, Señores, el estado de los instrumentos y métodos de obser-

vacion que emplea la ciencia moderna: sin el robusto apoyo debido al genio de algunos insignes varones, jamás hubiera llegado á tal perfeccion, ni presentaría convertido en anchuroso campo de fácil acceso lo que fué estrecha senda, por donde los primeros filósofos se abrieron paso á través de todo género de obstáculos. El hombre halla hoy el estudio científico extraordinariamente dividido, y elige la direccion á que se siente mas inclinado; bástale un decidido amor al trabajo para ocupar un puesto en la gran falange que marcha en pos de los génios, siempre escasos en número, llamados á dirigirla; y al par que contribuye en proporcion de sus fuerzas al esclarecimiento de la verdad, vivifica su espíritu con el sagrado fuego de la ciencia que, alejándole insensiblemente de las agitadas luchas de la vida, tan propensas á amargas decepciones, le hace mas grata la existencia, y le inspira tan solo la más pura y noble de las ambiciones: la noble ambicion del saber.

CONTESTACION

AL

DISCURSO ANTERIOR,

POR EL

SR. D. ANTONIO AGUILAR Y VELA,

ACADEMICO DE NUMERO.

Señores:

Si alguna prueba se necesitara del acierto con que esta Corporacion procura remediar los estragos que con frecuencia lamentable ocasiona en sus filas la muerte, suministraríala muy completa en el caso presente el discurso que acabamos de oir. Escrito con sencillez y modestia, como debia esperarse de quien ha consagrado al cultivo de la ciencia la mejor parte de su vida, no se sabe qué celebrar mas en él, si lo bien concebido del plan, la riqueza de detalles, ó la sagacidad suma con que están escojidos y analizados aquellos descubrimientos, fruto de una alianza feliz de los preceptos teóricos con las prácticas del arte mecánico, que mas influencia han ejercido en los progresos ulteriores de la Astronomía y Geodesia. Plácemes y enhorabuenas para su autor, nuestro nuevo compañero el Sr. Ibañez; y plácemes tambien para la Academia que, apreciadora del verdadero mérito, le ha llamado hácia sí, abriéndole las puertas de este recinto.

Antes de penetrar en el fondo del asunto, objeto principal de su discurso, el Sr. Ibañez ha consagrado un justo recuerdo de sentimiento por su pérdida, y de admiracion por sus trabajos, al Ilmo. Sr. D. Ge-

rónimo del Campo, cuyo nombre resonará siempre gratamente en esta Sala, y cuyo puesto vacante viene hoy á ocupar el nuevo académico. Aquel recuerdo, sobre ser merecido, posee en la ocasion presente el mérito de la oportunidad, pues entre los muchos servicios que Campo prestó á las ciencias, fue uno de ellos el de haber contribuido con su ilustrado consejo á establecer las bases para el levantamiento del mapa geodésico de España, obra repetidas veces iniciada, y en cuya acertada realizacion en nuestros dias, es donde el Sr. Ibañez ha conquistado los mejores timbres de su reputacion científica.

Tambien á esta Academia, como cuerpo colectivo, cupo la gloria de influir con su autorizado consejo para que aquella importantísima obra se emprendiera. En un informe que, á propósito de este asunto, elevó en 1852 á conocimiento del Gobierno de S. M., se leen estas significativas palabras: «El honor mismo del pais reclamaria, aunque no hablase tan alto en su favor la conveniencia del mejor servicio del Estado, que no se deje pasar mas tiempo sin que, con la energía de una voluntad decidida, y con el noble empeño de vencer todo género de obstáculos, por grandes que sean los sacrificios que lleve esto consigo, se emprenda una obra tan necesaria, y se adopten al plantearla todas las precauciones capaces de asegurar su éxito en medio de la inconstancia natural de los hombres y de los tiempos.»

El deseo de la Academia, con tanta energía espresado en las líneas que acabamos de trascribir, puede mirarse como realizado en la actualidad. En pocos años, y de ellos no todos consagrados al cultivo pacífico de las artes y las ciencias, se ha adoptado un plan conveniente de operaciones, se han acopiado los elementos materiales necesarios para llevarle á buen término en el mas breve plazo posible, y amaestrado en las prácticas de la Geodesia un personal numeroso y entusiasta, se han emprendido los trabajos para la formacion del mapa, medicion delicada del pais, y conocimiento de la figura de la Tierra en la parte del globo que ocupamos, con grande ahinco y suma inteligencia. En el estranjero, donde no há mucho todavía se equiparaba bajo el aspecto científico á España con las naciones mas atrasadas del mundo, rindese ahora justicia á nuestros esfuerzos por recuperar el puesto de honor que nos cor-

responde entre los paises cultos; hasta el punto de que una de las autoridades mas competentes en la materia, califica los trabajos geodésicos efectuados en nuestro pais, de iguales ó superiores, tal vez, en importancia y exactitud á cualesquiera otros análogos ejecutados hasta el dia. No en mi nombre, falto de autoridad y de prestigio, sino á nombre de la Academia que hoy me ha conferido la no codiciada é inmerecida honra de dirijiros la palabra, séame permitido felicitar á los distinguidos gefes y oficiales facultativos de nuestro ejército, y entre ellos al Señor Ibañez, por haber en tan breve plazo, aunque tras penosísimos esfuerzos, obtenido de sus tareas un resultado tan lisonjero para ellos, como altamente honroso para su patria.

Ardua tarea se propuso el Sr. Ibañez al tratar de reducir á los estrechos límites de un discurso la historia de los descubrimientos que, desde las edades mas remotas hasta nuestros dias, han venido perfeccionando progresivamente la práctica de la Astronomía y de la Geodesia; práctica que por sí sola constituye hoy una verdadera ciencia, en cierto modo inseparable de la teoría. Y, sin embargo, lo que á primera vista parecia casi insuperable, ha sido realizado por el nuevo académico con tanto acierto y de una manera tan acabada, que dificilmente se descubre en su trabajo un vacío que llenar, ni una falsa ó aventurada apreciacion que correjir. Mi tarea, por lo tanto, tiene que limitarse á presentaros algunas ligeras consideraciones, que naturalmente se desprenden de la lectura del discurso que estoy encargado de analizar.

Ignoramos casi por completo lo que se oculta bajo el espeso velo de las edades muy remotas; y, entre las ruinas de la antigua civilizacion del Asia, solo descubrimos hoy algunas nociones elementales de los fenómenos celestes. Cuál sería la ciencia de los caldeos, y de qué género los instrumentos con que verificaban sus observaciones, nos lo revela con suficiente claridad Tolomeo, cuando en su *Sintáxis matemática* nos refiere que el tiempo de la observacion de los eclipses ocurridos en Babilonia estaba espresado en horas, y sus fases en cuartas partes del diámetro del astro eclipsado.

Tampoco los filósofos griegos, á quienes parece que atormentaba más el deseo de construir un mundo á su antojo, que la idea de estu-

diar los fenómenos reales del universo material, podian hacer grandes adelantamientos en el terreno de la práctica astronómica. Las infinitas escuelas en que aquellos sábios se encontraban divididos, y las apasionadas disputas que á propósito de los fenómenos naturales sostenian unas con otras, sin cuidarse ninguna de precisar por medio de la observacion los puntos capitales sobre que versaban los debates, dan una triste idea del estravío en que puede incurrir el entendimiento humano cuando llega á cegarle el orgullo, ó una desmedida apreciacion de sus alcances. De semejante censura, sin embargo, debemos esceptuar á Meton, que 450 años antes de la Era cristiana, y con prioridad asimismo á la fundacion de la escuela de Alejandría, determinó la época del solsticio por medio de observaciones astronómicas dignas del mayor aprecio, si no por su delicadeza, por el tiempo á que se refieren, y precedente sensato que establecian.

Pero donde verdaderamente comenzaron á observarse con asiduidad los fenómenos celestes fue en Egipto. Bajo el reinado de los Tolomeos, ilustres príncipes que durante un siglo dispensaron á las ciencias una proteccion ilimitada, estableciendo la famosa escuela de Alejandría, los hombres mas sábios de la Grecia se trasladaron á las márgenes del Nilo, y contribuyeron con sus luces naturales al fomento de la Astronomía. En el célebre *Museum*, primer ejemplo de un observatorio nacional sostenido por el Estado, estudiábase con regularidad y constancia el curso de los astros, empleándose para ello instrumentos muy perfeccionados, y entre otros el círculo completo situado en el meridiano, con cuyo auxilio podia determinarse diariamente la altura del Sol sobre el horizonte de Alejandría. De esta manera fue como el célebre Eratóstenes encontró para valor de la oblicuidad de la eclíptica el quebrado $\frac{11}{83}$ de la semicircunferencia; número de exactitud pasmosa, si llevamos en cuenta la época á que se refiere, y los medios materiales usados para determinarle.

Hiparco, que concibió primero que otro alguno la importancia de la ciencia astronómica y el caracter de unidad ó conexion que debia poseer al fin, estableció las verdaderas bases de la práctica de aquella ciencia, con la medicion de las ascensiones rectas y declinaciones de los astros;

coordenadas que, por una razon casi incomprensible, tras el inmortal descubrimiento de la precesion de los equinoccios, abandonó despues, dando la preferencia á las longitudes y latitudes, de mucho mas difícil observacion directa.

Al reunir y coordinar Tolomeo en sus obras los trabajos verificados en épocas anteriores, y especialmente por Hiparco, parece obedecer á un mandato providencial. Sin la prevision de aquel célebre compilador, ¿cómo hubiera podido salvarse el tesoro de observaciones con tanto afan acopiado por los filósofos y astrónomos alejandrinos, en medio del cataclismo que por entonces se preparaba? Pero si somos deudores á Tolomeo de los datos mas autorizados para juzgar con acierto del estado y adelantamientos de la Astronomía en lo antiguo, como astrónomo observador poco tiene que agradecerle la posteridad. La innovacion que introdujo en los instrumentos usados por Hiparco, abandonando el círculo completo por el cuadrante ó sector limitado de círculo; práctica en mal hora introducida, y que hasta principios del corriente siglo no se desterró por completo, adoptándose de nuevo el sistema primitivo de los astrónomos de Alejandría, fue una innovacion desgraciada, que el gran prestigio y autoridad de Tolomeo contribuyeron á sostener, comunicándole así un caracter mayor de gravedad.

Realizado el destino supremo que presidió á la formacion del colosal imperio romano, comenzó este por todas partes á flaquear, y cedió por el Oriente, casi sin esfuerzo, al primer ímpetu de los árabes, los cuales subyugaron en pocos años dilatadas regiones, como la Persia y el Egipto. Pero la Providencia, que conduce á la humanidad por caminos impenetrables á nuestra limitada inteligencia, inspiró el amor mas acendrado hácia las ciencias naturales al mismo pueblo que, por sus antecedentes, parecia destinado á estinguir por completo la ya amortiguada llama del saber. Los árabes, llenos de nueva y vigorosa vida, se dedicaron con entusiasmo hasta entonces desconocido al cultivo de las ciencias físicas, y muy particularmente á la observacion asídua de los fenómenos celestes, recojiendo con cuidadoso afan los restos del saber antiguo, que no habian perecido en el choque tremendo de unas razas y pueblos contra otros. Hasta qué punto llegó el entusiasmo del pueblo

arábigo por los conocimientos astronómicos, nos lo revela la conducta de Almamon, el Augusto de sus gefes, cuando, vencedor del emperador de Constantinopla, y como condicion precisa de una paz comprada á fuerza de sangre y de combates, exijió la entrega de las obras de Tolomeo. Hoy mismo, despues de los grandes progresos de la civilizacion, nos llenaria de asombro una cláusula de tal especie, en condiciones análogas á las referidas.

De Bagdad, donde llegaron las artes y las ciencias á un alto grado de esplendor, se trasladó la antorcha del saber á Córdoba; y de Córdoba partieron los resplandores primeros que debian comenzar á disipar las sombras de la ignorancia y el error en que yacia sumida la Europa. Entre los árabes, los instrumentos astronómicos de los griegos recibieron mejoras de alguna importancia; perfeccionóse la gnomónica; y á la observacion del gnomon y las clepsidras de los antiguos agregóse, para obtener un conocimiento mas preciso del tiempo, la de alturas iguales del Sol antes y despues de su paso por el meridiano, aunque sin llevar en cuenta el influjo en los resultados del movimiento propio de aquel astro; correccion necesaria, de que se estuvo prescindiendo siempre hasta la época de Picard. Estos y otros varios adelantamientos que se hallan consignados en el discurso del Sr. Ibañez, constituyen otros tantos servicios prestados á las ciencias por los árabes, importantes en sí mismos, y mucho mas aún si se consideran como precedentes de otros descubrimientos ulteriores basados en su exacto conocimiento. A pesar de lo dicho, hay, sin embargo, que convenir en que el pueblo de que se trata, ni se distinguió por descubrimiento alguno fundamental, ni destruyó tampoco ninguno de los grandes errores que le fueron trasmitidos. Admirador entusiasta de la ciencia que habia heredado de los griegos, y falto de génio y elevacion de miras, jamás osó poner en duda los preceptos sentenciosos de sus maestros; bien es verdad que con un código religioso como el Corán, donde toda innovacion está execrada, no es fácil que la imaginacion cobre vuelo, y tienda á elevarse hasta el asiento de la verdad.

La Alemania, que por tantos descubrimientos notables habia de distinguirse algo mas tarde, principia ya en el siglo XV á cultivar con

fruto la ciencia de los astros. Walther de Nuremburgo fue el primero que en aquel pais adquirió grande y justa nombradía por las observaciones que hizo sobre el movimiento de los planetas, refiriendo los lugares ocupados por estos á estrellas fijas, de posicion bien conocida con prioridad; exactamente como hoy se procede en algunos casos escepcionales, pero muy importantes sin embargo. Los trabajos de Walther, efectuados todavía con medios materiales muy imperfectos, merecieron, con todo, tenerse en cuenta al discutir modernamente las observaciones hechas por Lacaille con objeto de perfeccionar la teoría del sistema planetario.

El célebre observatorio de Uraniburgo, en donde puede decirse tuvo orígen la moderna Astronomía práctica, se vió abandonado muy poco despues de establecido. Perseguido Tycho-Brahe por enemigos envidiosos de su gloria, se refugia en Alemania con el precioso tesoro de sus observaciones, y le deposita en manos de Keplero, es decir, del único hombre capaz en aquella época de penetrar el magnífico arcano que entre aquel inmenso cúmulo de números estaba escondido.

El descubrimiento de las leyes á que obedecen en sus movimientos los globos planetarios, al paso que eleva á Keplero sobre el nivel comun de los demás hombres, nos ilustra sobre los varios medios de que la Providencia puede valerse para darnos á conocer la verdad. ¿Quién hubiera previsto que las desgracias de Tycho habian de ser el origen de su gloria mas pura, y el origen tambien de los mayores y mas sorprendentes adelantamientos de la Astronomía?

Pero al llegar á este punto de la historia de la ciencia, conviene que nos detengamos un poco para examinar y tratar de comprender si al compás de la teoría habia progresado la práctica de observar, ó si en la calidad y uso de los instrumentos astronómicos se habia efectuado antes de la época de Copérnico y Keplero una revolucion tan capital y fecunda como en las ideas hasta entonces dominantes sobre el mecanismo de los cielos. No ciertamente; y pocas palabras bastarán para disipar toda duda que pudiera reinar en la materia. ¿Qué diferencia existe, por ejemplo, entre los procedimientos empleados por los antiguos para la medicion de las distancias terrestres, contando los acompasados

pasos de los camellos, y el procedimiento de Fernel, usado á mediados del siglo XVI, reducido asimismo á contar el número de vueltas de las ruedas de un carruage? Ni de las observaciones astronómicas poco anteriores á la época de Keplero podemos formar un juicio muy favorable, cuando se comparan con las efectuadas en siglos mucho mas remotos. Entre los resultados de la observacion obtenidos por los astrónomos de la escuela de Alejandría, y los consignados en sus libros por Tycho-Brahe y el Landgrave de Hesse Guillermo IV, existe en verdad una diferencia favorable á los últimos, pero no tan grande como á primera vista pudiera parecer. Los procedimientos empleados por Tycho para dividir los limbos de sus instrumentos en partes pequeñísimas, y apreciar de este modo el valor de los ángulos de iguales dimensiones, de muy poco ó de nada le servian desde el momento en que al limbo, tan cuidadosamente graduado, agregaba una regla provista de pínulas, con cuyo auxilio le era casi imposible dirigir una visual á los astros medianamente aproximada á la direccion verdadera; y hé aquí por qué los resultados obtenidos por aquel célebre astrónomo alcanzaron rara vez la aproximacion de 1 minuto de arco, y por qué en muchos casos, como Flamsteed lo demostró posteriormente, adolecian de errores de 6 y 7 minutos de aquella especie. De este lamentable retraso de la Astronomía práctica podemos, hasta cierto punto, darnos cuenta, atendiendo á diversas consideraciones.

La primera que se ofrece á nuestro espíritu proviene de la falsedad del sistema astronómico establecido por Tolomeo. En este sistema todo era complicado y difícil; y á ejemplo de aquel mundo ficticio de donde la sencillez de los movimientos y la unidad de causas estaban desterradas, construíanse para estudiarle máquinas muy complejas tambien, y de manejo embarazoso. Compárense si no los instrumentos antiguos con los modernamente usados, y se comprenderá la verdad de cuanto acabamos de decir.

Otra de las causas del retraso en que por largo tiempo estuvo el arte de observar, y tal vez fuera la mas influyente de todas, debemos buscarla en el aislamiento en que los astrónomos vivian, faltos de proteccion por lo regular, y sin ningun género de estímulo. Si la escuela

de Alejandría produjo los magníficos resultados que hoy admiramos aún, ¿á qué fué esto debido sino á la proteccion de sus fundadores, y al comercio científico prolongado de unos sábios con otros? Donde no hay quien preste la semilla, quien la siembre, y quien la cultive con esmero despues de nacida, no hay que esperar fruto alguno. De esto tenemos un buen ejemplo en nuestro pais. Bajo el amparo de D. Alfonso la Astronomía se eleva en España á un grado de esplendor inesperado y sorprendente; pero le sucede su hijo D. Sancho, mas dado al ejercicio de las armas que afecto á las ideas científicas de su ilustre padre, y todo desaparece. Los esfuerzos individuales en empresas de cierta importancia, ó no sirven de nada, ó solo sirven para provocar el concurso colectivo de todos aquellos hombres capaces de llevarlos unidos á término satisfactorio. Un astrónomo entregado á sus propios recursos, con obligacion de conocer la teoría de su ciencia, de combinar en su mente las partes de que debe constar un instrumento, y de realizar con sus manos lo que el espíritu ha concebido, no puede aspirar á la perfeccion en sus tareas. Y en este caso se encontraron, salva alguna escepcion insignificante, todos los astrónomos de la edad media, y muchos del principio de la moderna, los fundadores de la actual Astronomía, Copérnico, Tycho, y hasta el mismo Galileo. Nada tiene, pues, de estraño que sus instrumentos fueran defectuosos, ni que el arte de observar se conservara durante siglos en la infancia; lo que asombra es que, con aquellos toscos elementos, se haya levantado el edificio mas peregrino del saber humano.

Si hasta el siglo XVI arrostró la Astronomía una existencia lánguida y trabajosa, cultivada por un corto número de sábios, no sucedió lo mismo desde el XVII en adelante. Képlero, con sus inmortales leyes, hace cambiar el punto de vista de la ciencia de los astros, considerada hasta entonces como un simple problema de geometría ó de cinemática á lo sumo. A las ideas de estension y movimiento agrégase ahora la de fuerza, y el problema de geometría se convierte en otro mucho mas vasto de mecánica. Y para corroborar los descubrimientos teóricos de sus ilustres predecesores, y vulgarizar las analogías que relacionan el globo que habitamos con los demás globos que pueblan el espacio,

crea en cierto modo Galileo el anteojo, y descubre los discos aparentes de los planetas, las fases que interrumpen la curvatura regular de algunos, las manchas á modo de nubes que caracterizan á otros, y los satélites que giran en torno de Jupiter como gira la Luna en torno de la Tierra, conforme á las leyes de la atraccion universal enunciadas no mucho despues por Newton. Pero hay mas todavía. Como si los descubrimientos hechos en muy pocos años, tanto en el dominio de la teoría como en el campo de la observacion, no bastaran para ilustrar una época; casi á la vez, por dos genios poderosos, formúlanse los principios del cálculo infinitesimal, verdadera palanca con cuyo auxilio deja el espíritu pocos obstáculos sin remover. El descubrimiento del telescopio y del cálculo son dos inventos del mismo orden, y que mútuamente se completan: el uno sin el otro perderian gran parte de su importancia; los dos juntos y perfeccionados han cambiado en breve tiempo la faz de la Astronomía y de las ciencias mas estrechamente relacionadas con esta, como sucede á la Geodesia.

Avivada la curiosidad pública con los asombrosos descubrimientos hechos en los siglos XVI y XVII sobre el mecanismo de los cielos, y sábiamente esplotada aquella reaccion favorable á los progresos de la Astronomía por las ilustres Academias ó cuerpos científicos que poco á poco, y á medida que el amor al saber se despertaba y estendia, se habian ido organizando en diversos paises, decídese al fin la creacion de observatorios fijos, sostenidos de un modo permanente por cuenta del Estado. Tal vez esta idea, dictada por un noble impulso de entusiasmo, hubiera sin embargo fracasado en su realizacion, si el interés material é inmediato de las naciones no hubiera venido por entonces á prestarla nueva y vigorosa vida. En pocos años habíanse en efecto estendido prodigiosamenre los límites del mundo antiguo: la América por un lado y la India por el opuesto, ofrecian á la codicia humana ancho campo donde saciarse. La dificultad estaba en atravesar los mares, en burlarse del ímpetu de las olas, en evitar los bajíos y sitios peligrosos, y en no separarse del derrotero mas corto ó conveniente, á no ser en casos determinados ó con justos motivos. La buena práctica de la navegacion provocó el planteo del problema de las longitudes en el

mar; y la solucion de este problema, tenida por imposible durante largo tiempo, exigia el conocimiento prévio de las posiciones de los astros en la bóveda celeste. La creacion de observatorios astronómicos fijos no se presentaba ya como una simple exigencia de la teoría, sino como una verdadera necesidad para los progresos de la náutica, de donde en muy gran parte depende el desarrollo de la industria y el comercio, y la influencia material y moral de las naciones.

El establecimiento de observatorios permanentes principió en Dinamarca bajo la proteccion de Cristian IV, el cual quiso de este modo vindicar á su patria del agravio que durante su menor edad se habia hecho al célebre Tycho-Brahe, obligándole á huir de su cara mansion de Uraniburgo. Desde aquella época, Dinamarca se ha distinguido siempre por la proteccion que su Gobierno ha dispensado á las ciencias, y por el mérito de los astrónomos que ha producido. Figura sobre todos ellos en primera línea Roemer, cuyos descubrimientos ha encomiado con tanta justicia nuestro compañero el Sr. Ibañez. Roemer, en efecto, inventó el anteojo meridiano tal como se usa en la actualidad, indicando la manera de hallar por la inversion del mismo el error de colimacion, y el arte de apreciar en los pasos de las estrellas por los hilos del retículo, hasta las fracciones de segundo; demostró la superioridad de los círculos completos sobre los cuadrantes que Tolomeo recomendó con su ejemplo; situó tambien el anteojo de pasos en el primer vertical, aunque con distinto objeto del que hoy guia á los astrónomos al proceder de este modo; y por último, hasta los instrumentos de azimut y altura, y la ecuatorial ó máquina paraláctica renacieron tambien entre sus manos. Desgraciadamente un voraz incendio consumió en breve término los cuadernos de observaciones con tanta paciencia y perspicacia efectuadas por Roemer, si bien la pérdida de aquellos trabajos no fue total. Salváronse las observaciones comprendidas en el famoso *Triduum* del astrónomo dinamarqués, y esto bastó para asegurar su gloria; pues tanto Bradley como Maskeline y Piazzi las tuvieron en alto aprecio, y tomaron como punto de partida, el primero en sus trabajos sobre la aberracion de la luz, y los otros dos, no menos ilustres sábios, al formar sus célebres catálogos de estrellas.

Las reformas introducidas por Roemer en la construcion de los instrumentos astronómicos, no fueron inmediatamente adoptadas por los demás observadores de los fenómenos celestes, á pesar de sus incuestionables ventajas. Y es que el espíritu humano cobra entrañable afecto á todo lo antiguo, y necesita que el tiempo y la esperiencia le persuadan de lo erróneo ó poco ventajoso de las prácticas heredadas, mucho antes de decidirse por la adopcion de otras nuevas. De no ser así, con dificultad se esplica que los astrónomos Halley, Bradley y Maskeline, conocedores de todos los sistemas de observacion hasta su época empleados, siguieran el sistema establecido por su antecesor Flamsteed, que hizo construir al célebre Sharp un sector mural de 140° de amplitud con destino al observatorio de Greenwich, fundado por Cárlos II, y del que el mismo Flamsteed fue primero y digno Director. Con el sector citado, sin embargo, y supliendo con su habilidad lo que de imperfecto pudiera tener el instrumento, Flamsteed determinó gran número de posiciones de los planetas, de muchas estrellas que catalogó despues, y de la Luna: estas últimas sirvieron á Newton de base para establecer las principios de la teoría mecánica de nuestro satélite, en conformidad con las leyes de la atraccion universal de la materia.

Pocos años antes que el observatorio de Greenwich habíase fundado el de París; y hallándose á su frente el astrónomo italiano Juan Dominico Cassini, tan justamente reputado ya entonces por sus tablas de los satélites de Júpiter, basadas en las observaciones hechas por él mismo con los célebres anteojos de Campani, bien se comprende que el arte de construir instrumentos astronómicos habia de recibir con esto un nuevo impulso. A ello contribuyó tambien en gran manera, como el Sr. Ibañez refiere en su discurso detenidamente, y es por lo tanto inútil repetir aquí, el proyecto de medicion de la figura de la Tierra, comenzado á realizar por el abate Picard, proseguido por Cassini, y nunca interrumpido despues hasta la fecha. Semejante multiplicidad de trabajos científicos tenia que fomentar necesariamente la construccion de instrumentos de todas clases, elevando el arte á un grado de importancia y consideracion que nunca tuvo en épocas anteriores, apartándole de una ciega rutina, y relacionándole cada dia mas con los pro-

gresos y necesidades de la ciencia. Y así sucedió. Los artistas del siglo XVIII, Bird, Ramsden, Trougthon, Dollond y otros muchos, no solo gozan de una merecida reputacion por su habilidad como mecánicos, sino tambien por sus conocimientos teóricos, por el discernimiento y crítica con que combinaban las diferentes piezas de sus instrumentos, y por los progresos que de contínuo intentaban realizar. Del esceso de emulacion, de la superioridad alcanzada por el arte, nació, sin embargo, un mal; los constructores se dividieron en escuelas, y por algun tiempo en cada pais se siguieron preceptos distintos y se tomaron tipos de perfeccion diversos, hasta el punto de que mientras en Francia, por ejemplo, los pequeños círculos repetidores de Lenoir eran los preferidos para los trabajos geodésicos, preconizábanse en Inglaterra con igual destino los grandes sectores de Ramsden. Por otra parte, los artistas, hasta cierto límite justamente engreidos con los adelantos introducidos en su profesion por sus solos esfuerzos, se aislaban de los astrónomos y geómetras, y no siempre oian, con la docilidad necesaria, los consejos de la teoría, y de una esperiencia penosamente adquirida en el manejo de los mecanismos por ellos fabricados. A qué estremo lamentable hubiera conducido la rivalidad exagerada, primero, y el aislamiento de los artistas, despues, de no haber desaparecido á tiempo, compréndese sin dificultad. Esta desaparicion puede mirarse como realizada de 30 años á esta parte, y á ella debe ser atribuida la perfeccion que los modernos instrumentos ofrecen comparados con los construidos á principios del corriente siglo.

Nuestro sábio corresponsal estrangero el Sr. Struve al organizar el suntuoso observatorio de Pulkowa, no solo encontró artistas de primer orden capaces de construir instrumentos de precision admirable, sino artistas modestos, que se atuvieron con gusto y aun con gratitud á sus observaciones y consejos. Y cuando en España se pensó en emprender decididamente la medicion del pais, tanto el nuevo académico Sr. Ibañez, como otro de nuestros compañeros, hallaron en la Capital de Francia un artista, el malogrado Brunner, cuya reciente pérdida deploran cuantos por el progreso nunca interrumpido en la ciencia se interesan, que no tuvo inconveniente en realizar sus planes, despues de

discutidos por una y otra parte con el mejor deseo del acierto, en la construccion del aparato para medir *Bases*. Cuál ha sido en este caso el resultado de tan buena armonía entre la cabeza que piensa y la mano que ejecuta, entre la idea y el instrumento, no os lo diré yo, porque ni mi parecer tendria gran fuerza, ni acaso se cosideraria como del todo desapasionado; pero le hallareis formulado en las siguientes palabras, tomadas de una reciente memoria del general Baeyer, que ha dirigido gran parte de los trabajos geodésicos efectuados en Prusia. «En cuanto á lo que se refiere á la exactitud de los aparatos para medir *Bases*, puede llegarse en la actualidad á una aproximacion de $\frac{1}{6000000}$, que es la que se alcanza con el aparato de Bessel. Sin embargo la regla española, segun se deduce de las esperiencias á que ha sido sometida, y que se han publicado ya, da una aproximacion todavia mayor (1).»

Despues de todo lo hasta aquí dicho, resta únicamente dilucidar si los instrumentos astronómicos han llegado ya á un grado de perfeccion completo, ó si todavía presentan defectos graves, que racionalmente debamos esperar desaparezcan en un plazo mas ó menos largo. Lo último es lo cierto, Señores, especialmente si nos concretamos á los instrumentos de grandes dimensiones, tan necesarios en la práctica de la Astronomía estelar. Con el tamaño de un instrumento aumentan prodigiosamente las dificultades de su instalacion y manejo, y aumentan sobre todo las causas perturbadoras de su estabilidad y de su forma, de donde en mucha parte depende la exactitud de las observaciones que con el mismo se efectuan. A reducir este tamaño sin tropezar en otro escollo mayor; á construir grandes cristales objetivos de un acromatismo perfecto y de una distancia focal relativamente corta, van encaminados ahora los esfuerzos de algunos artistas eminentes. En el buen éxito de sus tentativas están interesados cuantos abrigan algun entusiasmo por los progresos de la Astronomía.

El caso que acabo de presentar muestra, sin multiplicar las citas, que el hombre no ha llegado aún á la perfeccion en el importante ramo

---

(1) Ueber die Grosse und Figur der Erde, von Baeyer, Berlin 1861.

del saber de que tratamos. Lo propio le sucede en todos los demás; ¿pero por eso dejará el trabajo y desmayará, sin pensar en concluir la obra? Esto es contrario á su naturaleza. Trabajará un dia y otro hasta remediar las imperfecciones que ahora descubre; y como la obra de ayer es la base del edificio de hoy, lo conseguido en la actualidad le servirá de estímulo y punto de partida para continuar indefinidamente progresando en el porvenir.

COMPARACION

DE LA

REGLA GEODESICA

PERTENECIENTE AL GOBIERNO

DE S. A. EL VIREY DE EGIPTO,

CON LA QUE SIRVIÓ

PARA LA MEDICION DE LA BASE CENTRAL DEL MAPA DE ESPAÑA,

POR

M. ISMAIL EFFENDY,
Astrónomo Egipcio.

D. CARLOS IBAÑEZ E IBAÑEZ,
Académico de número.

INTRODUCCION.

Prosiguiendo S. A. el virey de Egipto la obra de civilizacion inaugurada por su augusto padre Mehemet Alí, reconoció en 1858 la utilidad de un mapa geométrico de su pais, y se dignó dar las órdenes necesarias para la construccion de un aparato de medir bases geodésicas.

Uno de los más distinguidos artistas franceses, M. Brunner, cuya reciente pérdida deploran los hombres de ciencia de todos los paises, recibió el encargo de hacer un aparato igual al que dos años ántes habia construido para el Gobierno español, y que ha servido para la medicion de la base central del mapa de España.

Aunque el aparato egipcio se sometió en París á las experiencias necesarias para determinar los coeficientes de dilatacion de la regla bimetálica (platino y laton), era indispensable averiguar la relacion que

existe entre su longitud y la de alguno de los tipos lineales usados en otros trabajos geodésicos de la red europea, con la cual vendrán á enlazarse algun dia las operaciones proyectadas en Egipto.

El tipo elegido para verificar la comparacion fué la regla geodésica española, que presentaba la ventaja de una perfecta semejanza con la nuevamente construida, y cuya relacion con la regla de Borda, num. 1, se habia determinado por las comparaciones verificadas en 1856. A peticion del Gobierno egipcio, el Excmo. Sr. Ministro de negocios extranjeros de Francia tuvo la bondad de hacer las gestiones convenientes cerca del Gobierno de S. M. Católica, á fin de obtener la autorizacion para comparar los dos aparatos; autorizacion que fué generosamente concedida por el Excmo. Sr. Presidente del Consejo de Ministros de España. El astrónomo Sr. Ismail Effendy, se trasladó entónces á Madrid con el aparato que debia compararse.

El Excmo. Sr. D. Alejandro Olivan, Vicepresidente de la Junta general de Estadística, se sirvió prestar su concurso á esta operacion científica, nombrando al coronel D. Cárlos Ibañez para que procediese á la comparacion, de acuerdo con el observador egipcio, y confiando á su cuidado la regla geodésica española perteneciente á dicha Junta.

Como el edificio que ocupa esta corporacion no presentaba un local á propósito para las comparaciones, el Excmo. Sr. D. Francisco de Luxán, Comisario régio del Observatorio Astronómico de Madrid, y el Sr. Director del mismo establecimiento D. Antonio Aguilar, pusieron á disposicion de los dos comisionados una de las salas del Observatorio, en la que se dió desde luego principio á los trabajos de instalacion.

DESCRIPCION DEL COMPARADOR.

Acordadas por los dos observadores las disposiciones generales, se procedió de la manera siguiente. En la sala occidental del Observatorio se construyeron dos pilares de granito A, A' (*figs.* 1, 2, 3), que descansaban sobre las bases B, B' de la misma materia, y sostenian los prismas C, C' de piedra caliza en que se habian de asegurar los microscopios micrométricos M, M', destinados á la observacion de las dos reglas RR, $R'R'$.

Estas se apoyaban, por medio de los soportes S, S y S', S', en dos tablones DD, $D'D'$, que podian moverse fácilmente en sentido transversal sobre dos carriles de hierro FF, $F'F'$, sujetos á fuertes viguetas VV, $V'V'$, las cuales descansaban directamente en el piso enlosado de la sala, al que se hallaban unidas de distancia en distancia con pequeños apoyos de mampostería WW, $W'W'$. De este modo, podian presentarse alternativamente las dos reglas debajo de los microscopios.

Para evitar en lo posible que las vibraciones ocasionadas por el movimiento de las reglas, y por los de los observadores y sus auxiliares, se trasmitiesen á los pilares y de estos á los microscopios, se practicaron las excavaciones necesarias, de modo que al rededor de las bases B, B'; quedaba un espacio vacío EE, $E'E'$; y se estableció un piso de madera apoyado en dos viguetas, distantes dos metros de los centros de los pilares.

Los microscopios del aparato egipcio se aseguraron á los prismas de piedra caliza C, C', por medio de las piezas siguientes: dos barras de hierro prismáticas a, a' (*figs.* 4, 5, 6), introducidas en la piedra y recibidas con plomo, presentaban sus caras superiores en un mismo plano paralelo á la inferior de la misma piedra, y sostenian los coginetes de laton b, b', fuertemente asegurados por medio de los tornillos c, c, c', c'. La distancia que mediaba entre las dos barras era algo mayor que la longitud de la parte cónica del eje horizontal ff del microscopio, que-

dando así un pequeño juego en sentido longitudinal que permitia situar los microscopios á una distancia dada.

Las piezas *d*, *d'*, adaptadas á las barras y sujetas por los tornillos *e*, *e*, *e'*, *e'*, se hallaban atravesadas por los grandes tornillos *T*, *T'*, destinados á contener lateralmente el eje *ff* del microscopio, cuya posicion se hacia mas permanente apretando las tuercas *m*, *m'*.

Para dar al eje de figura del microscopio una posicion próxima á la vertical, se aseguró igualmente á la piedra la pieza de hierro *ggg*, en la cual penetraban los tornillos con tuerca *t*, *t'*, que habian de sujetar el tubo del microscopio.

Habiendo construido de intento los coginetes sin movimientos de rectificacion, y deseando colocar los ejes ópticos de los microscopios en planos muy próximos á la posicion vertical, era indispensable que por la exactitud en la labra de las piedras, fuesen muy pequeñas las correcciones que hubiese que hacer en la situacion de los ejes *ff*. Así se verificó en efecto; pues colocadas las tres piedras y el microscopio correspondiente *M'* (*figs.* 1, 2,) en la extremidad Sur del comparador, acusó el nivel *nn* (*figs.* 4, 5, 6) una inclinacion tan corta del eje, que no fué preciso retocar los coginetes; y aunque en el microscopio Norte *M*, fué mayor la inclinacion, bastó rebajar un poco uno de los coginetes para conseguir el mismo resultado que en la otra extremidad.

Por medio de esta sencilla disposicion de los microscopios, se consiguió con suma facilidad situarlos á la distancia necesaria para observar las rayas 39485 y 510 de la regla de platino del aparato español, las mismas que se habian elegido para su comparacion con la regla número 1 de Borda, para la determinacion de los coeficientes de dilatacion y para la medicion de la base de Madridejos.

Antes de montar definitivamente los microscopios, se rectificaron con cuidado los dientes centrales de sus peines, por medio de giros de 180° hechos con los círculos del aparato, observando una de las rayas de la regla hasta colocar los indicados dientes muy próximos á su posicion normal. Terminada que fué esta operacion se fijaron con cera los tornillos *h*, que conducen los peines, para evitar que estos sufriesen variacion alguna.

Despues de haber sentado las viguetas *VV*, *V'V'* (*figs.* 1, 2, 3), y de haberlas afirmado al pavimento de la sala, se fijaron paralelamente y en un mismo plano horizontal los carriles *FF* y *F'F'*; armóse en seguida el piso de madera *PPP*..... sobre las seis viguetas *GG*..... que descansaban á su vez en las dos *IIII*, y por último, se colocaron los tablones *DD*, *D'D'* sobre los carriles, con los que estaban en contacto por medio de las piezas de hierro *I*, *I*..... *I'*, *I'*.....; las primeras de las cuales abrazaban el carril *FF*, que servia de guia, miéntras que las segundas descansaban simplemente sobre el carril *F'F'*. Tanto las mencionadas piezas como los carriles tenian las superficies de contacto en forma ligeramente cilíndrica, para disminuir los rozamientos en el movimiento de las reglas, que se verificaba con muy poco esfuerzo con el auxilio de las dos palancas *J*. Estas entraban en las piezas de hierro *V*, *V*, atornilladas á los tablones, y sus extremos inferiores se alojaban sucesivamente en las hendiduras *U*, *U*..... que les servian de puntos de apoyo. Colocadas ambas reglas sobre los tablones, y llevándolas á la posicion conveniente para verificar la observacion con los microscopios, se fijaron los dos topes giratorios *K*, *K'*, destinados á encontrar con rapidez la posicion que cada una de las reglas debia ocupar, para que las rayas elegidas se hallasen respectivamente en el campo de los microscopios; valiéndose de los tornillos de coincidencia de los soportes, para llevar la línea de las divisiones á cortarse con los respectivos ejes ópticos de los microscopios. Miéntras se trasladaba la regla egipcia á la posicion en que se la debia observar, la española marchaba hácia los pilares *A*, *A'*; pero un tope fijo *Z* impedia que chocase con ellos.

Se procedió despues á rectificar los catorce coginetes de las reglas de ambos aparatos por medio de los niveles *NN* y de los correspondientes tornillos de rectificacion, hasta tanto que los apoyos cilíndricos de las reglas de platino se hallaron muy próximamente en un mismo plano. Hecho esto se llevaron sucesivamente las dos reglas debajo de los microscopios, dándoles, por medio de los grandes tornillos de los soportes, una posicion horizontal; y observando primero la regla española, se arregló con los piñones *o* (*figs.* 4, 5, 6) la altura del sistema óp-

tico, de manera que las imágenes de las rayas se formasen con exactitud en los planos de los retículos. La regla egipcia ocupó á su vez el lugar que habia dejado la española; y por medio de los movimientos de sus soportes, quedó situada horizontalmente y á la altura necesaria para que las imágenes de sus rayas presentasen las mismas condiciones que las correspondientes á la regla española. Los grandes tornillos T, T' sirvieron para fijar los microscopios á la distancia determinada por las rayas 39485 y 510 de la regla española, apretándose despues las tuercas m, m'.

La pieza pq (*fig.* 7) tenia por objeto asegurarse de la verticalidad de los ejes de figura de los microscopios. Se compone de un cilindro hueco de laton, á cuyas extremidades se ajustaron en ángulo recto dos reglas metálicas de igual longitud; y aplicándola con la mano al tubo del microscopio por uno de los extremos de las reglas, se presentaba á las otras extremidades una plomada, cuyo hilo debia coincidir con ellas cuando el eje del tubo se hallase en una posicion vertical; y conseguido esto con los movimientos de los dos tornillos t, t' (*figs.* 4, 5, 6), se apretaron las tuercas para impedir todo juego al rededor del eje horizontal del microscopio, fijándose por último las sobremuñoneras ss, $s's'$, de los coginetes.

Establecidos definitivamente los microscopios en la posicion más á propósito para observar, se fijaron con cera á los tubos exteriores, los interiores que llevan el sistema óptico; y se destornillaron las llaves i para que no se variase inadvertidamente la situacion de los microscopios en sentido vertical.

Sobre una mesilla O (*figs.* 1, 2, 3) se dispuso un termómetro centígrado L, para conocer aproximadamente las variaciones de temperatura de la sala; y á la inmediacion de los microscopios se colocaron dos taburetes X, X', para los observadores, que debian observar sentados.

MARCHA DE LA OPERACION.

Hallándose todo dispuesto para comenzar las observaciones el dia 13 de noviembre de 1862, se hizo ante todo una nivelacion general de los apoyos de ambas reglas de platino; se determinó la inclinacion de estas en su parte central cuando se hallaban debajo de los microscopios, y se halló igualmente la inclinacion de los ejes de estos.

Para obtener el valor de los pasos de rosca de los micrómetros en funcion de las divisiones de las reglas de platino, se colocaron los observadores cada uno al lado de un microscopio, é hicieron alternativamente seis punterías á cada una de las rayas 39485 y 39488 en el Norte, 510 y 513 en el Sur, verificando estas observaciones tanto en la regla española como en la egipcia.

Procedióse inmediatamente á las comparaciones en el órden siguiente: colocada la regla española debajo de los microscopios y los observadores en sus puestos, hicieron simultáneamente y á una señal convenida nueve punterías, de las cuales tres consecutivas sobre las rayas correspondientes al platino, tres sobre las del laton y otras tres sobre las mismas del platino. Las rayas observadas fueron 39485 y 510 en el platino, y 39575 y 610 en el laton; anotándose la hora y el minuto en que daba principio cada observacion de tres punterías.

Terminadas las observaciones en la regla española, dos auxiliares hicieron marchar simultáneamente las dos reglas, aproximando la española á los pilares y colocando la egipcia debajo del comparador. Situada esta última exactamente para la observacion por medio de los diferentes tornillos longitudinal y transversales de los soportes, se hicieron nueve punterías, distribuidas como anteriormente entre las rayas de igual numeracion á las observadas en la regla española; esceptuando la 39575 que, hallándose fuera del campo del microscopio, se sustituyó con la 39585.

Todas estas observaciones constituian una comparacion; pero como el número de punterías hechas á las rayas de platino era doble del de las verificadas sobre el laton, se comenzaba inmediatamente una segunda comparacion, en que se compensaba esta diferencia; y para no mover inútilmente las reglas, se observaba esta vez primero la egipcia, del modo siguiente: tres punterías al laton, tres al platino y otras tres al laton. Reemplazada la regla egipcia con la española se repetian sobre esta las mismas observaciones. Así cada par de comparaciones presentaba un grupo en que el platino y el laton de ambas reglas habian sido observados igual número de veces; y á fin de eliminar el error personal, cambiaban los observadores de microscopio al terminar todas las comparaciones de número par, observándose al propio tiempo el termómetro, para consignar los cambios de temperatura del aire.

Al dar por terminado el trabajo del dia, lo que tuvo siempre lugar despues de obtener una ó mas séries de diez comparaciones, se determinaban de nuevo los valores de las vueltas de los micrómetros para ambas reglas, las inclinaciones de estas y las de los ejes de los microscopios del comparador, con el fin de calcular la influencia que pudiesen tener en las comparaciones del dia, los cambios ocurridos en la posicion relativa de los distintos elementos que concurren á la medicion.

Este sistema de observaciones se continuó sin alteracion alguna durante nueve dias, en los cuales se hicieron catorce séries, que forman un total de 140 comparaciones; número que se conceptuó suficiente para obtener con exactitud la longitud de la regla egipcia en funcion de la española, y por consiguiente en metros, por medio de la relacion entre esta y la de Borda núm. 1 (*).

(*) Experiencias hechas con el aparato de medir bases, perteneciente á la Comision del Mapa de España, publicadas de Real órden. Madrid, 1859.

«Experiences faites avec l'appareil à mesurer les bases, appartenant á la Commision de la Carte d'Espagne, Ouvrage publié par ordre de la Reine. Traduit de l'espagnol par A. Laussedat, capitaine du Génie, professeur de géodésie à l'Ecole polytechnique. Paris, 1860.»

Terminadas que fueron las comparaciones, se hizo una nivelacion general de los catorce apoyos de las reglas de platino de ambos aparatos.

Para conocer el valor angular de las divisiones ó partes del nivel de la regla egipcia y del empleado en las nivelaciones de los ejes de los microscopios al principio y fin de cada dia, se hizo uso de una probeta ó examinador de niveles, en la cual el paso de rosca del tornillo produce un valor angular de 59″,16, hallándose dividido en 60 partes el tambor de la cabeza del tornillo. El nivel de la regla española habia sido ya estudiado anteriormente (*).

(*) Experiencias, etc. Apéndice, núm. 1.

OBSERVACIONES.

Los cuadros que siguen contienen todas las observaciones efectuadas para la comparacion de las dos reglas. Los dos observadores anotaban por sí mismos las lecturas en pequeños cuadernos, cuya copia ha formado el registro general, habiendo quedado los originales en poder del observador egipcio, para depositarlos en los archivos de la comision del mapa de Egipto.

En los cuadros de nivelacion, las posiciones de los niveles *NN* (*figuras* 1, 2) se refieren á las de su tornillo *Q;* considerando la lectura como positiva cuando estos tornillos se hallaban hácia el Norte. Los niveles de los dos aparatos son de construccion idéntica; pero el cero del nivel español se halla en el centro del tubo, miéntras que en el egipcio está en una extremidad.

Para la nivelacion de los microscopios se ha hecho uso de un solo nivel *nn* (*figs.* 4, 5, 6), cuya posicion se refiere á la de su tornillo *r;* considerando igualmente las lecturas como positivas cuando el indicado tornillo se hallaba al Norte.

Con el fin de evitar el inconveniente de tener lecturas micrométricas positivas y negativas, se convino en dar el valor 10 vueltas á la lectura correspondiente á los dientes centrales de los peines.

Las iniciales que aparecen al pié de cada cuadro de observaciones, designan: *C. I.* el observador español; *I. M.* el observador egipcio.

NIVELACION DE LOS CATORCE APOYOS CILINDRICOS DE LAS DOS REGLAS.

Noviembre de 1862.

Fecha.	Hora.	Regla.	Posiciones del nivel empezando por el cero de la regla.	Lecturas del nivel tornillo al Norte.	Promedios.	Regla.	Posiciones del nivel empezando por el cero de la regla.	Lecturas del nivel tornillo al Norte.	Promedios.
	h m			p	p			p	p
4 13	11 0	Española.	1	+ 8,8 — 5,2	+ 1,8	Egipcia.	1	15,2 38,4	26,8
			2	+ 7,5 — 6,4	+ 0,5		2	15,6 38,8	27,2
			3	+ 6,5 — 7,4	— 0,4		3	16,6 39,8	28,2
			4	+ 8,4 — 5,3	+ 1,5		4	15,9 39,0	27,4
			5	+ 7,1 — 6,7	+ 0,2		5	15,3 38,4	26,8
			6	+ 6,1 — 7,7	— 0,8		6	16,0 39,0	27,5
			7	+ 7,1 — 6,7	+ 0,2		7	15,9 39,0	27,4
			8	+ 8,1 — 5,6	+ 1,2		8	18,8 41,8	30,3
			9	+ 8,6 — 5,1	+ 1,7		9	17,9 40,8	29,3
			10	+ 8,4 — 5,4	+ 1,5		10	16,4 39,4	27,9
			11	+ 8,1 — 5,6	+ 1,2		11	16,0 39,0	27,5
			12	+ 7,0 — 6,8	+ 0,1		12	16,3 39,3	27,8
			13	+ 7,1 — 6,6	+ 0,2		13	16,4 39,5	27,9

C. I. *I. M.*

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL		REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL		MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL		MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL	
			Norte.	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*
	h m		p.	p.	p.	p.	p.	p.	p.	p.
4 13	11 18	14,0	+ 7,5	+ 7,3	+ 5,6	— 6,5	+12,0	—10,0	+10,0	—12,2
			— 6,6	— 6,8	+29,1	—29,0	+28,0	—26,0	+26,3	—28,7
			C. I.		*I. M.*		*I. M.*		*I. M.*	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Antes de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.		MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	
						39485	39488	510	513
					h m	v	v	v	v
4 13	1	14,0	Española.	1	1 0	9,455		10,190	
				2			6,386		7,195
				3			374		195
				4		435		183	
				5		418		182	
				6			365		190
				7			360		184
				8		408		178	
				9		412		175	
				10			353		173
				11			366		170
				12		412		160	
			Egipcia.	1		10,438		9,849	
				2			7,420		6,868
				3			426		868
				4		416		839	
				5		412		840	
				6			408		870
				7			410		877
				8		406		838	
				9		395		848	
				10			400		879
				11			396		884
				12		385		841	
						I. M.		*C. I.*	

SERIE I. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
3 13	1		Española.	1	2 8	10,356		11,450	
						355		455	
						345		452	
				2	10		11,891		10,198
							902		190
							895		186
				3	11	10,335		11,443	
						334		450	
						328		450	
			Egipcia.	4	14	10,432		10,071	
						440		073	
						439		080	
				5	16		9,130		9.580
							160		584
							155		590
				6	17	10,448		10,094	
						452		099	
						449		100	
	2		Egipcia.	1	20		9,155		9,630
							132		638
							140		641
				2	21	10,450		10.124	
						440		130	
						445		137	
				3	22		9,140		9,678
							135		683
							137		685
			Española.	4	27		10,024		8,506
							025		511
							028		507
				5	28	8,532		9.736	
						535		742	
						528		748	
				6	29		10,002		8,489
							002		479
							9,996		476
		15°,2							
						I. M.		C. I.	

SERIE I. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.	MICROSCOPIO NORTE. LATON.	MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	MICROSCOPIO SUR. LATON.
					h m	v	v	v	v
13	3		Española.	1	2 35	8,511		9,787	
						517		782	
						510		770	
				2	37		9,976		8,551
							975		551
							972		540
				3	39	8,509		9,777	
						502		779	
						502		776	
			Egipcia.	4	42	10,669		10,422	
						676		408	
						678		408	
				5	43		9,353		10,013
							350		016
							356		008
				6	45	10,690		10,422	
						697		426	
						700		436	
	4		Egipcia.	1	47		9,408		10,031
							402		032
							404		025
				2	48	10,741		10,457	
						733		452	
						731		455	
				3	50		9,409		10,027
							403		033
							410		044
			Española.	4	55		11,368		9,924
							388		932
							370		926
				5	56	9,882		11,142	
						887		150	
						887		146	
				6	57		11,381		9,922
							387		936
							388		926
		14,6							

C. I. I. M.

SERIE I. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
4 13	5		Española.	1	3 1	9,892		11,101	
						896		096	
						896		094	
				2	3		11,406		9,819
							400		821
							400		819
				3	4	9,880		11,088	
						860		080	
						882		082	
			Egipcia.	4	9	10,307		10,011	
						312		017	
						313		017	
				5	10		8,937		9,606
							945		608
							945		608
				6	11	10,322		10,038	
						320		033	
						328		036	
	6		Egipcia.	1	13		8,958		9,640
							972		631
							975		640
				2	15	10,352		10,078	
						356		083	
						350		081	
				3	16		8,968		9,644
							963		651
							968		652
			Española.	4	20		11,156		9,676
							156		672
							164		670
				5	21	9,687		10,890	
						657		897	
						665		900	
				6	22		11,111		9,674
							120		666
							118		670
		15°,0							
						I. M.		C. I.	

SERIE I. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
4 13	7		Española.	1	3 29	9,654		10,916	
						660		912	
						657		908	
				2	31		11,089		9,698
							078		685
							080		688
				3	32	9,649		10,906	
						649		905	
						648		903	
			Egipcia.	4	38	10,829		10,637	
						838		623	
						836		618	
				5	40		9,463		10,230
							457		247
							462		254
				6	41	10,857		10,630	
						854		622	
						853		627	
	8		Egipcia.	1	43		9,504		10,222
							508		228
							514		213
				2	45	10,891		10,630	
						890		643	
						897		636	
				3	46		9,552		10,210
							560		205
							560		205
			Española.	4	49		10,882		9,444
							890		441
							892		446
				5	50	9,445		10,622	
						441		622	
						449		626	
				6	52		10,896		9,432
							896		435
							900		428
		14°,9							
						C. I.		I. M.	

SERIE I. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
4 13	9		Española.	1	3 55	9,445		10,578	
						430		572	
						440		580	
				2	56		10,900		9,373
							898		380
							908		380
				3	58	9,436		10,573	
						422		573	
						420		573	
			Egipcia.	4	4 2	10,670		10,291	
						674		299	
						684		302	
				5	3		9,368		9,836
							381		838
							376		842
				6	5	10,708		10,292	
						710		294	
						710		291	
	10		Egipcia.	1	7		9,422		9,861
							426		862
							426		870
				2	8	10,746		10,311	
						742		320	
						754		320	
				3	9		9,447		9,854
							454		850
							440		857
			Española.	4	13		10,088		8,390
							086		380
							076		377
				5	15	8,570		9,580	
						564		580	
						573		587	
				6	20		10,176		8,240
							190		244
							176		244
		14,1							
						I. M.		C. I.	

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL		REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL		MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL		MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL	
			Norte.	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*
4 13	h m 4 30	14°,1	+ 2,4 p −11,4	+ 1,4 p −12,4	+ 7,3 p +30,1	− 6,4 p −29,1	+10,6 p +25,9	−10,0 p −25,2	+ 8,8 p +24,0	−10,0 p −25,3
			I. M.		*C. I.*		*C. I.*		*C. I.*	

La mala iluminacion, por lo avanzado de la hora, impidió determinar el valor de las vueltas de los micrómetros.

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL		REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL		MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL		MICROSCOPIO SUR TORNILLO AL	
			Norte.	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*
	h m		p	p	p	p	p	p	p	p
♀ 14	9 13	12°,1	+ 2,7	+ 1,9	+ 7,6	— 6,5	+10,5	—10,9	+ 9,4	—10,4
			—12,0	—12,8	+31,5	—30,4	+26,5	—26,9	+25,0	—26,2
			C. I.		*I. M.*		*I. M.*		*I. M.*	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Antes de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.		MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	
						39485	39488	510	513
					h m	v	v	v	v
♀ 14	11	12°,1	Española.	1	9 40	11,313		11,576	
				2			8,262		8,595
				3			258		586
				4		310		570	
				5		315		571	
				6			254		591
				7			256		584
				8		309		582	
				9		310		582	
				10			250		598
				11			250		576
				12		304		574	
			Egipcia.	1		11,700		10,566	
				2			8,706		7,546
				3			712		560
				4		712		564	
				5		717		556	
				6			720		566
				7			716		573
				8		712		566	
				9		718		562	
				10			721		583
				11			727		586
				12		723		543	
						C. I.		*I. M.*	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
14	11		Española.	1	10 4	8,466		8,806	
						465		796	
						462		798	
				2	5		10,475		7,116
							468		098
							464		102
				3	7	8,442		8,785	
						439		797	
						433		796	
			Egipcia.	4	11	10,421		9,402	
						429		382	
						429		388	
				5	13		9,569		8,452
							557		450
							554		450
				6	14	10,432		9,402	
						428		396	
						425		396	
	12		Egipcia.	1	16		9,533		8,481
							540		482
							537		496
				2	18	10,420		9,388	
						425		394	
						430		406	
				3	20		9,554		8,505
							549		492
							546		492
			Española.	4	23		11,730		8,488
							740		482
							740		492
				5	25	9,763		10,210	
						758		210	
						754		220	
				6	26		11,748		8,496
							747		500
							744		502
		12°6							

C. I. I. M.

SERIE II. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 14	13		Española.	1	10 29	9,784		10,167	
						809		165	
						796		164	
				2	31		11,775		8,469
							765		477
							770		477
				3	32	9,778		10,164	
						765		171	
						760		172	
			Egipcia.	4	35	10,950		9,901	
						955		901	
						954		897	
				5	37		10,064		9,071
							068		079
							066		079
				6	38	10,964		9,920	
						962		927	
						965		931	
	14		Egipcia.	1	41		10,082		9,097
							080		099
							084		099
				2	43	10,970		9,945	
						970		943	
						988		940	
				3	44		10,085		9,100
							084		098
							090		100
			Española.	4	49		12,518		9,242
							520		250
							522		252
				5	51	10,500		10,904	
						502		911	
						490		913	
				6	52		12,495		9,257
							498		260
							490		258
		13°,0							

I. M. C. I.

SERIE II. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
14	15		Española.	1	10 59	10,440		10,980	
						440		982	
						436		980	
				2	11 0		12,348		9,322
							348		324
							342		334
				3	1	10,411		10,986	
						412		982	
						413		990	
			Egipcia.	4	4	10,448		9,612	
						456		616	
						411		614	
				5	6		9,474		8,836
							470		838
							460		834
				6	7	10,452		9,653	
						458		633	
						450		648	
	16		Egipcia.	1	9		9,432		8,893
							428		900
							424		903
				2	10	10,449		9,658	
						447		658	
						447		648	
				3	11		9,425		8,932
							420		935
							410		946
			Española.	4	17		10,307		7,690
							296		680
							290		674
				5	19	8,438		9,252	
						435		250	
						438		251	
				6	21		10,212		7,682
							215		693
							209		700
		14,0							

C. I. I. M.

SERIE II. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♀ 14	17		Española.	1	11 58	8,332		9,332	
						317		324	
						318		320	
				2	59		9,923		7,935
							954		938
							943		943
				3	12 00	8,292		9,300	
						308		308	
						315		308	
			Egipcia.	4	3	10,440		10,145	
						452		144	
						452		150	
				5	4		9,125		9,665
							128		672
							126		675
				6	5	10,465		10,158	
						458		166	
						450		166	
	18		Egipcia.	1	6		9,140		9,699
							150		699
							160		694
				2	8	10,490		10,196	
						473		204	
						478		205	
				3	9		9,150		9,714
							148		710
							150		711
			Española.	4	12		11,907		10,038
							918		042
							895		049
				5	14	10,326		11,359	
						326		361	
						330		356	
				6	16		11,896		10,060
							880		066
							886		061
		14,8							
						I. M.		C. I.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♀ 14	19		Española.	1	12 20	10,231		11,378	
						231		384	
						225		375	
				2	21		11,811		10,088
							810		084
							804		084
				3	22	10,236		11,367	
						225		375	
						225		372	
			Egipcia.	4	25	10,535		10,292	
						540		286	
						541		295	
				5	26		9,241		9,812
							234		802
							240		806
				6	28	10,578		10,315	
						581		314	
						581		316	
	20		Egipcia.	1	30		9,275		9,831
							278		864
							274		861
				2	31	10,608		10,314	
						611		329	
						610		328	
				3	32		9,298		9,838
							301		842
							300		854
			Española.	4	36		9,750		8,028
							744		7,998
							740		990
				5	38	8,158		9,260	
						161		256	
						158		262	
				6	39		9,719		7,966
							715		956
							717		958
		14°,5							

C. I. I. M.

SERIE III. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 14	21		Española.	1	12 42	8,165		9,204	
						160		203	
						152		210	
				2	43		9,755		7,919
							760		917
							760		915
				3	45	8,175		9,203	
						152		200	
						142		204	
			Egipcia.	4	48	10,506		10,067	
						500		080	
						500		084	
				5	50		9,224		9,590
							215		584
							232		587
				6	51	10,497		10,090	
						500		093	
						502		093	
	22		Egipcia.	1	53		9,225		9,589
							236		595
							240		594
				2	54	10,512		10,100	
						510		096	
						512		097	
				3	56		9,251		9,606
							240		600
							250		600
			Española.	4	1 0		11,188		9,322
							198		328
							200		330
				5	1	9,566		10,600	
						542		600	
						550		602	
				6	3		11,175		9,333
							156		335
							168		337
		14,8							
						I. M.		*C. I.*	

SERIE III. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☽ 14	23		Española.	1	1 22	9,433		10,615	
						424		617	
						430		613	
				2	24		10,982		9,372
							976		362
							974		362
				3	25	9,436		10,605	
						430		602	
						435		610	
			Egipcia.	4	29	11,143		10,922	
						150		916	
						157		942	
				5	30		9,830		10,482
							828		480
							829		481
				6	31	11,176		10,948	
						180		942	
						182		950	
	24		Egipcia.	1	33		9,823		10,526
							819		500
							815		492
				2	35	11,182		10,966	
						179		978	
						181		976	
				3	36		9,830		10,530
							824		525
							830		542
			Española.	4	39		9,859		8,442
							854		433
							860		435
				5	40	8,370		9,620	
						364		626	
						362		632	
				6	42		9,836		8,433
							839		431
							832		436
		15°,0							
						C. I.		I. M.	

SERIE III. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♀ 14	25		Española.	1	1 45	8,365		9,593	
						360		591	
						350		596	
				2	46		9,846		8,440
							865		442
							856		438
				3	48	8,375		9,616	
						346		615	
						344		612	
			Egipcia.	4	51	10,400		10,210	
						405		213	
						402		211	
				5	52		9,012		9,824
							022		830
							022		832
				6	53	10,405		10,221	
						404		217	
						405		216	
	26		Egipcia.	1	55		9,016		9,856
							017		862
							012		860
				2	57	10,410		10,232	
						406		233	
						410		230	
				3	58		9,010		9,876
							007		880
							000		882
			Española.	4	2 1		9,740		8,431
							732		431
							740		430
				5	2	8,220		9,568	
						230		569	
						218		562	
				6	4		9,720		8,430
							722		428
							726		428
		15°,4							
						I. M.		*C. I.*	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 14	27		Española.	1	2 8	8,183		9,572	
						177		572	
						178		565	
				2	10		9,611		8,425
							611		435
							616		430
				3	11	8,180		9,564	
						179		567	
						175		573	
			Egipcia.	4	13	10,261		10,197	
						266		208	
						268		208	
				5	15		8,820		9,838
							826		836
							821		850
				6	16	10,262		10,200	
						268		201	
						268		202	
	28		Egipcia.	1	17		8,812		9,876
							820		865
							817		872
				2	19	10,270		10,209	
						263		212	
						270		212	
				3	20		8,807		9,882
							809		883
							806		886
			Española.	4	23		10,530		9,452
							536		433
							539		442
				5	25	9,115		10,552	
						117		555	
						120		550	
				6	26		10,526		9,452
							524		453
							520		447
		15,5°							
						C. I.		I. M.	

SERIE III. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 14	29		Española.	1	2 33	9,105		10,521	
						128		516	
						106		521	
				2	34		10,570		9,429
							570		427
							566		430
				3	36	9,125		10,530	
						130		523	
						130		520	
			Egipcia.	4	39	10,608		10,539	
						610		544	
						612		549	
				5	40		9,127		10,278
							125		287
							142		289
				6	41	10,620		10,556	
						624		560	
						624		559	
	30		Egipcia.	1	43		9,128		10,310
							135		315
							135		320
				2	45	10,635		10,580	
						646		578	
						638		574	
				3	46		9,140		10,330
							138		336
							143		330
			Española.	4	50		11,205		10,128
							210		122
							208		120
				5	51	9,798		11,192	
						790		196	
						795		192	
				6	52		11,190		10,116
							205		111
							200		112
		15°,6							
						I. M.		C. I.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Despues de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
					h m	v	v	v	v
♀ 14	30	15°,6	Española.	1	2 58	10,990		12,371	
				2			7,930		9,366
				3			910		370
				4		956		371	
				5		970		360	
				6			895		370
				7			895		377
				8		945		361	
				9		960		358	
				10			886		371
				11			890		366
				12		956		359	
			Egipcia.	1		10,700		10,609	
				2			7,692		7,641
				3			705		650
				4		705		629	
				5		718		630	
				6			704		644
				7			730		650
				8		716		621	
				9		724		619	
				10			710		643
				11			745		643
				12		744		622	
							I. M.		*C. I.*

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m	°	p	p	p	p	p	p	p	p
♀ 14	3 24	14,9	+ 1,7	+ 1,2	+ 8,0	— 6,8	+10,4	—10,0	+ 9,9	—10,9
			—12,0	—12.6	+30,4	—29,3	+25,5	—25,1	+25,0	—25,9
			I. M.		*I. M.*		*C. I.*		*C. I.*	

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL		REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL		MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL		MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL	
			Norte.	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*
	h m	°	p	p	p	p	p	p	p	p
♄ 15	9 36	11,5	+ 2,3	+ 2,8	+ 5,8	— 5,9	+ 9,8	— 9,5	+ 9,3	—11,0
			—12,6	—12,0	+29,8	—30,0	+26,0	—25,6	+25,0	—26,6
			C. I.		*C. I.*		*I. M.*		*M. I.*	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Antes de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.		MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	
						39485	39488	510	513
		°			h m	v	v	v	v
♄ 15	31	11,6	Egipcia.	1	10 10	12,554		10,899	
				2			9,558		7,898
				3			565		901
				4		545		889	
				5		546		894	
				6			542		901
				7			558		900
				8		546		886	
				9		536		890	
				10			538		900
				11			548		908
				12		544		900	
			Española.	1		10,792		10,694	
				2			7,742		7,711
				3			738		705
				4		775		684	
				5		762		680	
				6			728		703
				7			718		700
				8		758		682	
				9		756		690	
				10			706		702
				11			702		697
				12		756		683	
						I. M.		*C. I.*	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	31		Española.	1	10 33	10,386		10,388	
						412		393	
						426		414	
				2	34		12,656		8,618
							660		628
							661		629
				3	36	10,450		10,436	
						438		436	
						430		434	
			Egipcia.	4	39	11,618		10,152	
						625		149	
						626		143	
				5	40		10,965		9,123
							964		129
							974		130
				6	41	11,636		10,189	
						638		184	
						633		189	
	32		Egipcia.	1	43		10,953		9,171
							954		178
							956		174
				2	44	11,642		10,211	
						640		219	
						638		215	
				3	45		10,946		9,192
							955		187
							944		183
			Española.	4	50		11,864		8,059
							846		063
							836		057
				5	52	9,680		9,780	
						673		780	
						677		772	
				6	53		11,838		8,062
							822		068
							812		062
		12°,4				I. M.		C. I.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	33		Española.	1	10 57	9,640		9,826	
						637		814	
						632		815	
				2	59		11,751		8,095
							748		099
							744		100
				3	11 00	9,638		9,816	
						632		806	
						639		812	
			Egipcia.	4	4	10,510		9,251	
						513		250	
						511		243	
				5	6		9,730		8,241
							724		250
							730		250
				6	7	10,499		9,235	
						499		230	
						500		215	
	34		Egipcia.	1	9		9,701		8,276
							694		291
							694		290
				2	10	10,488		9,225	
						478		240	
						475		240	
				3	11		9,679		8,306
							670		306
							666		316
			Española.	4	14		11,050		7,636
							038		636
							032		644
				5	16	8,989		9,312	
						989		328	
						991		324	
				6	18		11,008		7,646
							004		643
							009		642
		12,6							

C. I. I. M.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	35		Española.	1	11 37	8,883		9,341	
						906		338	
						888		338	
				2	38		10,856		7,749
							845		752
							842		752
				3	39	8,874		9,338	
						868		341	
						865		336	
			Egipcia.	4	42	11,532		10,502	
						544		503	
						548		514	
				5	44		10,644		9,778
							654		776
							652		782
				6	45	11,580		10,561	
						566		569	
						570		663	
	36		Egipcia.	1	47		10,658		9,809
							666		820
							650		817
				2	48	11,573		10,570	
						574		571	
						573		578	
				3	49		10,650		9,859
							634		857
							625		854
			Española.	4	54		12,635		9,741
							622		753
							635		753
				5	56	10,712		11,284	
						704		283	
						706		286	
				6	57		12,620		9,782
							620		781
							620		788
		13°,6							
						I. M.		C. I.	

SERIE IV. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.	MICROSCOPIO NORTE. LATON.	MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	MICROSCOPIO SUR. LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	37		Española.	1	12 0	10,661		11,312	
						661		323	
						660		322	
				2	2		12,510		9,830
							500		836
							505		842
				3	3	10,658		11,316	
						650		315	
						652		325	
			Egipcia.	4	7	10,668		9,913	
						671		916	
						667		912	
				5	8		9,597		9,292
							588		305
							589		300
				6	10	10,664		9,928	
						662		926	
						662		924	
	38		Egipcia.	1	11		9,571		9,324
							571		318
							577		315
				2	12	10,648		9,948	
						649		936	
						651		950	
				3	14		9,531		9,356
							521		358
							519		368
			Española.	4	18		11,011		8,566
							000		536
							10,983		535
				5	20	9,213		9,970	
						213		976	
						214		965	
				6	21		10,947		8,530
							952		516
							954		525
		13,8							

C. I. I. M.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	39		Española.	1	12 25	9,246		9,928	
						246		920	
						246		918	
				2	26		11,052		8,494
							042		492
							036		488
				3	28	9,236		9,919	
						236		912	
						240		903	
			Egipcia.	4	31	10,087		9,330	
						094		339	
						096		342	
				5	33		9,070		8,713
							066		706
							089		707
				6	35	10,148		9,346	
						195		348	
						184		344	
	40		Egipcia.	1	40		9,150		8,676
							142		669
							140		675
				2	42	10,180		9,330	
						180		324	
						186		324	
				3	43		9,160		8,678
							157		676
							158		677
			Española.	4	47		11,974		9,285
							978		286
							978		283
				5	48	10,122		10,678	
						124		672	
						126		672	
				6	50		11,990		9,270
							988		270
							996		269
		13°,6							
						I. M.		C. I.	

SERIE V. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	41		Española.	1	12 58	10,084		10,670	
						090		676	
						087		682	
				2	59		11,950		9,260
							947		250
							953		256
				3	1 1	10,090		10,672	
						100		670	
						100		672	
			Egipcia.	4	3	11,439		10,505	
						441		482	
						447		498	
				5	5		10,479		9,835
							467		818
							463		824
				6	6	11,456		10,516	
						466		516	
						469		514	
	42		Egipcia.	1	7		10,469		9,856
							475		885
							471		860
				2	9	11,463		10,540	
						465		528	
						471		526	
				3	10		10,467		9,850
							462		858
							460		860
			Española.	4	13		11,346		8,695
							347		692
							341		685
				5	15	9,499		10,122	
						493		132	
						495		122	
				6	16		11,311		8,682
							311		686
							311		686
		13,8							

C. I. I. M.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	43		Española.	1	1 19	9,294		9,904	
						312		907	
						295		908	
				2	21		11,160		8,472
							146		480
							138		482
				3	22	9,295		9,901	
						302		895	
						284		903	
			Egipcia.	4	25	11,227		10,279	
						250		288	
						226		294	
				5	27		10,252		9,633
							240		633
							245		638
				6	28	11,265		10,330	
						256		326	
						262		334	
	44		Egipcia.	1	31		10,261		9,645
							276		638
							276		645
				2	32	11,270		10,332	
						282		335	
						270		338	
				3	34		10,285		9,662
							286		650
							278		645
			Española.	4	39		10,797		8,199
							815		200
							810		198
				5	41	8,970		9,580	
						960		590	
						966		585	
				6	42		10,788		8,204
							797		203
							798		200
		13°,8							
						I. M.		C. I.	

SERIE V. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.	MICROSCOPIO NORTE. LATON.	MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	MICROSCOPIO SUR. LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	45		Española.	1	1 46	8,932		9,602	
						938		601	
						934		604	
				2	48		10,758		8,183
							754		193
							760		193
				3	50	8,937		9,592	
						928		596	
						930		592	
			Egipcia.	4	53	10,350		9,454	
						351		444	
						356		454	
				5	55		9,343		8,792
							349		770
							356		785
				6	56	10,369		9,444	
						376		442	
						380		444	
	46		Egipcia.	1	58		9,378		8,765
							369		758
							372		757
				2	59	10,381		9,445	
						388		446	
						380		442	
				3	2 1		9,391		8,752
							394		752
							390		750
			Española.	4	5		10,814		8,210
							812		212
							812		220
				5	6	8,981		9,614	
						978		616	
						982		624	
				6	7		10,795		8,215
							799		213
							806		216
		13,7							
						C. I.		I. M.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	47		Española.	1	2 20	9,006		9,544	
						8,990		554	
						986		554	
				2	22		10,856		8,165
							856		161
							855		170
				3	23	8,988		9,550	
						998		556	
						984		550	
			Egipcia.	4	27	10,800		9,793	
						804		796	
						800		790	
				5	28		9,844		9,152
							850		150
							836		153
				6	29	10,818		9,793	
						805		798	
						810		800	
	48		Egipcia.	1	31		9,850		9,143
							860		154
							852		148
				2	32	10,830		9,791	
						828		790	
						832		792	
				3	34		9,876		9,129
							882		131
							890		138
			Española.	4	37		11,388		8,562
							390		562
							386		559
				5	38	9,486		9,994	
						493		992	
						493		997	
				6	39		11,386		8,561
							385		560
							386		560
		13,°6				I. M.		C. I.	

SERIE V. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♄ 15	49		Española.	1	2 44	9,479		10,006	
						482		002	
						481		010	
				2	46		11,355		8,543
							354		547
							358		546
				3	47	9,488		10,004	
						484		008	
						488		000	
			Egipcia.	4	51	10,759		9,736	
						762		743	
						760		745	
				5	52		9,795		9,054
							791		056
							798		045
				6	54	10,759		9,750	
						762		766	
						768		758	
	50		Egipcia.	1	56		9,818		9,056
							825		056
							820		046
				2	57	10,770		9,755	
						780		756	
						780		752	
				3	59		9,810		9,045
							819		050
							816		046
			Española.	4	3 3		11,459		8,635
							454		624
							452		625
				5	4	9,578		10,072	
						572		075	
						570		070	
				6	5		11,431		8,610
							431		606
							431		604
		13°,3							
						C. I.		I. M.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Despues de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
					h m	v	v	v	v
♄ 15	50	13°,3	Española.	1	3 13	11,121		11,595	
				2			8,058		8,606
				3			062		594
				4		120		585	
				5		120		592	
				6			060		604
				7			068		596
				8		118		583	
				9		113		588	
				10			058		596
				11			062		602
				12		120		592	
			Egipcia.	1		12,509		11,472	
				2			9,520		8,483
				3			527		483
				4		530		477	
				5		532		478	
				6			535		482
				7			545		476
				8		541		468	
				9		536		466	
				10			531		496
				11			540		485
				12		536		467	
						C. I.		I. M.	

NIVELACIONES. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m		p	p	p	p	p	p	p	p
♄ 15	3 32	13°,3	+ 1,7	+ 2,4	+ 6,6	— 7,2	+ 9,8	—10,0	+10,0	—11,0
			—12,3	—11,8	+29,6	—30,2	+25,4	—25,3	+25,2	—26,3
			I. M.		I. M.		I. M.		I. M.	

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m	°	p	p	p	p	p	p	p	p
⊙ 16	9 20	11,1	+ 3,4	+ 3,0	+ 5,7	— 5,5	+ 9,5	— 9,4	+ 9,3	—10,4
			—11,0	—12,0	+30.0	—29,8	+25,8	—25,7	+25,4	—26,5
			C. I.		C. I.		C. I.		C. I.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Antes de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39185	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39188	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
		°			h m	v	v	v	v
⊙ 16	51	11,1	Española.	1	9 43	12,278		12,050	
				2			9,211		9,072
				3			210		073
				4		262		073	
				5		268		064	
				6			200		082
				7			204		082
				8		260		074	
				9		257		072	
				10			194		074
				11			194		081
				12		244		065	
			Egipcia.	1		12,639		11,010	
				2			9,659		8,008
				3			654		003
				4		642		000	
				5		641		002	
				6			640		014
				7			639		7,993
				8		626		10,982	
				9		628		993	
				10			635		8,006
				11			640		7,992
				12		622		984	
						C. I.		I. M.	

SERIE VI. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
⊙ 16	51		Española.	1	10 4	9,540		9,495	
						536		492	
						538		498	
				2	6		11,748		7,606
							747		623
							741		635
				3	7	9,521		9,484	
						519		500	
						519		490	
			Egipcia.	4	11	10,958		9,443	
						960		453	
						960		450	
				5	12		10,373		8,364
							373		363
							376		355
				6	13	10,989		9,438	
						985		453	
						980		440	
	52		Egipcia.	1	15		10,370		8,352
							377		356
							378		356
				2	16	10,979		9,456	
						974		458	
						980		456	
				3	18		10,361		8,374
							362		375
							360		375
			Española.	4	21		11,791		7,820
							782		830
							781		828
				5	22	9,597		9,630	
						599		626	
						601		628	
				6	24		11,771		7,832
							770		832
							767		846
		11,8							
						C. I.		I. M.	

SERIE VI. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.	MICROSCOPIO NORTE. LATON.	MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	MICROSCOPIO SUR. LATON.
					h m	v	v	v	v
☉ 16	53		Española.	1	10 27	9,592		9,594	
						586		600	
						578		607	
				2	28		11,762		7,834
							755		829
							755		839
				3	30	9,564		9,588	
						576		597	
						582		590	
			Egipcia.	4	34	11,432		10,018	
						432		021	
						423		030	
				5	35		10,718		9,030
							710		035
							714		040
				6	36	11,420		10,053	
						422		060	
						418		057	
	54		Egipcia.	1	38		10,704		9,054
							688		051
							685		053
				2	39	11,410		10,098	
						406		088	
						410		092	
				3	40		10,680		9,080
							685		078
							670		081
			Española.	4	43		12,238		8,512
							205		512
							206		513
				5	45	10,068		10,231	
						068		230	
						078		231	
				6	46		12,190		8,512
							180		514
							174		513
		12°,4							
						I. M.		*C. I.*	

SERIE VI. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.	MICROSCOPIO NORTE. LATON.	MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	MICROSCOPIO SUR. LATON.
					h m	v	v	v	v
⊙ 16	55		Española.	1	10 50	10,024		10,256	
						019		246	
						020		260	
				2	52		12,098		8,540
							087		542
							082		536
				3	53	10,009		10,265	
						012		266	
						002		262	
			Egipcia.	4	56	10,541		9,314	
						544		306	
						552		305	
				5	58		9,744		8,372
							739		376
							743		382
				6	59	10,549		9,316	
						557		314	
						550		315	
	56		Egipcia.	1	11 1		9,741		8,394
							741		402
							742		402
				2	2	10,548		9,323	
						556		335	
						550		332	
				3	3		9,729		8,412
							738		412
							732		416
			Española.	4	10		10,323		6,906
							329		918
							322		912
				5	11	8,279		8,582	
						275		586	
						274		575	
				6	12		10,309		6,915
							300		910
							304		923
		12°,1							

C. I. I. M.

SERIE VI. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
⊙ 16	57		Española.	1	11 18	8,245		8,549	
						250		556	
						240		563	
				2	20		10,288		6,896
							285		891
							276		893
				3	21	8,245		8,551	
						242		554	
						240		539	
			Egipcia.	4	26	10,250		9,189	
						256		198	
						266		200	
				5	27		9,375		8,331
							363		330
							360		335
				6	28	10,265		9,200	
						262		206	
						253		201	
	58		Egipcia.	1	30		9,370		8,350
							370		356
							370		364
				2	31	10,252		9,213	
						258		216	
						252		220	
				3	32		9,370		8,369
							370		363
							378		370
			Española.	4	36		12,076		8,789
							075		794
							070		797
				5	38	10,060		10,437	
						048		431	
						056		428	
				6	39		12,074		8,803
							075		801
							075		808
		12,8							

I. M. C. I.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☉ 16	59		Española.	1	12 12	9,985		10,428	
						10,000		432	
						000		430	
				2	13		11,910		8,836
							901		836
							902		827
				3	15	9,990		10,436	
						995		436	
						995		438	
			Egipcia.	4	18	11,339		10,374	
						350		392	
						354		372	
				5	19		10,388		9,632
							392		628
							404		628
				6	21	11,384		10,388	
						387		390	
						386		406	
	60		Egipcia.	1	22		10,444		9,624
							435		610
							437		605
				2	23	11,396		10,395	
						396		404	
						390		400	
				3	25		10,438		9,618
							441		620
							446		628
			Española.	4	28		11,771		8,734
							772		732
							766		736
				5	29	9,839		10,300	
						839		310	
						833		308	
				6	31		11,758		8,716
							766		710
							762		706
		12°8							
						C. I.		I. M.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Despues de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
					h m	v	v	v	v
⊙ 16	60	14°,1	Española.	1	2 4	9,578		10,308	
				2			6,481		7,324
				3			496		322
				4		565		308	
				5		565		307	
				6			490		320
				7			488		318
				8		570		299	
				9		570		301	
				10			498		321
				11			493		321
				12		560		294	
			Egipcia.	1		11,620		10,753	
				2			8,596		7,775
				3			595		770
				4		610		746	
				5		618		753	
				6			610		759
				7			610		764
				8		625		748	
				9		635		750	
				10			620		770
				11			622		775
				12		625		749	
						C. I.		I. M.	

NIVELACIONES. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m	°	p	p	p	p	p	p	p	p
⊙ 16	2 25	14,0	+ 2,0	+ 1,8	+ 7,2	— 7,0	+ 9,9	—10,0	+10,0	—10,8
			—12,0	—12,2	+30,2	—30,0	+25,4	—25,5	+25,4	—26,2
			I. M.		I. M.		I. M.		I. M.	

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m	°	p	p	p	p	p	p	p	p
☾ 17	8 46	7,8	+ 4,3	+ 4,1	+ 7,1	— 6,7	+ 9,2	— 9,2	+ 8,9	— 9,9
			—11,4	—11,6	+32,6	—32,1	+26,2	—26,1	+25,9	—26,9
			C. I.		C. I.		C. I.		C. I.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Antes de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
		°			h m	v	v	v	v
☾ 17	61	9,5	Española.	1	9 44	11,771		10,794	
				2			8,700		7,820
				3			695		823
				4		765		803	
				5		748		803	
				6			686		818
				7			688		825
				8		746		819	
				9		750		820	
				10			686		839
				11			672		838
				12		742		819	
			Egipcia.	1		12,210		9,849	
				2			9,218		6,887
				3			236		892
				4		216		861	
				5		225		857	
				6			246		895
				7			244		888
				8		208		859	
				9		215		866	
				10			216		900
				11			240		907
				12		205		869	
						I. M.		C. I.	

SERIE VII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.	MICROSCOPIO NORTE. LATON.	MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	MICROSCOPIO SUR. LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	61		Española.	1	10 4	10,708		9,951	
						714		958	
						702		958	
				2	5		13,296		7,739
							310		739
							295		737
				3	7	10,652		9,935	
						656		930	
						642		933	
			Egipcia.	4	10	10,948		8,757	
						956		754	
						953		757	
				5	11		10,672		7,355
							668		358
							678		363
				6	13	10,942		8,771	
						956		781	
						945		781	
	62		Egipcia.	1	15		10,652		7,388
							661		389
							646		392
				2	16	10,936		8,788	
						942		788	
						950		792	
				3	17		10,618		7,403
							625		409
							620		413
			Española.	4	22		12,461		7,224
							465		221
							446		215
				5	23	9,895		9,312	
						874		321	
						885		319	
				6	25		12,404		7,213
							394		213
							410		216
		10°,3							
						I. M.		*C. I.*	

SERIE VII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	63		Española.	1	10 28	9,841		9,350	
						833		346	
						838		346	
				2	30		12,318		7,253
							321		253
							317		262
				3	31	9,833		9,352	
						839		352	
						832		354	
			Egipcia.	4	34	11,875		9,932	
						870		915	
						876		922	
				5	35		11,469		8,580
							474		596
							467		610
				6	36	11,869		9,945	
						860		936	
						866		955	
	64		Egipcia.	1	38		11,453		8,632
							447		638
							440		642
				2	39	11,869		9,955	
						860		955	
						857		950	
				3	40		11,433		8,636
							439		652
							432		644
			Española.	4	44		12,160		7,368
							150		342
							140		352
				5	46	9,735		9,361	
						729		360	
						722		352	
				6	47		12,092		7,346
							087		344
							082		345
		10°,7							

C. I. I. M.

SERIE VII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	65		Española.	1	10 57	9,650		9,343	
						630		346	
						620		352	
				2	58		11,968		7,378
							994		383
							999		388
				3	11 0	9,635		9,354	
						622		362	
						610		358	
			Egipcia.	4	3	12,158		10,412	
						156		420	
						158		419	
				5	4		11,592		9,281
							587		288
							592		288
				6	5	12,158		10,442	
						155		442	
						150		448	
	66		Egipcia.	1	7		11,587		9,319
							580		319
							570		313
				2	8	12,142		10,462	
						145		470	
						146		472	
				3	9		11,564		9,333
							554		337
							558		346
			Española.	4	13		13,300		8,931
							295		931
							290		931
				5	15	10,975		10,821	
						967		820	
						978		818	
				6	16		13,246		8,941
							258		942
							263		945
		11,5°				I. M.		C. I.	

SERIE VII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	67		Española.	1	11 52	10,709		10,868	
						712		883	
						710		876	
				2	53		12,742		9,132
							739		140
							743		126
				3	55	10,713		10,875	
						716		872	
						711		866	
			Egipcia.	4	58	10,679		9,405	
						679		412	
						684		418	
				5	59		9,848		8,523
							860		516
							870		516
				6	12 1	10,718		9,416	
						722		406	
						726		402	
	68		Egipcia.	1	2		9,903		8,485
							908		482
							914		508
				2	4	10,723		9,418	
						730		420	
						730		422	
				3	5		9,914		8,502
							900		512
							898		510
			Española.	4	9		10,298		6,672
							290		660
							280		660
				5	10	8,219		8,368	
						222		376	
						218		366	
				6	11		10,253		6,636
							250		640
							247		640
		12,°1							
						C. I.		I. M.	

SERIE VII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	69		Española.	1	12 13	8,194		8,316	
						199		312	
						198		313	
				2	15		10,227		6,613
							226		620
							228		619
				3	16	8,180		8,331	
						180		320	
						182		317	
			Egipcia.	4	22	10,994		9,698	
						992		701	
						990		697	
				5	23		10,150		8,791
							126		785
							138		788
				6	25	10,976		9,682	
						980		690	
						977		688	
	70		Egipcia.	1	28		10,133		8,823
							130		820
							130		811
				2	30	10,980		9,710	
						954		706	
						970		709	
				3	31		10,135		8,827
							155		830
							140		832
			Española.	4	35		12,410		8,898
							410		894
							410		900
				5	36	10,365		10,537	
						350		542	
						345		542	
				6	37		12,361		8,907
							382		907
							380		913
		12°8							
						I. M.		C. I.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	71		Española.	1	12 48	10,228		10,587	
						226		587	
						220		585	
				2	49		12,134		8,976
							133		996
							128		994
				3	50	10,202		10,592	
						208		594	
						210		596	
			Egipcia.	4	53	9,830		8,800	
						828		800	
						824		792	
				5	54		8,895		8,032
							888		025
							887		024
				6	56	9,818		8,813	
						811		824	
						811		810	
	72		Egipcia.	1	58		8,869		8,044
							869		043
							862		038
				2	59	9,813		8,834	
						813		820	
						809		823	
				3	1 0		8,850		8,046
							846		056
							852		052
			Española.	4	3		10,182		7,276
							189		276
							180		266
				5	5	8,321		8,802	
						326		805	
						322		796	
				6	6		10,159		7,252
							162		244
							158		240
		12,°9							
						C. I.		I. M.	

SERIE VIII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	73		Española.	1	1 11	8,344		8,717	
						340		716	
						342		720	
				2	12		10,146		7,226
							156		229
							162		221
				3	13	8,330		8,729	
						343		731	
						334		727	
			Egipcia.	4	16	11,036		9,946	
						027		952	
						027		951	
				5	18		10,022		9,215
							034		213
							036		210
				6	20	11,060		9,966	
						040		970	
						050		968	
	74		Egipcia.	1	23		10,080		9,178
							092		170
							098		170
				2	25	11,105		9,943	
						114		943	
						140		937	
				3	27		10,140		9,140
							156		130
							142		140
			Española.	4	30		10,934		7,694
							922		689
							926		685
				5	31	9,008		9,246	
						8,986		244	
						995		242	
				6	33		10,925		7,653
							948		654
							948		649
		12°,4							
						I. M.		C. I.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	75		Española.	1	1 38	8,981		9,226	
						990		233	
						992		235	
				2	39		10,938		7,615
							934		615
							928		615
				3	41	8,990		9,226	
						989		226	
						997		215	
			Egipcia.	4	43	10,644		9,418	
						652		412	
						657		412	
				5	45		9,785		8,566
							775		564
							770		546
				6	46	10,659		9,424	
						653		425	
						652		416	
	76		Egipcia.	1	47		9,802		8,560
							802		556
							806		546
				2	48	10,674		9,418	
						674		418	
						681		426	
				3	49		9,797		8,558
							802		556
							805		553
			Española.	4	53		11,420		7,963
							415		955
							415		963
				5	55	9,429		9,556	
						436		565	
						430		552	
				6	56		11,420		7,946
							424		948
							417		948
		12°,0				C. I.		I. M.	

SERIE VIII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	77		Española.	1	2 1	9,444		9,502	
						433		501	
						453		498	
				2	2		11,470		7,912
							494		917
							490		911
				3	3	9,460		9,501	
						448		506	
						448		503	
			Egipcia.	4	6	11,064		9,621	
						064		614	
						070		618	
				5	8		10,152		8,719
							182		716
							180		720
				6	10	11,035		9,613	
						036		608	
						055		618	
	78		Egipcia.	1	12		10,186		8,723
							170		710
							150		701
				2	14	11,070		9,631	
						052		631	
						056		623	
				3	15		10,158		8,710
							173		713
							170		706
			Española.	4	19		12,528		8,851
							525		844
							512		840
				5	20	10,442		10,471	
						442		473	
						440		466	
				6	22		12,516		8,839
							515		834
							510		839
		12°,3							

I. M. *C. I.*

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☾ 17	79		Española.	1	2 25	10,396		10,506	
						404		501	
						402		503	
				2	26		12,419		8,862
							417		863
							420		862
				3	28	10,404		10,505	
						409		506	
						405		504	
			Egipcia.	4	31	10,349		9,040	
						354		052	
						370		052	
				5	32		9,521		8,130
							510		118
							506		128
				6	33	10,349		9,055	
						360		052	
						363		052	
	80		Egipcia.	1	35		9,503		8,154
							499		142
							492		136
				2	36	10,351		9,054	
						350		058	
						341		056	
				3	37		9,509		8,124
							512		132
							508		140
			Española.	4	41		10,952		7,443
							940		456
							934		452
				5	42	8,915		9,110	
						910		112	
						912		120	
				6	43		10,907		7,452
							902		460
							898		456
		12,2							
						C. I.		I. M.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Despues de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
					h m	v	v	v	v
☾ 17	80	12°,2	Española.	1	2 47	11,059		11,308	
				2			8,000		8,326
				3			005		332
				4		049		335	
				5		047		333	
				6			7,983		342
				7			994		333
				8		044		338	
				9		044		332	
				10			980		341
				11			988		342
				12		050		332	
			Egipcia.	1		12,333		11,216	
				2			9,351		8,216
				3			340		216
				4		326		214	
				5		327		213	
				6			335		220
				7			330		232
				8		300		216	
				9		301		210	
				10			328		218
				11			324		222
				12		297		228	
						I. M.		*C. I.*	

NIVELACIONES. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m		p	p	p	p	p	p	p	p
☾ 17	3 9	12°,2	+ 2,7	+ 2,7	+ 6,8	— 7,3	+ 9,7	— 9,9	+ 9,4	—10,1
			—12,0	—12,0	+30,4	—31,0	+25,4	—25,6	+25,0	—25,8
			I. M.		*I. M.*		*I. M.*		*I. M.*	

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m	°	p	p	p	p	p	p	p	p
☉ 18	9 18	10,6	+ 3,8	+ 3,0	+ 7,2	— 1,9	+ 9,2	— 9,5	+ 9,0	— 9,9
			—11,5	—12,1	+31,6	—29,3	+25,8	—26,0	+25,4	—26,2
			I. M.		I. M.		I. M.		I. M.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Antes de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
		°			h m	v	v	v	v
☉ 18	81	10,6	Española.	1	9 40	11,352		10,838	
				2			8,331		7,868
				3			331		858
				4		349		828	
				5		350		831	
				6			311		848
				7			319		855
				8		341		824	
				9		348		832	
				10			313		850
				11			309		856
				12		331		820	
			Egipcia.	1		12,279		10,228	
				2			9,288		7,232
				3			284		246
				4		266		253	
				5		271		260	
				6			291		264
				7			300		264
				8		272		266	
				9		270		258	
				10			290		276
				11			295		282
				12		280		265	
						C. I.		I. M.	

SERIE IX. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♂ 18	81		Española.	1	10 0	9,390		8,926	
						391		927	
						385		932	
				2	1		11,738		6,935
							732		932
							727		940
				3	2	9,355		8,936	
						352		928	
						348		932	
			Egipcia.	4	5	11,953		10,061	
						942		085	
						950		071	
				5	7		11,482		8,793
							479		804
							479		805
				6	8	11,952		10,093	
						947		076	
						944		092	
	82		Egipcia.	1	10		11,479		8,814
							479		835
							477		830
				2	11	11,948		10,112	
						955		112	
						951		106	
				3	13		11,479		8,832
							473		846
							467		839
			Española.	4	16		12,038		7,438
							029		443
							029		442
				5	17	9,729		9,382	
						717		384	
						715		378	
				6	19		12,020		7,435
							014		427
							017		425
		11,0							

C. I. I. M.

SERIE IX. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♂ 18	83		Española.	1	10 22	9,703		9,349	
						694		353	
						696		350	
				2	23		11,972		7,421
							970		422
							971		428
				3	24	9,675		9,356	
						670		352	
						674		358	
			Egipcia.	4	27	11,410		9,569	
						408		577	
						410		574	
				5	29		10,838		8,431
							833		431
							834		440
				6	30	11,406		9,600	
						410		594	
						415		596	
	84		Egipcia.	1	32		10,814		8,472
							815		477
							815		478
				2	33	11,408		9,619	
						400		619	
						406		614	
				3	34		10,804		8,496
							800		500
							802		502
			Española.	4	37		12,692		8,376
							695		372
							686		373
				5	38	10,440		10,235	
						438		234	
						430		234	
				6	40		12,666		8,368
							656		374
							658		374
		11°,6							
						I. M.		C. I.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♂ 18	85		Española.	1	10 45	10,378		10,270	
						373		270	
						370		270	
				2	46		12,574		8,416
							574		418
							571		422
				3	47	10,362		10,276	
						369		268	
						374		262	
			Egipcia.	4	50	12,084		10,488	
						084		487	
						089		485	
				5	51		11,452		9,410
							458		424
							454		412
				6	53	12,101		10,494	
						094		496	
						090		487	
	86		Egipcia.	1	54		11,461		9,426
							459		417
							455		426
				2	55	12,105		10,508	
						104		495	
						100		503	
				3	57		11,443		9,448
							443		448
							452		442
			Española.	4	11 0		12,862		8,870
							857		863
							850		866
				5	2	10,706		10,654	
						702		656	
						707		650	
				6	3		12,843		8,861
							843		862
							849		860
		11,°4							

C. I. I. M.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♂ 18	87		Española.	1	11 8	10,642		10,616	
						656		619	
						648		622	
				2	10		12,762		8,872
							752		867
							758		871
				3	11	10,635		10,629	
						634		629	
						632		629	
			Egipcia.	4	14	10,942		9,501	
						955		506	
						940		508	
				5	15		10,200		8,529
							203		531
							197		534
				6	17	10,948		9,520	
						948		520	
						950		524	
	88		Egipcia.	1	18		10,198		8,565
							180		568
							180		571
				2	20	10,930		9,541	
						930		541	
						926		550	
				3	21		10,160		8,600
							160		603
							156		606
			Española.	4	24		11,882		8,318
							885		321
							876		319
				5	26	9,836		10,004	
						828		002	
						834		008	
				6	27		11,840		8,326
							830		320
							836		321
		12°,6							
						I. M.		*C. I.*	

SERIE IX. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♂ 18	89		Española.	1	11 33	9,771		10,042	
						771		036	
						768		045	
				2	35		11,751		8,355
							753		348
							751		360
				3	37	9,752		10,030	
						757		030	
						754		036	
			Egipcia.	4	39	11,886		10,710	
						882		716	
						894		710	
				5	41		10,994		9,866
							996		872
							990		878
				6	42	11,880		10,718	
						880		716	
						882		722	
	90		Egipcia.	1	44		10,976		9,905
							981		900
							977		898
				2	45	11,870		10,740	
						871		738	
						868		736	
				3	47		10,957		9,934
							959		938
							960		943
			Española.	4	49		12,109		8,940
							100		935
							097		936
				5	50	10,163		10,522	
						169		516	
						164		515	
				6	52		12,054		8,936
							054		932
							047		936
		12°,8							
						C. I.		I. M.	

SERIE X. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♂ 18	91		Española.	1	12 21	10,086		10,408	
						084		404	
						095		410	
				2	23		11,955		8,840
							958		841
							972		840
				3	24	10,073		10,402	
						090		408	
						092		407	
			Egipcia.	4	27	10,936		9,840	
						932		848	
						930		845	
				5	28		9,935		9,076
							948		080
							950		080
				6	30	10,938		9,853	
						950		856	
						950		857	
	92		Egipcia.	1	31		9,958		9,089
							956		088
							954		092
				2	32	10,958		9,856	
						960		860	
						960		862	
				3	33		9,975		9,092
							970		099
							960		097
			Española.	4	37		12,726		9,625
							738		630
							730		627
				5	38	10,830		11,194	
						828		193	
						820		193	
				6	40		12,690		9,617
							690		612
							690		613
		13°,2				I. M.		C. I.	

SERIE X. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☉ 18	93		Española.	1	12 45	10,789		11,204	
						790		212	
						784		212	
				2	46		12,628		9,653
							623		650
							620		645
				3	47	10,783		11,222	
						778		215	
						774		210	
			Egipcia.	4	50	10,355		9,346	
						353		343	
						353		346	
				5	51		9,347		8,544
							342		558
							349		567
				6	53	10,371		9,352	
						379		348	
						373		348	
	94		Egipcia.	1	55		9,353		8,586
							351		576
							350		570
				2	56	10,370		9,383	
						368		380	
						368		372	
				3	57		9,358		8,592
							363		600
							365		592
			Española.	4	59		11,566		8,694
							570		692
							565		700
				5	1 1	9,738		10,232	
						739		228	
						741		234	
				6	2		11,541		8,687
							530		694
							528		690
		13°,2				C. I.		I. M.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♂ 18	95		Española.	1	1 6	9,696		10,191	
						694		202	
						698		200	
				2	7		11,470		8,680
							480		683
							488		689
				3	9	9,685		10,207	
						685		208	
						686		199	
			Egipcia.	4	11	9,916		8,939	
						935		944	
						940		941	
				5	12		8,868		8,221
							862		222
							870		224
				6	14	9,948		8,958	
						928		963	
						940		959	
	96		Egipcia.	1	15		8,872		8,231
							885		234
							877		240
				2	17	9,955		8,960	
						945		969	
						948		972	
				3	18		8,875		8,257
							875		253
							868		260
			Española.	4	21		11,846		9,193
							856		186
							860		184
				5	23	10,098		10,624	
						086		627	
						070		623	
				6	24		11,832		9,183
							852		174
							850		177
		13°,7							
						I. M.		C. I.	

SERIE X. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♂ 18	97		Española.	1	1 54	9,987		10,658	
						990		664	
						986		658	
				2	55		11,700		9,276
							702		278
							698		274
				3	56	9,972		10,662	
						979		660	
						979		660	
			Egipcia.	4	59	11,100		10,318	
						100		330	
						108		335	
				5	2 0		9,985		9,646
							994		636
							988		650
				6	1	11,128		10,330	
						126		328	
						131		323	
	98		Egipcia.	1	3		10,000		9,654
							005		656
							012		642
				2	4	11,140		10,316	
						151		330	
						147		333	
				3	5		10,019		9,658
							020		662
							024		660
			Española.	4	7		12,280		9,878
							280		870
							274		870
				5	9	10,571		11,255	
						579		256	
						569		252	
				6	10		12,259		9,870
							254		865
							250		874
		13°8				C. I.		I. M.	

SERIE X. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♂ 18	99		Española.	1	2 16	10,523		11,230	
						530		225	
						526		223	
				2	17		12,200		9,841
							198		843
							200		837
				3	19	10,510		11,223	
						520		221	
						515		220	
			Egipcia.	4	21	11,334		10,488	
						340		496	
						348		489	
				5	23		10,190		9,911
							190		920
							195		912
				6	24	11,340		10,516	
						346		514	
						354		518	
	100		Egipcia.	1	26		10,186		9,923
							176		920
							200		927
				2	27	11,350		10,532	
						370		532	
						365		540	
				3	29		10,172		9,960
							172		970
							184		970
			Española.	4	31		11,780		9,488
							785		482
							774		474
				5	33	10,095		10,813	
						086		811	
						085		810	
				6	34		11,746		9,462
							748		467
							750		459
		14°,0							
						I. M.		C. I.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Despues de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
					h m	v	v	v	v
♂ 18	100	14°,0	Española.	1	2 38	10,054		10,782	
				2			7,036		7,781
				3			028		781
				4		075		774	
				5		070		780	
				6			026		771
				7			020		775
				8		060		769	
				9		058		765	
				10			010		776
				11			020		767
				12		050		760	
			Egipcia.	1		12,366		11,535	
				2			9,360		8,541
				3			373		550
				4		376		545	
				5		352		547	
				6			345		552
				7			352		553
				8		352		542	
				9		345		557	
				10			355		561
				11			357		560
				12		352		566	
						I. M.		*C. I.*	

NIVELACIONES. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m		p	p	p	p	p	p	p	p
♂ 18	2 56	14°,0	+ 2,8	+ 1,8	+ 8,5	— 5,6	+ 9,4	—10,3	+ 9,9	—10,5
			—11,5	—12,5	+31,7	—28,8	+24,9	—25,7	+25,3	—25,9
			C. I.		*C. I.*		*C. I.*		*C. I.*	

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL		REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL		MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL		MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL	
			Norte.	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*
☌ 19	h m 9 27	10°,8	+ 3,7 p −11,5	+ 3,0 p −12,2	+ 7,2 p +31,8	− 5,2 p −29,8	+ 9,0 p +25,5	− 9,5 p −26,0	+ 9,3 p +25,7	− 9,9 p −26,3
			C. I.		*C. I.*		*C. I.*		*C. I.*	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Antes de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.		MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	
						39485	39488	510	513
					h m	v	v	v	v
☌ 19	101	11°,2	Española.	1	9 45	11,214		10,786	
				2			8,175		7,814
				3			178		820
				4		196		788	
				5		200		792	
				6			150		804
				7			157		807
				8		182		794	
				9		185		793	
				10			145		812
				11			156		810
				12		182		798	
			Egipcia.	1		12,887		11,037	
				2			9,910		8,061
				3			915		070
				4		895		050	
				5		895		058	
				6			905		088
				7			890		092
				8		902		062	
				9		890		070	
				10			898		088
				11			910		093
				12		890		063	
						I. M.		*C. I.*	

SERIE XI. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☌ 19	101		Española.	1	10 5	10,318		10,079	
						310		082	
						312		078	
				2	6		12,560		8,196
							564		199
							562		202
				3	8	10,300		10,071	
						306		069	
						293		072	
			Egipcia.	4	12	11,956		10,248	
						976		248	
						980		248	
				5	14		11,390		9,136
							390		140
							390		177
				6	15	11,986		10,285	
						996		287	
						996		280	
	102		Egipcia.	1	17		11,415		9,171
							410		171
							405		174
				2	18	11,976		10,310	
						995		304	
						998		304	
				3	20		11,395		9,193
							395		190
							396		196
			Española.	4	24		12,680		8,514
							665		503
							656		511
				5	26	10,452		10,329	
						450		339	
						436		335	
				6	28		12,626		8,513
							626		516
							626		505
		11°,7							

I. M. *C. I.*

SERIE XI. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☿ 19	103		Española.	1	10 37	10,402		10,385	
						401		382	
						408		382	
				2	38		12,534		8,575
							522		586
							522		588
				3	40	10,372		10,368	
						382		373	
						373		378	
			Egipcia.	4	43	11,331		9,893	
						331		902	
						329		886	
				5	44		10,614		8,798
							620		808
							625		805
				6	45	11,328		9,876	
						328		870	
						322		885	
	104		Egipcia.	1	47		10,600		8,842
							598		855
							594		854
				2	48	11,321		9,896	
						325		896	
						325		892	
				3	49		10,584		8,868
							577		868
							574		868
			Española.	4	52		12,330		8,616
							322		612
							322		615
				5	54	10,277		10,356	
						270		356	
						260		365	
				6	55		12,310		8,615
							302		616
							300		615
		12°,1							
						C. I.		I. M.	

SERIE XI. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☿ 19	105		Española.	1	10 59	10,206		10,331	
						195		329	
						202		329	
				2	11 1		12,230		8,609
							228		615
							224		616
				3	2	10,190		10,341	
						184		347	
						188		337	
			Egipcia.	4	5	11,920		10,620	
						935		622	
						935		630	
				5	6		11,122		9,690
							112		700
							112		702
				6	7	11,935		10,638	
						935		643	
						938		643	
	106		Egipcia.	1	9		11,123		9,730
							110		723
							102		717
				2	10	11,952		10,649	
						926		653	
						930		653	
				3	12		11,096		9,750
							082		752
							086		754
			Española.	4	15		12,700		9,301
							698		296
							695		294
				5	16	10,694		10,940	
						702		943	
						705		937	
				6	18		12,660		9,293
							660		291
							663		293
		12,6							
						I. M.		C. I.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☿ 19	107		Española.	1	11 30	10,614		10,982	
						618		990	
						613		980	
				2	31		12,539		9,372
							531		374
							531		378
				3	33	10,601		10,983	
						599		982	
						604		976	
			Egipcia.	4	35	12,310		11,246	
						310		250	
						313		252	
				5	36		11,371		10,428
							363		434
							364		432
				6	38	12,322		11,272	
						321		278	
						330		270	
	108		Egipcia.	1	40		11,366		10,466
							371		462
							377		466
				2	41	12,303		11,305	
						318		300	
						325		308	
				3	43		11,357		10,483
							363		476
							360		483
			Española.	4	45		11,656		8,676
							650		675
							649		676
				5	47	9,760		10,240	
						753		232	
						749		233	
				6	48		11,611		8,675
							605		682
							601		692
		13°,0							
						C. I.		I. M.	

SERIE XI. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☌ 19	109		Española.	1	11 50	9,726		10,206	
						714		209	
						715		204	
				2	51		11,550		8,654
							555		654
							560		652
				3	52	9,705		10,205	
						708		199	
						712		202	
			Egipcia.	4	55	10,777		9,779	
						794		788	
						786		795	
				5	56		9,785		9,079
							785		074
							782		082
				6	58	10,805		9,818	
						805		822	
						803		828	
	110		Egipcia.	1	59		9,790		9,103
							785		094
							792		099
				2	12 0	10,820		9,819	
						822		824	
						822		825	
				3	2		9,802		9,108
							805		107
							806		107
			Española.	4	5		11,460		8,605
							460		612
							456		613
				5	6	9,630		10,144	
						628		137	
						630		130	
				6	8		11,442		8,603
							446		603
							436		601
		13,4							
						I. M.		C. I.	

SERIE XII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☌ 19	111		Española.	1	12 33	9,602		10,108	
						599		108	
						603		105	
				2	35		11,384		8,595
							388		593
							384		592
				3	36	9,597		10,102	
						601		106	
						599		105	
			Egipcia.	4	38	11,292		10,295	
						306		310	
						306		300	
				5	39		10,294		9,568
							299		537
							305		552
				6	40	11,331		10,333	
						336		316	
						340		322	
	112		Egipcia.	1	42		10,311		9,562
							320		552
							324		546
				2	44	11,341		10,332	
						350		325	
						350		326	
				3	45		10,338		9,550
							349		550
							350		552
			Española.	4	47		11,376		8,582
							371		592
							363		592
				5	48	9,571		10,085	
						569		086	
						570		088	
				6	49		11,349		8,571
							350		572
							347		575
		13°,2							
						C. I.		I. M.	

SERIE XII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☿ 19	113		Española.	1	12 53	9,524		10,037	
						527		046	
						520		050	
				2	54		11,318		8,541
							320		547
							310		550
				3	55	9,516		10,040	
						510		046	
						515		046	
			Egipcia.	4	58	11,336		10,315	
						355		319	
						352		322	
				5	59		10,313		9,564
							320		569
							322		566
				6	1 0	11,348		10,321	
						360		323	
						360		319	
	114		Egipcia.	1	2		10,346		9,578
							337		582
							345		586
				2	3	11,366		10,338	
						365		336	
						360		340	
				3	4		10,336		9,597
							328		606
							335		598
			Española.	4	7		10,936		8,248
							948		239
							945		238
				5	8	9,166		9,669	
						174		664	
						170		666	
				6	9		10,930		8,233
							938		225
							938		222
		13°,4							
						I. M.		C. I.	

SERIE XII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☿ 19	115		Española.	1	1 12	9,155		9,678	
						162		675	
						162		685	
				2	14		10,912		8,234
							920		233
							914		233
				3	15	9,157		9,664	
						160		673	
						158		675	
			Egipcia.	4	17	11,877		10,892	
						880		902	
						875		912	
				5	19		10,859		10,183
							866		186
							860		180
				6	20	11,888		10,918	
						892		922	
						885		936	
	116		Egipcia.	1	22		10,871		10,205
							867		225
							868		213
				2	23	11,888		10,963	
						893		960	
						892		955	
				3	24		10,870		10,222
							862		230
							858		217
			Española.	4	27		10,836		8,223
							834		223
							838		225
				5	28	9,064		9,650	
						058		652	
						053		643	
				6	29		10,801		8,224
							807		226
							800		225
		13°,9							
						C. I.		I. M.	

SERIE XII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☿ 19	117		Española.	1	1 35	9,026		9,614	
						038		610	
						020		610	
				2	37		10,762		8,193
							768		193
							770		199
				3	38	9,028		9,603	
						025		603	
						024		606	
			Egipcia.	4	41	11,280		10,319	
						285		322	
						296		321	
				5	43		10,208		9,651
							215		650
							205		648
				6	44	11,300		10,347	
						305		347	
						302		352	
	118		Egipcia.	1	46		10,212		9,667
							220		660
							215		658
				2	47	11,300		10,353	
						308		349	
						305		350	
				3	48		10,216		9,671
							216		672
							216		670
			Española.	4	51		10,705		8,182
							690		183
							694		188
				5	52	8,935		9,574	
						935		570	
						935		569	
				6	53		16,664		8,182
							666		182
							655		177
		14°,0							
						I. M.		C. I.	

SERIE XII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
☿ 19	119		Española.	1	2 2	8,862		9,615	
						862		616	
						862		608	
				2	4		10,561		8,255
							554		255
							554		256
				3	5	8,850		9,626	
						853		630	
						850		620	
			Egipcia.	4	8	11,710		11,000	
						710		000	
						712		002	
				5	9		10,564		10,342
							564		346
							567		356
				6	10	11,720		11,022	
						718		016	
						715		020	
	120		Egipcia.	1	12		10,571		10,396
							571		396
							565		396
				2	14	11,731		11,048	
						721		058	
						722		050	
				3	15		10,560		10,405
							544		412
							550		418
			Española.	4	19		10,500		8,362
							499		360
							500		353
				5	20	8,852		9,666	
						842		655	
						851		655	
				6	22		10,482		8,348
							482		343
							481		342
		14°,1				C. I.		I. M.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Despues de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 519	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
					h m	v	v	v	v
☌ 19	120	14°,1	Española.	1	2 46	10,843		11,772	
				2			7,819		8,778
				3			818		783
				4		843		765	
				5		841		780	
				6			811		788
				7			811		782
				8		842		756	
				9		838		773	
				10			810		792
				11			810		775
				12		835		770	
			Egipcia.	1		11,780		11,250	
				2			8,783		8,270
				3			792		278
				4		792		275	
				5		789		276	
				6			798		276
				7			795		276
				8		799		274	
				9		789		282	
				10			788		272
				11			795		286
				12		799		285	
						I. M.		*C. I.*	

NIVELACIONES. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m									
☌ 19	3 2	14°,2	+ 2,6	+ 2,0	+ 8,4	— 5,9	+ 9,9	—10,2	+ 9,9	—10,9
			—11,4	—12,2	+31,5	—29,0	+25,3	—25,8	+25,2	—26,1
			I. M.		*I. M.*		*I. M.*		*I. M.*	

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL		REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL		MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL		MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL	
			Norte.	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*	*Norte.*	*Sur.*
	h m		p	p	p	p	p	p	p	p
4 20	11 27	12°,2	+ 3,3	+ 2,6	+ 8,9	— 6,2	+ 9,4	— 9,9	+ 9,5	—10,1
			—11,1	—12,2	+32,5	—29,8	+25,6	—26,1	+25,5	—26,1
			I. M.		*I. M.*		*I. M.*		*I. M.*	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Antes de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO.		MICROSCOPIO SUR. PLATINO.	
						39485	39488	510	513
					h m	v	v	v	v
4 20	121	12°,2	Española.	1	11 47	11,490		11,618	
				2			8,464		8,638
				3			454		632
				4		488		616	
				5		484		613	
				6			457		642
				7			450		635
				8		484		615	
				9		484		612	
				10			451		608
				11			448		607
				12		484		612	
			Egipcia.	1		10,770		9,418	
				2			7,803		6,428
				3			809		432
				4		790		418	
				5		788		422	
				6			812		440
				7			812		426
				8		800		424	
				9		799		412	
				10			820		433
				11			899		424
				12		821		412	
						C. I.		*I. M.*	

SERIE XIII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
4 20	121		Española.	1	12 5	9,644		9,770	
						638		774	
						638		766	
				2	6		11,659		8,092
							651		088
							656		088
				3	8	9,629		9,770	
						628		735	
						624		762	
			Egipcia.	4	11	10,092		8,716	
						088		722	
						080		726	
				5	12		9,351		7,676
							350		684
							351		672
				6	14	10,119		8,735	
						110		727	
						110		726	
	122		Egipcia.	1	16		9,378		7,693
							377		707
							377		702
				2	18	10,137		8,744	
						133		744	
						129		748	
				3	19		9,385		7,725
							382		720
							382		723
			Española.	4	23		10,869		7,356
							862		350
							862		334
				5	24	8,842		9,033	
						832		022	
						840		018	
				6	26		10,842		7,320
							837		326
							834		324
		12°2							

C. I. I. M.

SERIE XIII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
4 20	123		Española.	1	12 34	8,800		8,988	
						804		994	
						796		991	
				2	35		10,800		7,322
							810		323
							808		332
				3	36	8,787		8,993	
						796		999	
						792		9,009	
			Egipcia.	4	40	11,850		10,460	
						845		468	
						840		467	
				5	41		11,075		9,479
							086		494
							078		500
				6	43	11,836		10,483	
						845		476	
						840		477	
	124		Egipcia.	1	44		11,087		9,516
							075		514
							078		517
				2	46	11,836		10,479	
						843		490	
						845		484	
				3	47		11,067		9,524
							075		528
							074		530
			Española.	4	50		11,716		8,358
							724		358
							724		361
				5	51	9,734		10,002	
						726		002	
						722		009	
				6	53		11,694		8,362
							688		369
							688		371
		13°8							

I. M. *C. I.*

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
4 20	125		Española.	1	1 3	9,682		10,045	
						679		048	
						677		050	
				2	3		11,605		8,432
							610		428
							605		423
				3	6	9,679		10,036	
						680		040	
						678		046	
			Egipcia.	4	9	9,310		8,097	
						317		112	
						328		112	
				5	10		8,455		7,195
							455		185
							460		186
				6	12	9,327		8,108	
						325		115	
						324		113	
	126		Egipcia.	1	13		8,475		7,193
							479		200
							480		205
				2	15	9,331		8,118	
						340		130	
						340		124	
				3	17		8,465		7,200
							475		215
							478		205
			Española.	4	22		10,802		7,686
							808		686
							802		676
				5	24	8,880		9,280	
						871		282	
						875		282	
				6	25		10,790		7,670
							788		678
							783		676
		12°,8							

SERIE XIII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
20	127		Española.	1	1 31	8,850		9,230	
						856		238	
						850		243	
				2	33		10,760		7,653
							764		648
							762		650
				3	34	8,855		9,230	
						850		226	
						853		230	
			Egipcia.	4	37	11,105		9,891	
						118		894	
						102		880	
				5	38		10,247		8,986
							255		977
							250		980
				6	40	11,116		9,884	
						116		880	
						113		879	
	128		Egipcia.	1	41		10,256		9,022
							260		022
							256		010
				2	42	10,140		9,889	
						146		884	
						138		885	
				3	44		10,286		9,004
							282		000
							288		002
			Española.	4	49		12,020		8,796
							024		788
							032		782
				5	50	10,105		10,365	
						108		371	
						115		371	
				6	51		12,032		8,779
							038		774
							030		773
		12°,3							
						I. M.		C. I.	

SERIE XIII. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
4 20	129		Española.	1	2 11	10,132		10,340	
						144		336	
						145		340	
				2	12		12,094		8,705
							100		702
							102		701
				3	14	10,160		10,330	
						160		332	
						165		330	
			Egipcia.	4	16	9,301		7,920	
						300		925	
						304		944	
				5	18		8,499		6,963
							503		970
							500		966
				6	19	9,324		7,942	
						315		958	
						320		948	
	130		Egipcia.	1	21		8,499		6,962
							511		980
							517		972
				2	22	9,339		7,978	
						335		974	
						316		985	
				3	24		8,532		6,990
							531		973
							531		976
			Española.	4	28		12,108		8,567
							097		555
							106		552
				5	30	10,091		10,195	
						098		197	
						104		202	
				6	31		12,107		8,536
							107		525
							108		540
		11,8							

C. l. l. M.

VALOR DEL PASO DE ROSCA. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Despues de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
					h m	v	v	v	v
4 20	130	11°,6	Española.	1	2 11	11,585		11,491	
				2			8,538		8,505
				3			545		505
				4		600		470	
				5		596		474	
				6			558		504
				7			540		504
				8		585		471	
				9		600		471	
				10			548		492
				11			562		485
				12		603		459	
			Egipcia.	1		12,982		11,307	
				2			10,015		8,327
				3			023		325
				4		13,018		304	
				5		020		306	
				6			040		323
				7			032		330
				8		050		310	
				9		055		314	
				10			065		334
				11			048		322
				12		046		310	
						I. M.		*C. I.*	

NIVELACIONES. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m		p	p	p	p	p	p	p	p
4 20	3 3	11°,2	+ 3,2	+ 2,3	+ 7,7	— 6,0	+ 9,7	—10,0	+ 9,5	—10,3
			—11,6	—12,4	+31,4	—29,9	+25,6	—26,0	+25,4	—26,2
				C. I.		*C. I.*		*C. I.*		*C. I.*

NIVELACIONES. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m	°	p	p	p	p	p	p	p	p
☽ 21	9 38	9,6	+ 4,0	+22,5	+ 7,4	— 5,2	+ 8,4	— 9,2	+ 8,9	— 9,6
			−11,3	−12,9	+32,0	−29,9	+25,1	−25,7	+25,4	−26,1
			C. I.		C. I.		C. I.		C. I.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Antes de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39185	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39188	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
					h m	v	v	v	v
☽ 21	131	10,6	Egipcia.	1	10 34	14,145		12,153	
				2			11,156		9,154
				3			138		154
				4		138		140	
				5		136		135	
				6			138		159
				7			134		154
				8		128		134	
				9		126		133	
				10			130		160
				11			126		152
				12		140		138	
			Española.	1		11,446		10,969	
				2			8,395		8,000
				3			396		001
				4		432		957	
				5		438		955	
				6			382		7,990
				7			386		985
				8		405		945	
				9		418		949	
				10			358		993
				11			368		990
				12		418		932	
						I. M.		C. I.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♀ 21	131		Española.	1	12 6	11,362		10,882	
						370		886	
						365		880	
				2	7		13,765		8,884
							755		876
							765		870
				3	9	11,358		10,862	
						375		868	
						356		877	
			Egipcia.	4	12	12,975		10,953	
						982		960	
						970		959	
				5	13		12,575		9,599
							575		605
							570		605
				6	14	12,995		10,976	
						997		983	
						978		990	
	132		Egipcia.	1	16		12,588		9,635
							592		639
							600		640
				2	17	13,020		11,004	
						013		000	
						013		003	
				3	19		12,598		9,667
							590		668
							595		664
			Española.	4	22		13,640		8,800
							635		804
							628		810
				5	24	11,233		10,802	
						230		804	
						230		807	
				6	25		13,608		8,816
							606		818
							606		820
		11°,0							
						I. M.		*C. I.*	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♀ 21	133		Española.	1	12 30	11,219		10,856	
						212		845	
						212		856	
				2	31		13,554		8,873
							554		877
							548		876
				3	33	11,208		10,854	
						208		850	
						207		852	
			Egipcia.	4	35	12,400		10,572	
						404		575	
						404		582	
				5	37		11,884		9,282
							882		292
							882		295
				6	38	12,400		10,583	
						403		590	
						410		591	
	134		Egipcia.	1	40		11,889		9,316
							880		318
							879		322
				2	41	12,400		10,602	
						400		616	
						394		612	
				3	43		11,886		9,345
							881		348
							878		342
			Española.	4	47		11,940		7,488
							931		492
							932		486
				5	49	9,659		9,428	
						652		426	
						658		425	
				6	50		11,910		7,488
							911		496
							913		498
		11,0°							
						C. I.		I. M.	

SERIE XIV. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♀ 21	135		Española.	1	12 53	9,654		9,378	
						660		385	
						652		380	
				2	55		11,915		7,460
							926		460
							932		463
				3	57	9,658		9,365	
						663		357	
						663		350	
			Egipcia.	4	1 0	13,015		11,130	
						025		123	
						025		130	
				5	1		12,518		9,873
							516		870
							518		881
				6	2	13,016		11,132	
						015		141	
						025		137	
	136		Egipcia.	1	4		12,523		9,898
							536		889
							530		883
				2	6	13,050		11,139	
						055		141	
						068		131	
				3	8		12,546		9,864
							540		870
							550		870
			Española.	4	12		12,144		7,514
							146		506
							135		490
				5	13	9,796		9,422	
						796		414	
						798		412	
				6	15		12,122		7,484
							138		481
							138		474
		10°,6							
						I. M.		*C. I.*	

SERIE XIV. NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♀ 21	137		Española.	1	1 29	9,809		9,396	
						809		400	
						799		395	
				2	30		12,151		7,430
							153		448
							150		446
				3	31	9,800		9,398	
						802		402	
						803		402	
			Egipcia.	4	34	10,267		8,350	
						268		358	
						266		350	
				5	35		9,767		7,093
							774		103
							780		102
				6	37	10,280		8,363	
						281		366	
						278		368	
	138		Egipcia.	1	38		9,788		7,116
							781		112
							779		108
				2	40	10,300		8,402	
						294		410	
						301		415	
				3	41		9,798		7,120
							795		118
							790		110
			Española.	4	45		11,337		6,676
							334		685
							329		676
				5	46	8,964		8,614	
						962		628	
						970		618	
				6	47		11,311		6,688
							310		693
							311		685
		10°,8							
						C. I.		I. M.	

Fecha.	Comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE.		MICROSCOPIO SUR.	
						PLATINO.	LATON.	PLATINO.	LATON.
					h m	v	v	v	v
♀ 21	139		Española.	1	1 51	8,955		8,589	
						945		592	
						957		597	
				2	52		11,292		6,661
							305		670
							290		670
				3	53	8,942		8,587	
						945		591	
						938		592	
			Egipcia.	4	56	11,850		9,990	
						846		994	
						852		997	
				5	57		11,318		8,754
							320		763
							310		770
				6	58	11,836		10,010	
						855		014	
						852		014	
	140		Egipcia.	1	2 1		11,330		8,793
							336		787
							324		791
				2	2	11,865		10,024	
						862		024	
						862		021	
				3	4		11,322		8,792
							316		793
							330		792
			Española.	4	7		12,750		8,228
							740		228
							745		230
				5	8	10,425		10,150	
						430		146	
						416		149	
				6	9		12,715		8,236
							713		244
							712		246
		11°,2							
						I. M.		C. I.	

VALOR DEL PASO DE ROSCA. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Despues de la comparacion.	Termómetro.	Regla.	Observacion.	Hora.	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39485	MICROSCOPIO NORTE. PLATINO. 39488	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 510	MICROSCOPIO SUR. PLATINO. 513
					h m	v	v	v	v
♀ 21	140	11,8	Española.	1	2 24	12,347		12,296	
				2			9,300		9,318
				3			299		322
				4		334		292	
				5		330		302	
				6			290		322
				7			285		328
				8		320		305	
				9		318		298	
				10			270		328
				11			267		326
				12		310		308	
			Egipcia.	1		11,150		9.670	
				2			8.178		7,666
				3			180		660
				4		162		668	
				5		161		673	
				6			181		678
				7			182		684
				8		160		682	
				9		154		675	
				10			175		686
				11			170		692
				12		163		680	
						C. I.		I. M.	

NIVELACIONES. — NOVIEMBRE DE 1862.

Fecha.	Hora.	Termómetro.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Norte.	REGLA ESPAÑOLA. TORNILLO AL Sur.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Norte.	REGLA EGIPCIA. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO NORTE. TORNILLO AL Sur.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Norte.	MICROSCOPIO SUR. TORNILLO AL Sur.
	h m									
♀ 21	2 41	12,0	p + 3,5 —11,5	p + 2,8 —12,1	p + 7,4 +31,5	p — 5,6 —29,8	p + 9,0 +25,0	p —10,0 —26,0	p + 9,3 +25,4	p — 9,9 —26,0
			I. M.		I. M.		I. M.		I. M.	

NIVELACION DE LOS CATORCE APOYOS CILINDRICOS DE LAS DOS REGLAS.

Noviembre de 1862.

Fecha.	Hora.	Regla.	Posiciones del nivel empezando por el cero de la regla.	Lecturas del nivel, tornillo al Norte.	Promedios.	Regla.	Posiciones del nivel empezando por el cero de la regla.	Lecturas del nivel, tornillo al Norte.	Promedios.
	h m			p	p			p	p
♀ 21	3 0	Egipcia.	1	14,8 38,5	26,6	Española.	1	+10,9 — 3,9	+ 3,5
			2	15,5 39,2	27,3		2	+ 9,1 — 5,6	+ 1,7
			3	17,0 40,7	28,8		3	+ 8,5 — 6,2	+ 1,1
			4	16,0 39,9	27,9		4	+10,3 — 4,4	+ 2,9
			5	14,9 38,6	26,7		5	+ 9,0 — 5,6	+ 1,7
			6	15,5 39,1	27,3		6	+ 8,1 — 6,5	+ 0,8
			7	15,5 39,1	27,3		7	+ 8,8 — 5,9	+ 1,4
			8	18,2 41,8	30,0		8	+ 9,7 — 4,9	+ 2,4
			9	17,6 41,0	29,3		9	+10,0 — 4,6	+ 2,7
			10	15,9 39,3	27,6		10	+ 9,7 — 4,9	+ 2,4
			11	15,9 39,3	27,6		11	+ 9,7 — 4,8	+ 2,4
			12	16,9 40,3	28,6		12	+ 8,4 — 6,2	+ 1,1
			13	16,1 39,6	27,8		13	+ 9,0 — 5,5	+ 1,7

I. M. *C. I.*

DETERMINACION DE LOS VALORES ANGULARES DE LAS PARTES DE LOS NIVELES.

Noviembre de 1862.

Fecha.	Hora.	Nivel.	Lecturas del tambor de la probeta.	Lecturas del nivel.	Promedios.	Diferencias.	Nivel.	Lecturas del tambor de la probeta.	Lecturas del nivel.	Promedios.	Diferencias.
	h m		D	P	P	P		D	P	P	P
♉ 26	12 0	De la regla Egipcia. .	0	0,6 26,3	13,45	0,00	Del microsc. n.° 2 Egip.	60	6,2 23,0	14,60	0,00
			30	3,7 29,2	16,45	3,00		90	8,4 25,1	16,75	2,15
			60	6,4 31,9	19,15	2,70		120	10,8 27,4	19,10	2,35
			90	9,4 35,0	22,20	3,05		150	12,8 29,4	21,10	2,00
			120	12,0 37,4	24,70	2,50		90	12,7 29,1	20,90	1,85
			150	14,9 40,2	27,55	2,85		120	10,8 27,3	19,05	2,30
			180	17,3 42,6	29,95	2,40		150	8,5 25,0	16,75	2,10
			210	20,1 45,4	32,75	2,80		180	6,4 22,9	14,65	0,00
				I. M.					*I. M.*	*C. I.*	
				$\overset{P}{1}=10'',7.$					$\overset{P}{1}=14'',0.$		

En el nivel de la regla española (*)

$$\overset{P}{1}=11'',4.$$

(*) *Experiencias*, etc., apéndice núm. 1.

FORMULAS RELATIVAS A LA COMPARACION.

Si, conservando las notaciones de la obra *Experiencias*, etc., se designa por:

C... la distancia entre los ejes ópticos de los microscopios del comparador, contada sobre la regla,

p'', p'... los promedios de las lecturas micrométricas hechas con los microscopios Norte y Sur, sobre el platino de la regla española en cada una de las comparaciones,

l'', l'... los promedios análogos para el laton,

h'', h'... los valores de las vueltas ó pasos de rosca de los micrómetros Norte y Sur, en funcion de las divisiones de la regla española,

N... el número de divisiones de la misma regla comprendidas entre las dos rayas observadas,

R... la longitud del intervalo comprendido entre las rayas observadas á la temperatura en que la regla de platino y la de laton tienen la misma longitud,

r... la relacion que existe entre la dilatacion de la regla de platino y la diferencia de dilataciones del laton y del platino,

$10^{v},000$... las lecturas correspondientes á los dientes centrales de los peines de los micrómetros,

y haciendo para simplificar,

$$\begin{aligned} h''(p''-10^{v},000)-h'(p'-10^{v},000)&=Q\\ h''(p''-l'')-h'(p'-l')&=M \end{aligned} \qquad (a)$$

se tendrá:

$$\frac{C}{R}=\frac{N+Q}{N-rM}. \qquad (1)$$

Adoptando las mismas notaciones, afectadas del índice 1, para la regla egipcia, se tendrá igualmente:

$$\frac{C}{R_1}=\frac{N_1+Q_1}{N_1-r_1M_1} \qquad (2)$$

y dividiendo una por otra las dos expresiones (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{R_1}{R} = \frac{N+Q}{N_1+Q_1} \cdot \frac{N_1 - r_1 M_1}{N - rM} = \frac{1+\frac{Q}{N}}{1+\frac{Q_1}{N_1}} \cdot \frac{1-\frac{r_1 M_1}{N_1}}{1-\frac{rM}{N}}.$$

El desarrollo de esta expresion da:

$$\frac{R_1}{R} = 1 + \frac{Q+rM}{N} - \frac{Q_1+r_1M_1}{N_1} + \left(\frac{Q_1^2}{N_1^2} - \frac{QQ_1}{NN_1} - \frac{Qr_1M_1}{NN_1} + \frac{Q_1r_1M_1}{N_1^2} \right.$$

$$\left. + \frac{QrM}{N^2} - \frac{Q_1}{N_1} \cdot \frac{rM}{N} + \frac{r^2M^2}{N^2} - \frac{rM}{N} \cdot \frac{r_1M_1}{N_1} + \ldots \right)$$

Pero despreciando los términos de segundo órden, á causa de su pequeñez, tendremos:

$$\frac{R_1}{R} = 1 + \frac{Q+rM}{N} - \frac{Q_1+r_1M_1}{N_1}.$$

Y como el intervalo que media entre las rayas observadas en el platino, comprende el mismo número de divisiones en las dos reglas cuya relacion se busca, será:

$$N = N_1$$

y haciendo para simplificar:

$$(Q+rM) - (Q_1+r_1M_1) = x, \qquad (3)$$

se obtiene por último:

$$\frac{R_1}{R} = 1 + \frac{x}{N}. \qquad (4)$$

Cada una de las comparaciones proporciona una ecuacion semejante á la (4), y del conjunto de todas ellas se deduce el valor de

$$\frac{R_1}{R}.$$

CALCULOS NUMERICOS.

Los cuadros **A**, **B** y **C** presentan para cada uno de los microscopios Norte y Sur, y para ambas reglas, los promedios de las lecturas micrométricas.

La 1.ª columna contiene la fecha de las observaciones.

La 2.ª, la temperatura del aire.

La 3.ª, la hora correspondiente al medio de cada tres observaciones.

La 4.ª, el número de órden de cada comparacion.

La 5.ª y la 6.ª comprenden los promedios p'', l'' de las lecturas hechas sobre el platino y el laton de la regla española en el microscopio Norte.

La 7.ª y 8.ª, los promedios p' y l' de las lecturas análogas en el microscopio Sur.

Las columnas siguientes contienen las mismas observaciones relativas á la regla egipcia.

La última columna encierra las iniciales de los dos observadores, hallándose colocadas primero las del observador del microscopio Norte.

CUADRO A.

Fecha.	Termómetro.	Hora.	Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA. MICROSCOPIO NORTE. p''	MICROSCOPIO NORTE. l''	MICROSCOPIO SUR. p'	MICROSCOPIO SUR. l'	Hora.	REGLA EGIPCIA. MICROSCOPIO NORTE. p_1''	MICROSCOPIO NORTE. l_1''	MICROSCOPIO SUR. p_1'	MICROSCOPIO SUR. l_1'	Observadores.
	°	h m		v	v	v	v	h m	v	v	v	v	
4 13		2 10	1	10,342	11,896	11,450	10,191	2 16	10,443	9,148	10,086	9,585	I. M. C. I.
	15,2	28	2	8,532	10,013	9,742	8,495	21	10,445	9,139	10,130	9,659	
		37	3	8,509	9,974	9,778	8,549	43	10,685	9,353	10,420	10,012	C. I. I. M.
	14,6	56	4	9,885	11,377	11,147	9,928	49	10,735	9,406	10,455	10,032	
		3 3	5	9,884	11,402	11,090	9,820	3 10	10,317	8,942	10,025	9,607	I. M. C. I.
	15,0	21	6	9,670	11,137	10,896	9,671	15	10,353	8,967	10,081	9,643	
		31	7	9,653	11,082	10,908	9,690	40	10,841	9,461	10,626	10,250	C. I. I. M.
	14,9	50	8	9,445	10,893	10,623	9,439	45	10,893	9,533	10,636	10,214	
		56	9	9,432	10,902	10,575	9,378	4 3	10,693	9,375	10,295	9,839	I. M. C. I.
	14,1	4 15	10	8,569	10,132	9,582	8,312	8	10,747	9,436	10,317	9,859	
☾ 14		10 5	11	8,451	10,468	8,796	7,105	10 13	10,426	9,560	9,394	8,451	C. I. I. M.
	12,6	25	12	9,758	11,741	10,213	8,493	18	10,425	9,543	9,396	8,491	
		31	13	9,782	11,770	10,167	8,474	37	10,958	10,066	9,913	9,076	I. M. C. I.
	13,0	51	14	10,497	12,507	10,909	9,253	43	10,976	10,084	9,943	9,099	
		11 0	15	10,425	12,346	10,983	9,327	11 6	10,446	9,468	9,629	8,836	C. I. I. M.
	14,0	19	16	8,437	10,255	9,251	7,686	10	10,448	9,423	9,655	8,918	
		59	17	8,314	9,940	9,315	7,938	12 4	10,453	9,126	10,155	9,671	I. M. C. I.
	14,8	12 14	18	10,327	11,897	11,359	10,053	8	10,480	9,150	10,202	9,704	
		21	19	10,229	11,808	11,375	10,085	26	10,559	9,238	10,303	9,807	C. I. I. M.
	14,5	38	20	8,159	9,731	9,259	7,983	31	10,610	9,288	10,323	9,848	
		12 43	21	8,158	9,758	9,204	7,917	12 50	10,501	9,224	10,084	9,587	I. M. C. I.
	14,8	1 1	22	9,553	11,181	10,601	9,331	54	10,511	9,240	10,097	9,596	
		24	23	9,431	10,977	10,610	9,365	1 30	11,165	9,828	10,937	10,481	C. I. I. M.
	15,0	40	24	8,365	9,847	9,626	8,435	35	11,187	9,824	10,973	10,519	
		46	25	8,357	9,856	9,604	8,440	52	10,403	9,019	10,215	9,828	I. M. C. I.
	15,4	2 2	26	8,223	9,730	9,566	8,430	57	10,409	9,010	10,232	9,869	
		10	27	8,179	9,613	9,569	8,430	2 15	10,265	8,822	10,203	9,841	C. I. I. M.
	15,5	25	28	9,117	10,529	10,552	9,446	19	10,268	8,812	10,211	9,877	
		34	29	9,121	10,569	10,522	9,429	40	10,616	9,131	10,552	10,284	I. M. C. I.
	15,6	51	30	9,794	11,203	11,193	10,118	45	10,640	9,136	10,577	10,323	
♄ 15		10 34	31	10,424	12,659	10,417	8,625	10 40	11,629	10,968	10,168	9,127	I. M. C. I.
	12,4	52	32	9,677	11,836	9,777	8,063	44	11,640	10,951	10,215	9,181	
		59	33	9,636	11,748	9,815	8,098	11 6	10,505	9,728	9,237	8,247	C. I. I. M
	12,6	11 16	34	8,990	11,024	9,321	7,641	10	10,480	9,683	9,235	8,297	
		38	35	8,881	10,848	9,339	7,751	44	11,557	10,650	10,535	9,779	I. M. C. I.
	13,6	56	36	10,707	12,625	11,284	9,766	48	11,573	10,647	10,573	9,836	
		12 2	37	10,657	12,505	11,319	9,836	12 8	10,666	9,591	9,919	9,299	C. I. I. M.
	13,8	20	38	9,213	10,974	9,970	8,535	12	10,649	9,548	9,945	9,340	
		26	39	9,242	11,043	9,917	8,491	33	10,134	9,075	9,341	8,709	I. M. C. I.
	13,6	48	40	10,124	11,984	10,674	9,277	42	10,182	9,151	9,326	8,675	
		12 59	41	10,092	11,950	10,674	9,255	1 5	11,453	10,470	10,505	9,826	C. I. I. M.
	13,8	1 15	42	9,496	11,328	10,125	8,688	9	11,466	10,467	10,531	9,861	
		21	43	9,297	11,148	9,903	8,478	27	11,248	10,246	10,308	9,635	I. M. C. I.
	13,8	41	44	8,965	10,801	9,585	8,201	32	11,274	10,277	10,335	9,647	
		48	45	8,933	10,757	9,598	8,190	55	10,364	9,349	9,447	8,782	C. I. I. M.
	13,7	2 6	46	8,980	10,806	9,618	8,214	59	10,383	9,382	9,444	8,756	
		22	47	8,992	10,856	9,551	8,165	2 28	10,806	9,843	9,795	9,152	I. M. C. I.
	13,6	38	48	9,490	11,387	9,994	8,561	32	10,830	9,868	9,791	9,140	
		46	49	9,484	11,355	10,005	8,545	52	10,761	9,795	9,750	9,051	C. I. I. M.
	13,3	3 4	50	9,573	11,443	10,072	8,617	57	10,777	9,818	9,754	9,050	

CUADRO II.

Fecha.	Termómetro.	Hora.	Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA. MICROSCOPIO NORTE. p''	MICROSCOPIO NORTE. l''	MICROSCOPIO SUR. p'	MICROSCOPIO SUR. l'	Hora.	REGLA EGIPCIA. MICROSCOPIO NORTE. p_1''	MICROSCOPIO NORTE. l_1''	MICROSCOPIO SUR. p_1'	MICROSCOPIO SUR. l_1'	Observadores.
	°	h m		v	v	v	v	h m	v	v	v	v	
☉ 16		10 6	51	9,529	11,745	9,493	7,621	10 12	10,972	10,374	9,446	8,361	C. I. I. M.
	11,8	22	52	9,599	11,777	9,628	7,831	16	10,977	10,368	9,457	8,365	
		28	53	9,579	11,757	9,596	7,834	35	11,424	10,714	10,040	9,035	I. M. C. I.
	12,4	45	54	10,071	12,199	10,231	8,513	39	11,409	10,685	10,093	9,066	
		52	55	10,014	12,089	10,259	8,539	58	10,549	9,742	9,312	8,376	C. I. I. M.
	12,1	11 11	56	8,276	10,314	8,581	6,914	11 2	10,551	9,737	9,330	8,406	
		20	57	8,244	10,283	8,555	6,893	27	10,259	9,366	9,199	8,332	I. M. C. I.
	12,8	38	58	10,055	12,071	10,432	8,799	31	10,254	9,371	9,216	8,361	
		12 13	59	9,994	11,907	10,433	8,833	12 19	11,366	10,395	10,387	9,629	C. I. I. M.
	12,8	29	60	9,837	11,766	10,306	8,722	23	11,394	10,440	10,400	9,617	
☾ 17		10 5	61	10,679	13,300	9,944	7,739	10 11	10,950	10,673	8,767	7,359	I. M C. I.
	10,3	23	62	9,885	12,430	9,317	7,217	16	10,943	10,637	8,789	7,399	
		30	63	9,836	12,319	9,350	7,256	35	11,869	11,470	9,934	8,595	C. I. I. M.
	10,7	46	64	9,729	12,118	9,358	7,349	10 39	11,862	11,441	9,953	8,641	
		58	65	9,628	11,987	9,352	7,382	11 4	12,156	11,590	10,430	9,286	I. M. C. I.
	11,5	11 15	66	10,972	13,275	10,820	8,937	8	12,141	11,569	10,468	9,328	
		53	67	10,712	12,741	10,873	9,133	59	10,701	9,859	9,410	8,518	C. I. I. M.
	12,1	12 10	68	8,220	10,269	8,370	6,651	12 4	10,728	9,906	9,420	8,500	
		15	69	8,189	10,227	8,318	6,617	23	10,985	10,119	9,693	8,788	I. M. C. I.
	12,8	36	70	10,353	12,392	10,510	8,903	30	10,968	10,137	9,708	8,824	
		12 49	71	10,216	12,132	10,590	8,989	12 51	9,820	8,890	8,806	8,027	C. I. I. M.
	12,9	1 5	72	8,323	10,171	8,801	7,259	59	9,812	8,858	8,826	8,046	
		12	73	8,339	10,155	8,723	7,225	1 18	11,040	10,031	9,959	9,213	I. M. C. I.
	12,4	31	74	8,996	10,934	9,244	7,671	25	11,120	10,118	9,941	9,155	
		39	75	8,990	10,933	9,227	7,615	45	10,652	9,777	9,418	8,559	C. I. I. M.
	12,0	55	76	9,432	11,418	9,558	7,951	48	10,676	9,802	9,424	8,555	
	2	2	77	9,418	11,485	9,502	7,913	2 8	11,054	10,171	9,615	8,718	I. M. C. I.
	12,3	20	78	10,441	12,518	10,470	8,841	17	11,059	10,168	9,628	8,710	
		26	79	10,403	12,419	10,501	8,862	32	10,357	9,512	9,050	8,125	C. I. I. M.
	12,2	42	80	8,912	10,922	9,114	7,453	36	10,347	9,501	9,056	8,138	
☽ 18		10 1	81	9,370	11,732	8,930	6,935	10 7	11,948	11,480	10,080	8,801	C. I. I. M.
	11,0	17	82	9,720	12,024	9,381	7,435	11	11,952	11,476	10,110	8,833	
		23	83	9,685	11,971	9,358	7,424	29	11,410	10,835	9,585	8,434	I. M. C. I.
	11,6	38	84	10,436	12,676	10,234	8,373	33	11,405	10,809	9,617	8,488	
		46	85	10,371	12,573	10,269	8,419	51	12,090	11,455	10,489	9,415	C. I. I. M.
	11,4	11 2	86	10,705	12,851	10,653	8,864	55	12,103	11,452	10,501	9,434	
		10	87	10,641	12,757	10,624	8,870	11 15	10,947	10,200	9,513	8,331	I. M. C. I.
	12,6	26	88	9,833	11,858	10,005	8,321	20	10,929	10,172	9,544	8,585	
		35	89	9,762	11,752	10,036	8,354	41	11,884	10,993	10,715	9,872	C. I. I. M.
	12,8	50	90	10,165	12,077	10,518	8,936	45	11,870	10,968	10,738	9,920	
		12 23	91	10,087	11,962	10,406	8,840	12 28	10,939	9,944	9,850	9,079	I. M. C. I.
	13,2	38	92	10,826	12,711	11,193	9,621	32	10,959	9,962	9,859	9,093	
		46	93	10,786	12,624	11,212	9,649	51	10,364	9,346	9,347	8,556	C. I. I. M.
	13,2	1 1	94	9,739	11,550	10,231	8,693	56	10,369	9,357	9,378	8,586	
		7	95	9,691	11,479	10,201	8,684	1 12	9,934	8,867	8,951	8,222	I. M. C. I.
	13,7	23	96	10,085	11,849	10,625	9,183	17	9,949	8,875	8,967	8,246	
		55	97	9,982	11,700	10,660	9,276	2 0	11,114	9,989	10,327	9,644	C. I. I. M.
	13,8	2 9	98	10,573	12,266	11,254	9,871	4	11,116	10,013	10,326	9,656	
		17	99	10,521	12,199	11,224	9,840	23	11,344	10,192	10,503	9,914	I. M. C. I.
	14,0	33	100	10,089	11,764	10,811	9,472	27	11,362	10,182	10,535	9,945	

CUADRO C.

Fecha.	Termómetro.	Hora.	Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA. MICROSCOPIO NORTE. p''	MICROSCOPIO NORTE. l''	MICROSCOPIO SUR. p'	MICROSCOPIO SUR. l'	Hora.	REGLA EGIPCIA. MICROSCOPIO NORTE. p_1''	MICROSCOPIO NORTE. l_1''	MICROSCOPIO SUR. p_1'	MICROSCOPIO SUR. l_1'	Observadores.
☌ 19	°	h m		v	v	v	v	h m	v	v	v	v	
		10 6	101	10,306	12,562	10,075	8,199	10 11	11,982	11,390	10,266	9,151	I. M. C. I.
	11,7	26	102	10,446	12,646	10,334	8,510	18	11,990	11,403	10,306	9,182	
		38	103	10,389	12,525	10,378	8,583	41	11,328	10,620	9,886	8,804	C. I. I. M.
	12,1	51	104	10,269	12,314	10,359	8,615	48	11,324	10,588	9,895	8,859	
		11 1	105	10,194	12,227	10,336	8,613	11 6	11,933	11,115	10,633	9,697	I. M. C. I.
	12,6	16	106	10,700	12,679	10,940	9,294	10	11,936	11,098	10,651	9,738	
		31	107	10,608	12,534	10,982	9,375	36	12,318	11,366	11,261	10,431	C. I. I. M.
	13,0	47	108	9,754	11,629	10,235	8,679	41	12,315	11,365	11,304	10,473	
		51	109	9,713	11,555	10,201	8,654	56	10,795	9,784	9,805	9,078	I. M. C. I.
	13,4	12 6	110	9,629	11,450	10,137	8,606	12 0	10,821	9,797	9,823	9,103	
		12 35	111	9,600	11,383	10,106	8,593	12 39	11,318	10,299	10,313	9,552	C. I. I. M.
	13,2	48	112	9,570	11,359	10,086	8,581	41	11,347	10,332	10,328	9,552	
		54	113	9,519	11,316	10,044	8,546	39	11,352	10,318	10,320	9,566	I. M. C. I.
	13,4	1 8	114	9,170	10,939	9,666	8,234	1 3	11,364	10,338	10,338	9,591	
		14	115	9,159	10,915	9,675	8,233	19	11,883	10,862	10,914	10,183	C. I. I. M.
	13,9	28	116	9,058	10,819	9,648	8,224	23	11,891	10,866	10,959	10,219	
		37	117	9,027	10,767	9,608	8,195	43	11,295	10,209	10,335	9,650	I. M. C. I.
	14,0	52	118	8,935	10,679	9,571	8,182	47	11,304	10,215	10,351	9,666	
		2 4	119	8,856	10,556	9,619	8,255	2 9	11,714	10,565	11,010	10,348	C. I. I. M.
	14,1	20	120	8,848	10,491	9,659	8,351	14	11,725	10,560	11,052	10,404	
♃ 20		12 6	121	9,633	11,655	9,766	8,089	12 12	10,100	9,351	8,725	7,677	C. I. I. M.
	12,2	24	122	8,838	10,851	9,024	7,335	18	10,133	9,380	8,745	7,712	
		35	123	8,796	10,806	8,996	7,326	41	11,843	11,080	10,472	9,491	I. M. C. I.
	12,7	51	124	9,727	11,706	10,004	8,363	46	11,841	11,076	10,484	9,521	
		1 5	125	9,679	11,607	10,044	8,428	1 10	9,322	8,457	8,109	7,189	C. I. I. M.
	12,8	24	126	8,875	10,795	9,281	7,679	15	9,337	8,475	8,124	7,203	
		33	127	8,852	10,762	9,233	7,650	38	11,112	10,251	9,885	8,981	I. M. C. I.
	12,3	50	128	10,109	12,029	10,369	8,782	42	11,141	10,271	9,886	9,010	
		2 12	129	10,151	12,099	10,335	8,704	2 18	9,311	8,501	7,940	6,967	C. I I. M.
	11,8	30	130	10,098	12,105	10,198	8,546	22	9,340	8,520	7,979	6,975	
☾ 21		12 7	131	11,364	13,762	10,876	8,877	12 13	12,983	12,573	10,970	9,603	I. M. C. I.
	11,0	24	132	11,231	13,620	10,804	8,811	17	13,015	12,594	11,002	9,652	
		31	133	11,211	13,552	10,852	8,875	37	12,403	11,883	10,582	9,290	C. I. I. M.
	11,0	49	134	9,656	11,923	9,426	7,491	41	12,398	11,882	10,610	9,332	
		55	135	9,658	11,924	9,369	7,461	1 1	13,020	12,517	11,132	9,875	I. M. C. I.
	10,6	1 13	136	9,797	12,137	9,416	7,491	6	13,058	12,537	11,137	9,879	
		30	137	9,804	12,151	9,399	7,441	35	10,273	9,774	8,359	7,099	C. I. I. M.
	10,8	46	138	8,965	11,322	8,620	6,684	38	10,298	9,788	8,409	7,114	
		52	139	8,947	11,296	8,591	6,667	57	11,848	11,316	10,003	8,762	I. M. C. I.
	11,2	2 8	140	10,424	12,729	10,148	8,234	2 2	11,863	11,326	10,023	8,791	

En los cuadros **D**, **E** y **F**, que se deducen de los anteriores,

la 1.ª columna contiene el número de cada comparacion;

la 2.ª y la 3.ª, los promedios de las lecturas de la regla española en el microscopio Norte, despues de haberles restado 10 vueltas;

la 4.ª contiene los valores h'' de las vueltas del tornillo micrométrico del mismo microscopio en divisiones de la regla española;

las 5.ª, 6.ª y 7.ª, presentan cantidades análogas para el microscopio Sur;

en las columnas siguientes se hallan con las mismas notaciones, afectadas del índice 1, cantidades análogas relativas á la regla egipcia.

CUADRO D.

Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA.						REGLA EGIPCIA.					
	MICROSCOPIO NORTE.			MICROSCOPIO SUR.			MICROSCOPIO NORTE.			MICROSCOPIO SUR.		
	$p''\text{-}10^{v}$	$l''\text{-}10^{v}$	h''	$p'\text{-}10^{v}$	$l'\text{-}10^{v}$	h'	$p_1''\text{-}10^{v}$	$l_1''\text{-}10^{v}$	h_1''	$p_1'\text{-}10^{v}$	$l_1'\text{-}10^{v}$	h_1'
	v	v	D	v	v	D	v	v	D	v	v	D
1	+0,342	+1,896	0,981	+1,450	+0,191	1,002	+0,443	−0,852	1,000	+0,086	−0,415	1,008
2	−1,468	+0,013		−0,258	−1,505		+0,445	−0,861		+0,130	−0,341	
3	−1,491	−0,026		−0,222	−1,450		+0,685	−0,647		+0,420	+0,012	
4	−0,115	+1,377		+1,147	−0,072		+0,735	−0,594		+0,455	+0,032	
5	−0,115	+1,402		+1,090	−0,180		+0,317	−1,058		+0,025	−0,393	
6	−0,330	−1,137		+0,896	−0,329		+0,353	−1,033		+0,081	−0,357	
7	−0,347	+1,082		+0,908	−0,310		+0,844	−0,539		+0,626	+0,250	
8	−0,555	+0,893		+0,623	−0,561		+0,893	−0,465		+0,636	+0,214	
9	−0,568	+0,902		+0,575	−0,622		+0,693	−0,625		+0,295	−0,161	
10	−1,431	+0,132		−0,418	−1,688		+0,747	−0,564		+0,317	−0,141	
11	−1,549	+0,468	0,982	−1,204	−2,835	1,003	+0,426	−0,440	1,001	−0,606	−1,549	1,003
12	−0,242	+1,741		+0,213	−1,503		+0,425	−0,457		−0,604	−1,509	
13	−0,218	+1,770		+0,167	−1,526		+0,958	+0,066		−0,087	−0,924	
14	+0,497	+2,507		+0,909	−0,747		+0,976	+0,084		−0,057	−0,901	
15	+0,425	+2,346		+0,983	−0,673		+0,446	−0,532		−0,371	−1,164	
16	−1,563	+0,255		−0,749	−2,314		+0,448	−0,577		−0,345	−1,082	
17	−1,686	−0,060		−0,685	−2,062		+0,453	−0,874		+0,155	−0,329	
18	+0,327	+1,897		+1,359	+0,053		+0,480	−0,850		+0,202	−0,296	
19	+0,229	+1,808		+1,375	+0,085		+0,559	−0,762		+0,305	−0,183	
20	1,871	+0,269		−0,741	−2,017		+0,610	−0,712		+0,323	−0,152	
21	−1,842	−0,242		−0,796	−2,083		+0,501	−0,776		+0,084	−0,413	
22	−0,447	+1,181		+0,601	−0,669		+0,511	−0,760		+0,097	−0,403	
23	−0,569	+0,977		+0,610	−0,635		+1,165	−0,172		+0,937	+0,481	
24	1,635	−0,153		−0,374	−1,565		+1,187	−0,176		+0,973	+0,519	
25	−1,643	−0,144		−0,396	−1,560		+0,403	−0,981		+0,215	−0,172	
26	−1,777	−0,270		−0,434	−1,570		+0,409	−0,990		+0,232	−0,131	
27	−1,821	−0,387		−0,431	−1,570		+0,265	−1,178		+0,203	−0,159	
28	−0,883	+0,529		+0,552	−0,554		+0,268	−1,188		+0,211	−0,123	
29	−0,879	+0,569		+0,522	−0,571		+0,616	−0,869		+0,552	+0,284	
30	−0,206	+1,203	0,980	+1,193	+0,118	1,001	+0,640	−0,864	1,000	+0,577	+0,323	1,008
31	+0,424	+2,653	0,985	+0,417	−1,375	1,005	+1,629	+0,968	1,002	+0,168	−0,873	1,001
32	−0,323	+1,836		−0,223	−1,937		+1,640	+0,961		+0,215	−0,819	
33	−0,364	+1,748		−0,185	−1,902		+0,505	−0,272		−0,763	−1,733	
34	−1,010	+1,024		−0,679	−2,359		+0,480	−0,317		−0,765	−1,703	
35	−1,119	+0,848		−0,661	−2,249		+1,557	+0,650		+0,535	−0,221	
36	+0,707	+2,625		+1,284	−0,234		+1,573	+0,647		+0,573	−0,164	
37	+0,657	+2,505		+1,319	−0,164		+0,666	−0,409		−0,081	−0,701	
38	−0,787	+0,975		−0,030	−1,465		+0,649	−0,452		−0,055	−0,660	
39	−0,758	+1,043		−0,083	−1,509		+0,134	−0,925		−0,659	−1,291	
40	+0,124	+1,984		+0,674	−0,723		+0,182	−0,849		−0,671	−1,325	
41	+0,092	+1,950		+0,674	−0,745		+1,453	+0,470		+0,505	−0,174	
42	−0,504	+1,328		+0,125	−1,312		+1,466	+0,467		+0,531	−0,139	
43	−0,702	+1,148		−0,197	−1,532		+1,248	+0,246		+0,308	−0,365	
44	−1,035	+0,801		−0,415	−1,799		+1,274	+0,277		+0,385	−0,333	
45	−1,067	+0,757		−0,402	−1,810		+0,364	−0,651		−0,553	−1,218	
46	−1,010	+0,806		−0,381	−1,786		+0,383	−0,618		−0,556	−1,244	
47	−1,007	+0,856		−0,449	−1,835		+0,806	−0,157		−0,205	−0,848	
48	−0,510	+1,387		−0,006	−1,439		+0,830	−0,132		−0,209	−0,860	
49	−0,516	+1,355		+0,005	−1,455		+0,761	−0,205		−0,250	−0,949	
50	−0,427	+1,443	0,988	+0,072	−1,383	1,003	+0,777	−0,182	1,000	−0,246	−0,950	1,004

CUADRO E.

Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA.						REGLA EGIPCIA.					
	MICROSCOPIO NORTE.			MICROSCOPIO SUR.			MICROSCOPIO NORTE.			MICROSCOPIO SUR.		
	p''-10^v	l''-10^v	h''	p'-10^v	l'-10^v	h'	p_1''-10^v	l_1''-10^v	h_1''	p_1'-10^v	l_1'-10^v	h_1'
	v	v	D	v	v	D	v	v	D	v	v	D
51	−0,471	+1,745	0,981	−0,507	−2,379	1,004	+0,972	+0,374	1,003	−0,554	−1,639	1,002
52	−0,401	+1,777		−0,372	−2,169		+0,977	+0,368		−0,543	−1,635	
53	−0,421	+1,757		−0,404	−2,165		+1,424	+0,714		+0,040	−0,965	
54	+0,071	+2,199		+0,231	−1,488		+1,409	+0,685		+0,093	−0,934	
55	+0,014	+2,089		+0,259	−1,461		+0,549	−0,258		−0,688	−1,624	
56	−1,724	+0,314		−1,419	−3,086		+0,551	−0,263		−0,670	−1,594	
57	−1,756	+0,283		−1,445	−3,107		+0,259	−0,634		−0,801	−1,668	
58	+0,055	+2,074		+0,432	−1,200		+0,254	−0,629		−0,784	−1,638	
59	−0,006	+1,904		+0,433	−1,167		+1,366	+0,395		+0,387	−0,370	
60	−0,163	+1,766	0,975	+0,306	−1,278	1,006	+1,394	+0,440	0,995	+0,400	−0,383	1,006
61	+0,679	+3,300	0,978	−0,056	−2,261	1,006	+0,950	+0,673	1,007	−1,233	−2,641	1,011
62	−0,115	+2,430		−0,683	−2,783		+0,943	+0,637		−1,211	−2,601	
63	−0,164	+2,319		−0,650	−2,744		+1,869	+1,470		−0,066	−1,405	
64	−0,270	+2,118		−0,642	−2,651		+1,862	+1,441		−0,047	−1,359	
65	−0,372	+1,987		−0,648	−2,618		+2,156	+1,590		+0,430	−0,714	
66	+0,972	+3,275		+0,820	−1,063		+2,144	+1,569		+0,468	−0,672	
67	+0,712	+2,741		+0,873	−0,867		+0,701	−0,141		−0,590	−1,482	
68	−1,780	+0,269		−1,630	−3,349		+0,728	−0,094		−0,580	−1,500	
69	−1,811	+0,227		−1,682	−3,383		+0,985	+0,119		−0,307	−1,222	
70	+0,333	+2,392		+0,540	−1,097		+0,964	+0,137		−0,292	−1,176	
71	+0,216	+2,132		+0,590	−1,011		−0,180	−1,110		−1,194	−1,973	
72	−1,677	+0,171		−1,199	−2,741		−0,188	−1,142		−1,174	−1,954	
73	−1,661	+0,155		−1,277	−2,775		+1,040	+0,031		−0,040	−0,787	
74	−1,004	+0,934		−0,756	−2,329		+1,120	+0,118		−0,039	−0,845	
75	−1,010	+0,933		−0,772	−2,385		+0,652	−0,225		−0,582	−1,441	
76	−0,568	+1,418		−0,442	−2,046		+0,676	−0,198		−0,579	−1,475	
77	−0,552	+1,485		−0,498	−2,087		+1,054	+0,171		−0,385	−1,282	
78	+0,441	+2,518		+0,470	−1,159		+1,059	+0,168		−0,372	−1,290	
79	+0,403	+2,419		+0,504	−1,132		+0,357	−0,488		−0,950	−1,875	
80	−1,082	+0,922	0,981	−0,886	−2,547	1,001	+0,347	−0,496	1,007	−0,944	+1,862	1,001
81	−0,630	+1,732	0,991	−1,070	−3,065	1,009	+1,948	+1,480	1,006	+0,080	−1,199	1,002
82	−0,280	+2,024		−0,619	−2,565		+1,952	+1,476		+0,110	−1,165	
83	−0,315	+1,971		−0,644	−2,576		+1,410	+0,835		−0,415	−1,566	
84	+0,436	+2,676		+0,231	−1,625		+1,405	+0,809		−0,383	−1,512	
85	+0,371	+2,573		+0,269	−1,591		+2,090	+1,455		+0,489	−0,585	
86	+0,705	+2,851		+0,653	−1,136		+2,103	+1,452		+0,501	−0,566	
87	+0,641	+2,757		+0,624	−1,130		+0,947	+0,200		−0,487	−1,469	
88	−0,167	+1,858		+0,005	−1,679		+0,929	+0,172		−0,456	−1,415	
89	−0,238	+1,752		+0,036	−1,645		+1,884	+0,993		+0,715	−0,128	
90	+0,165	+2,077		+0,518	−1,064		+1,870	+0,968		+0,738	−0,080	
91	+0,087	+1,962		+0,406	−1,160		+0,939	−0,056		−0,150	−0,921	
92	+0,826	+2,711		+1,193	−0,369		+0,959	−0,038		−0,141	−0,907	
93	+0,786	+2,624		+1,212	−0,351		+0,364	−0,654		−0,653	−1,444	
94	−0,261	+1,550		+0,231	−1,307		+0,369	−0,643		−0,622	−1,414	
95	−0,309	+1,479		+0,201	−1,316		−0,066	−1,133		−1,049	−1,778	
96	+0,085	+1,849		+0,625	−0,817		−0,051	−1,125		−1,033	−1,754	
97	−0,018	+1,700		+0,669	−0,724		+1,111	−0,011		+0,327	−0,356	
98	+0,573	+2,266		+1,254	−0,129		+1,149	+0,013		+0,326	−0,344	
99	+0,521	+2,199		+1,224	−0,160		+1,344	+0,192		+0,503	−0,086	
100	+0,089	+1,764	0,987	+0,811	−0,528	1,001	+1,362	+0,182	1,000	+0,535	−0,055	1,001

CUADRO F.

Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA.						REGLA EGIPCIA.					
	MICROSCOPIO NORTE.			MICROSCOPIO SUR.			MICROSCOPIO NORTE.			MICROSCOPIO SUR.		
	$p''\cdot10^{v}$	$l''\cdot10^{v}$	h''	$p'\cdot10^{v}$	$l'\cdot10^{v}$	h'	$p_1''\cdot10^{v}$	$l_1''\cdot10^{v}$	h_1''	$p_1'\cdot10^{v}$	$l_1'\cdot10^{v}$	h_1'
	v	v	D	v	v	D	v	v	D	v	v	D
101	+0,306	+2,362	0,989	+0,075	1,801	1,006	+1,982	+1,390	1,094	+0,266	-0,849	1,008
102	+0,446	+2,646		+0,334	−1,490		+1,990	+1,403		+0,306	−0,818	
103	+0,389	+2,525		+0,378	−1,413		+1,328	+0,620		−0,114	−1,196	
104	+0,269	+2,314		+0,359	−1,395		+1,324	+0,588		−0,105	−1,141	
105	+0,194	+2,227		+0,336	−1,387		+1,933	+1,112		+0,633	−0,303	
106	+0,700	+2,679		+0,940	−0,706		+1,936	+1,098		+0,651	−0,262	
107	+0,608	+2,534		+0,982	−0,625		+2,318	+1,366		+1,261	+0,431	
108	−0,246	+1,629		+0,235	−1,321		+2,315	+1,365		+1,304	+0,473	
109	−0,287	+1,555		+0,204	−1,346		+0,795	−0,216		−0,195	−0,922	
110	−0,371	+1,450		+0,137	−1,394		+0,821	−0,203		−0,177	−0,893	
111	−0,400	+1,385		+0,106	−1,407		+1,318	+0,299		+0,313	−0,448	
112	−0,430	+1,359		+0,086	−1,419		+1,347	+0,332		+0,328	−0,448	
113	−0,481	+1,316		+0,044	−1,454		+1,352	+0,318		+0,320	−0,434	
114	−0,830	+0,939		−0,334	−1,766		+1,364	+0,338		+0,338	−0,409	
115	−0,841	+0,915		−0,325	−1,767		+1,883	+0,862		+0,914	+0,183	
116	−0,942	+0,819		−0,352	−1,776		+1,891	+0,866		+0,959	+0,219	
117	−0,973	+0,767		−0,392	−1,805		+1,287	+0,209		+0,335	−0,350	
118	−1,065	+0,679		−0,429	−1,818		+1,304	+0,215		+0,341	−0,334	
119	−1,144	+0,556		−0,381	−1,745		+1,714	+0,565		+1,010	+0,346	
120	−1,152	+0,491	0,991	−0,341	−1,649	1,004	+1,725	+0,560	1,000	+1,052	+0,404	1,000
121	−0,367	+1,655	0,989	−0,234	−1,911	1,004	+0,100	−0,649	1,010	−1,275	−2,323	1,004
122	−1,162	+0,851		−0,976	−2,665		+0,133	−0,620		−1,255	−2,288	
123	−1,204	+0,806		−1,004	−2,674		+1,843	+1,080		+0,472	−0,509	
124	−0,273	+1,706		+0,004	−1,637		+1,841	+1,076		+0,484	−0,479	
125	−0,321	+1,607		+0,044	−1,572		−0,678	−1,543		−1,891	−2,811	
126	−1,125	+0,795		−0,719	−2,321		−0,663	−1,525		−1,876	−2,797	
127	−1,148	+0,762		−0,767	−2,350		+1,112	+0,251		−0,115	−1,019	
128	+0,109	+2,029		+0,369	−1,218		+1,141	+0,271		−0,114	−0,990	
129	+0,151	+2,099		+0,335	−1,296		−0,689	−1,499		−2,060	−3,033	
130	+0,098	+2,105	0,984	+0,198	−1,454	1,008	−0,660	−1,480	1,004	−2,021	−3,025	1,006
131	+1,364	+3,762	0,985	+0,876	−1,123	1,014	+2,983	+2,573	1,000	+0,970	−0,397	1,005
132	+1,231	+3,620		+0,804	−1,189		+3,015	+2,594		+1,002	−0,348	
133	+1,211	+3,552		+0,852	−1,125		+2,403	+1,883		+0,582	−0,710	
134	−0,344	+1,923		−0,574	−2,509		+2,398	+1,882		+0,610	−0,668	
135	−0,342	+1,924		−0,631	−2,539		+3,020	+2,517		+1,132	−0,125	
136	−0,203	+2,137		−0,684	−2,509		+3,058	+2,537		+1,137	−0,121	
137	−0,196	+2,151		−0,601	−2,559		+0,273	−0,226		−1,641	−2,901	
138	−1,035	+1,322		−1,380	−3,316		+0,298	−0,212		−1,591	−2,886	
139	−1,053	+1,296		−1,409	−3,333		+1,848	+1,316		+0,003	−1,238	
140	+0,424	+2,729	0,986	+0,148	−1,766	1,008	+1,863	+1,326	1,006	+0,023	−1,209	1,003

Los cuadros **G**, **H** é **I**, encierran las cantidades

$$Q,\ M,\ rM \text{ y } Q+rM \quad \text{para la regla española;}$$
$$Q_1,\ M_1,\ r_1M_1 \text{ y } Q_1+r_1M_1 \quad \text{para la egipcia;}$$

notaciones cuya significacion es conocida en virtud de las ecuaciones (a).

De las experiencias hechas en 1856 con el aparato español, resultó para r el valor 0,905; y en la regla egipcia, segun los trabajos recientemente ejecutados en París, se ha obtenido el valor 0,918 para r_1.

CUADRO G.

Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA.				REGLA EGIPCIA.			
	Q	M	Mr	Q + Mr	Q_1	M_1	$M_1 r_1$	$Q_1 + M_1 r_1$
	D	D	D	D	D	D	D	D
1	−1,116	−2,784	−2,520	−3,636	+0,357	+0,791	+0,726	+1,083
2	−1,181	−2,676	−2,422	−3,603	+0,315	+0,831	+0,763	+1,078
3	−1,240	−2,667	−2,414	−3,654	+0,262	+0,897	+0,824	+1,086
4	−1,252	−2,684	−2,429	−3,681	+0,277	+0,848	+0,780	+1,057
5	−1,205	−2,760	−2,498	−3,703	+0,292	+0,954	+0,876	+1,168
6	−1,222	−2,701	−2,443	−3,665	+0,272	+0,945	+0,866	+1,138
7	−1,248	−2,619	−2,370	−3,618	+0,213	+1,004	+0,923	+1,136
8	−1,168	−2,607	−2,359	−3,527	+0,252	+0,933	+0,857	+1,109
9	−1,131	−2,642	−2,391	−3,522	+0,396	+0,859	+0,789	+1,185
10	−0,984	−2,805	−2,539	−3,523	+0,428	+0,851	+0,782	+1,210
11	−0,311	−3,673	−3,324	−3,635	+1,034	−0,079	−0,027	+1,007
12	−0,451	−3,664	−3,316	−3,767	+1,031	−0,025	−0,072	+0,959
13	−0,380	−3,645	−3,299	−3,679	+1,045	+0,052	+0,047	+1,092
14	−0,424	−3,630	−3,286	−3,710	+1,033	+0,045	+0,041	+1,074
15	−0,569	−3,514	−3,208	−3,777	+0,818	+0,183	+0,169	+0,987
16	−0,791	−3,359	−3,040	−3,831	+0,794	+0,296	+0,172	+0,966
17	−0,966	−2,975	−2,693	−3,659	+0,308	+0,842	+0,774	+1,082
18	−1,046	−2,853	−2,582	−3,622	+0,278	+0,831	+0,764	+1,042
19	−1,154	−2,840	−2,571	−3,725	+0,255	+0,834	+0,766	+1,021
20	−1,062	−2,819	−2,552	−3,614	+0,286	+0,846	+0,777	+1,063
21	−1,010	−2,857	−2,586	−3,596	+0,417	+0,777	+0,714	+1,131
22	−1,039	−2,867	−2,595	−3,634	+0,414	+0,768	+0,706	+1,120
23	−1,166	−2,759	−2,497	−3,663	+0,221	+0,878	+0,807	+1,028
24	−1,228	−2,644	−2,393	−3,621	+0,197	+0,896	+0,823	+1,020
25	−1,214	−2,630	−2,380	−3,594	+0,186	+0,994	+0,913	+1,099
26	−1,308	−2,613	−2,365	−3,673	+0,165	+1,033	+0,949	+1,114
27	−1,355	−2,546	−2,309	−3,664	+0,060	+1,078	+0,990	+1,050
28	−1,418	−2,490	−2,254	−3,672	+0,055	+1,119	+1,028	+1,083
29	−1,384	−2,513	−2,275	−3,659	+0,060	+1,215	+1,116	+1,176
30	−1,395	−2,456	−2,223	−3,618	+0,061	+1,250	+1,149	+1,210
31	−0,001	−4,001	−3,622	−3,622	+1,464	−0,383	−0,351	+1,113
32	−0,094	−3,818	−3,483	−3,577	+1,428	−0,345	−0,311	+1,117
33	−0,173	−3,814	−3,452	−3,625	+1,269	−0,214	−0,196	+1,073
34	−0,316	−3,695	−3,344	−3,660	+1,246	−0,142	−0,130	+1,116
35	−0,439	−3,535	−3,200	−3,639	+1,025	+0,153	+0,140	+1,165
36	−0,593	−3,414	−3,090	−3,683	+1,003	+0,191	+0,175	+1,178
37	−0,678	−3,309	−2,995	−3,673	+0,748	+0,455	+0,418	+1,166
38	−0,745	−3,177	−2,876	−3,621	+0,705	+0,497	+0,457	+1,162
39	−0,653	−3,207	−2,903	−3,556	+0,793	+0,428	+0,393	+1,186
40	−0,555	−3,238	−2,931	−3,486	+0,853	+0,378	+0,339	+1,192
41	−0,584	−3,258	−2,949	−3,533	+0,916	+0,301	+0,276	+1,212
42	−0,623	−3,251	−2,943	−3,566	+0,933	+0,326	+0,299	+1,232
43	−0,497	−3,167	−2,866	−3,363	+0,939	+0,327	+0,300	+1,239
44	−0,607	−3,203	−2,899	−3,506	+0,888	+0,257	+0,236	+1,124
45	−0,652	−3,215	−2,910	−3,562	+0,919	+0,347	+0,340	+1,159
46	−0,626	−3,214	−2,909	−3,535	+0,941	+0,310	+0,284	+1,295
47	−0,545	−3,231	−2,926	−3,471	+1,012	+0,318	+0,291	+1,304
48	−0,498	−3,312	−2,997	−3,495	+1,040	+0,309	+0,285	+1,325
49	−0,515	−3,313	−2,998	−3,513	+1,012	+0,264	+0,242	+1,254
50	−0,494	−3,307	−2,994	−3,488	+1,024	+0,252	+0,231	+1,255

CUADRO III.

Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA.				REGLA EGIPCIA.			
	Q	M	Mr	Q + Mr	Q_t	M_t	$M_t r_t$	$Q_t + M_t r_t$
	D	D	D	D	D	D	D	D
51	+0,047	−4,054	−3,669	−3,622	+1,520	−0,487	−0,447	+1,073
52	-0,020	−3,943	3,566	−3,586	+1,524	−0,483	−0,443	+1,081
53	-0,008	−3,906	−3,535	−3,543	+1,388	−0,295	−0,270	+1,118
54	−0,162	−3,802	-3,441	-3,603	+1,320	−0,303	−0,278	+1,042
55	-0,246	−3,766	−3,408	-3,654	+1,235	−0,135	−0,123	+1,112
56	−0,255	−3,662	−3,318	−3,573	+1,222	−0,119	−0,109	+1,113
57	−0,261	-3,659	−3,311	3,572	+1,064	−0,017	+0,015	+1,079
58	0,380	−3,618	−3,274	-3,654	+1,042	+0,022	+0,020	+1,062
59	−0,441	−3,471	−3,141	−3,582	+0,970	+0,205	+0,188	+1,158
60	−0,468	-3,474	−3,144	−3,612	+0,985	+0,162	+0,118	+1,103
61	+0,720	−4,782	−4,328	−3,608	+2,202	−1,149	−1,056	+1,146
62	+0,574	−4,602	−4,165	−3,591	+2,173	−1,101	−1,012	+1,161
63	+0,493	−4,535	−4,103	−3,610	+1,948	−0,952	−0,873	+1,075
64	+0,382	−4,359	−3,945	−3,563	+1,922	−0,903	−0,828	+1,094
65	+0,288	−4,289	−3,880	−3,592	+1,737	−0,586	−0,537	+1,200
66	+0,126	−4,146	−3,752	3,626	+1,687	−0,572	-0,525	+1,162
67	−0,183	−3,736	−3,304	−3,487	+1,302	−0,024	−0,020	+1,282
68	−0,102	-3,734	−3,379	−3,481	+1,319	−0,102	−0,093	+1,226
69	−0,078	-3,703	−3,351	-3,429	+1,302	−0,053	−0,048	+1,252
70	−0,199	−3,640	−3,295	−3,494	+1,266	−0,061	−0,056	+1,210
71	-0,388	−3,480	−3,149	−3,537	+1,014	+0,156	+0,143	+1,157
72	−0,446	-3,358	−3,038	−3,484	+0,986	+0,180	+0,165	+1,151
73	−0,350	-3,280	−2,968	−3,318	+1,087	+0,268	+0,245	+1,332
74	-0,227	-3,474	−3,143	−3,370	+1,186	+0,221	+0,202	+1,388
75	−0,217	-3,519	−3,184	−3,401	+1,238	+0,020	+0,018	+1,256
76	−0,115	−3,553	−3,215	−3,330	+1,259	+0,012	+0,011	+1,270
77	−0,043	−3,589	−3,248	−3,291	+1,445	+0,026	+0,023	+1,468
78	-0,038	3,666	−3,317	−3,355	+1,438	−0,022	−0,020	+1,458
79	-0,095	-3,603	−3,260	−3,351	+1,310	−0,076	−0,070	+1,380
80	−0,171	-3,627	−3,189	−3,463	+1,294	−0,071	−0,065	+1,359
81	+0,455	−4,355	−3,946	−3,491	+1,880	−0,810	−0,743	+1,137
82	+0,347	−4,247	−3,843	−3,496	+1,854	−0,798	−0,732	+1,122
83	+0,338	-4,214	−3,814	−3,476	+1,834	−0,575	−0,527	+1,307
84	+0,196	-4,096	−3,707	−3,511	+1,797	−0,532	−0,488	+1,309
85	+0,097	−4,058	−3,672	−3,575	+1,623	−0,427	−0,392	+1,231
86	+0,010	−3,931	−3,557	−3,547	+1,614	−0,413	−0,379	+1,235
87	+0,006	−3,866	−3,499	−3,493	+1,440	−0,233	−0,214	+1,226
88	−0,171	−3,706	−3,355	−3,526	+1,392	−0,199	−0,184	+1,208
89	−0,272	-3,668	−3,319	−3,591	+1,169	+0,042	+0,038	+1,201
90	−0,359	−3,491	−3,159	−3,518	+1,142	+0,088	+0,080	+1,222
91	-0,320	−3,418	−3,093	−3,413	+1,089	+0,223	+0,204	+1,293
92	-0,379	−3,431	−3,008	−3,387	+1,100	+0,230	+0,211	+1,311
93	−0,437	−3,278	−2,967	−3,404	+1,018	+0,227	+0,208	+1,226
94	−0,499	−3,337	−3,020	−3,519	+0,992	+0,220	+0,202	+1,194
95	−0,507	−3,284	−2,972	−3,479	+0,984	+0,337	+0,309	+1,293
96	−0,542	−3,185	−2,882	−3,424	+0,983	+0,352	+0,323	+1,306
97	−0,679	−3,074	−2,782	−3,461	+0,787	+0,420	+0,385	+1,172
98	−0,689	-3,055	−2,765	−3,454	+0,823	+0,466	+0,427	+1,250
99	−0,711	−3,042	−2,753	−3,464	+0,810	+0,562	+0,515	+1,355
100	−0,724	−2,994	−2,710	−3,434	+0,836	+0,589	+0,540	+1,376

CUADRO I.

Comparacion.	REGLA ESPAÑOLA.				REGLA EGIPCIA.			
	Q	M	Mr	Q+Mr	Q_1	M_1	M_1r_1	$Q_1+M_1r_1$
	D	D	D	D	D	D	D	D
101	+0,228	−4,118	−3,726	−3,498	+1,722	−0,530	−0,486	+1,236
102	+0,105	−4,011	−3,630	−3,525	+1,690	−0,544	−0,499	+1,191
103	+0,005	−3,913	−3,541	−3,536	+1,448	−0,380	−0,348	+1,100
104	−0,095	−3,787	−3,427	−3,522	+1,435	−0,305	−0,280	+1,155
105	−0,146	−3,744	−3,388	−3,534	+1,303	−0,118	−0,108	+1,195
106	−0,254	−3,614	−3,271	−3,525	+1,288	−0,078	−0,071	+1,217
107	−0,387	−3,522	−3,187	−3,574	+1,056	+0,119	+0,109	+1,165
108	−0,479	−3,419	−3,094	−3,573	+1,010	+0,217	+0,199	+1,209
109	−0,489	−3,381	−3,060	−3,549	+0,994	+0,282	+0,259	+1,253
110	−0,505	−3,341	−3,024	−3,529	+1,002	+0,306	+0,281	+1,283
111	−0,503	−3,289	−2,977	−3,480	+1,003	+0,256	+0,235	+1,238
112	−0,512	−3,284	−2,972	−3,484	+1,019	+0,239	+0,219	+1,238
113	−0,522	−3,286	−2,973	−3,495	+1,032	+0,280	+0,257	+1,289
114	−0,488	−3,192	−2,889	−3,377	+1,026	+0,279	+0,256	+1,282
115	−0,508	−3,189	−2,886	−3,394	+0,969	+0,290	+0,266	+1,235
116	−0,581	−3,176	−2,874	−3,455	+0,932	+0,285	+0,261	+1,193
117	−0,571	−3,143	−2,844	−3,415	+0,952	+0,393	+0,360	+1,312
118	−0,625	−3,123	−2,826	−3,451	+0,963	+0,414	+0,380	+1,343
119	−0,751	−3,054	−2,764	−3,515	+0,704	+0,485	+0,445	+1,149
120	−0,800	−2,943	−2,663	−3,463	+0,673	+0,519	+0,476	+1,149
121	−0,127	−3,671	−3,373	−3,500	+1,382	−0,299	−0,275	+1,107
122	−0,164	−3,683	−3,384	−3,548	+1,395	−0,280	−0,257	+1,138
123	−0,177	−3,662	−3,365	−3,542	+1,382	−0,216	−0,198	+1,184
124	−0,273	−3,594	−3,303	−3,576	+1,368	−0,196	−0,180	+1,188
125	−0,322	−3,480	−3,198	−3,520	+1,217	−0,055	−0,050	+1,167
126	−0,385	−3,504	−3,220	−3,605	+1,217	−0,059	−0,054	+1,163
127	−0,360	−3,476	−3,194	−3,554	+1,235	−0,042	−0,038	+1,197
128	−0,263	−3,489	−3,266	−3,529	+1,263	−0,005	−0,004	+1,259
129	−0,188	−3,561	−3,272	−3,460	+1,376	−0,163	−0,150	+1,226
130	−0,102	−3,642	−3,347	−3,449	+1,366	−0,174	−0,160	+1,206
131	+0,459	−4,382	−4,027	−3,568	+2,018	−0,961	−0,883	+1,135
132	+0,400	−4,368	−4,006	−3,606	+2,018	−0,933	−0,857	+1,161
133	+0,332	−4,304	−3,956	−3,624	+1,826	−0,775	−0,712	+1,114
134	+0,241	−4,189	−3,850	−3,609	+1,793	−0,765	−0,703	+1,090
135	+0,301	−4,161	−3,824	−3,523	+1,893	−0,759	−0,698	+1,195
136	+0,390	−4,251	−3,906	−3,516	+1,926	−0,739	−0,679	+1,247
137	+0,415	−4,291	−3,943	−3,528	+1,921	−0,764	−0,702	+1,219
138	+0,375	−4,289	−3,941	−3,566	+1,896	−0,788	−0,724	+1,172
139	+0,386	−4,260	−3,915	−3,529	+1,856	−0,713	−0,655	+1,201
140	+0,269	−4,204	−3,863	−3,594	+1,845	−0,699	−0,642	+1,203

En la formacion de Q y Q_1 no se han tenido en cuenta las correcciones que provienen de las variaciones de inclinacion de las reglas y de los microscopios, en razon á la pequeñez de unas y otras, como podrá verse por el cuadro J. El promedio de las variaciones en los microscopios produce tan solo un error de $0^{mm},005$; y las relativas á las reglas, no tienen ninguna influencia sensible.

CUADRO J.

INCLINACIONES DE LAS REGLAS.

Fecha.	REGLA ESPAÑOLA.							REGLA EGIPCIA.				
	ANTES DE LAS COMPARACIONES.		DESPUES DE LAS COMPARACIONES.		II′ − II.	I′ − I.	I′ − I. En arco.	ANTES. — I_1 Inclinacion.	DESPUES. — I_1' Inclinacion.	$II_1' - II_1$	$I_1' - I_1$	$I_1' - I_1$ En arco.
	II Hora.	I Inclinacion.	II′ Hora.	I′ Inclinacion.								
	h m	P	h m	P	h m	P	″	P	P	h m	P	″
♃ 13	11 18	+0,10	4 30	+0,50	5 12	+0,40	+4,6	−0,20	+0,47	5 12	+0,67	+7,2
♀ 14	9 13	+0,40	3 24	+0,27	6 11	−0,13	−1,5	+0,55	+0,57	6 11	+0,02	+0,2
♄ 15	9 36	+0,27	3 32	−0,30	5 56	−0,03	−0,3	+0,07	−0,30	5 56	−0,23	−2,5
☉ 16	9 20	+0,35	2 25	+0,10	5 5	−0,25	−2,8	+0,10	+0,10	5 5	0,00	0,0
☾ 17	8 46	+0,10	3 9	0,00	6 23	−0,10	−1,1	+0,22	−0,27	6 23	−0,49	−5,2
♂ 18	9 18	+0,35	2 56	+0,50	5 38	+0,15	+1,7	+1,15	+1,45	5 38	+0,30	+3,2
☿ 19	9 27	+0,35	3 2	+0,35	5 35	0,00	0,0	+1,00	+1,25	5 35	+0,25	+2,7
♃ 20	11 27	+0,37	3 3	+0,42	3 36	+0,05	+0,6	+1,35	+0,80	3 36	−0,55	−5,9
♀ 21	9 38	+0,57	2 4	+0,42	4 26	−0,25	−2,8	+1,07	+0,87	4 26	−0,20	−2,1

INCLINACIONES DE LOS MICROSCOPIOS.

Fecha.	MICROSCOPIO NORTE.							MICROSCOPIO SUR.				
	ANTES DE LAS COMPARACIONES.		DESPUES DE LAS COMPARACIONES.		h′ − h	i′ − i.	i′ − i En arco.	ANTES. — i_1 Inclinacion.	DESPUES. — i_1' Inclinacion.	$h_1' - h_1$	$i_1' - i_1$	$i_1' - i_1$ En arco.
	h Hora.	i Inclinacion.	h′ Hora.	i′ Inclinacion.								
	h m	P	h m	P	h m	P	″	P	P	h m	P	″
♃ 13	12 30	+1,00	4 37	+0,32	4 7	−0,68	−9,5	−1,15	−0,62	4 7	+0,53	+7,4
♀ 14	9 28	−0,20	3 36	+0,20	6 8	+0,40	+5,6	−0,55	−0,47	6 8	+0,08	+1,1
♄ 15	9 49	+0,17	3 44	−0,02	5 55	−0,19	−2,7	−0,82	−0,52	5 55	+0,30	+4,2
☉ 16	9 27	+0,05	2 30	−0,05	5 3	−0,10	−1,4	−0,55	−0,40	5 3	+0,15	+2,1
☾ 17	9 10	+0,02	4 13	−0,10	7 3	−0,12	−1,7	−0,50	−0,37	7 3	+0,13	+1,8
♂ 18	9 24	−0,12	3 7	−0,42	5 43	−0,30	−4,2	−0,42	−0,30	5 43	+0,12	+1,7
☿ 19	9 31	−0,25	3 9	−0,20	5 37	+0,05	+0,7	−0,30	−0,47	5 37	−0,17	−2,4
♃ 20	11 34	−0,25	3 10	−0,17	3 36	−0,08	−1,1	−0,30	−0,40	3 36	−0,10	−1,4
♀ 21	9 48	−0,35	2 46	−0,50	4 58	−0,15	−2,1	−0,35	−0,30	4 58	+0,05	+0,7

Por medio de los cuadros G, H é I, se han formado los diferentes valores de x con arreglo á la ecuacion (3).

En este cálculo se han despreciado los términos de segundo órden, porque habiendo formado la suma de estos términos para la comparacion núm. 28, que es aquella en que el valor de Q es más considerable, resulta:

$$\frac{14{,}315}{(38975)^2}$$

cantidad completamente despreciable.

En el cuadro L se hallan los 140 valores de x que han proporcionado las comparaciones de las dos reglas.

CUADRO L.

Comparacion.	x	Comparacion.	x	Comparacion.	x	Comparacion.	x
	D		D		D		D
1	—4,719	41	—4,745	81	—4,628	121	—4,607
2	—4,681	42	—4,798	82	—4,618	122	—4,686
3	—4,740	43	—4,602	83	—4,780	123	—4,726
4	—4,738	44	—4,630	84	—4,816	124	—4,764
5	—4,871	45	—4,821	85	—4,806	125	—4,687
6	—4,803	46	—4,760	86	—4,752	126	—4,768
7	—4,754	47	—4,775	87	—4,719	127	—4,751
8	—4,636	48	—4,820	88	—4,734	128	—4,788
9	—4,707	49	—4,772	89	—4,798	129	—4,685
10	—4,733	50	—4,743	90	—4,740	130	—4,655
11	—4,642	51	—4,695	91	—4,706	131	—4,703
12	—4,726	52	—4,667	92	—4,698	132	—4,767
13	—4,771	53	—4,661	93	—4,630	133	—4,738
14	—4,784	54	—4,645	94	—4,713	134	—4,699
15	—4,764	55	—4,766	95	—4,772	135	—4,718
16	—4,797	56	—4,686	96	—4,730	136	—4,763
17	—4,741	57	—4,651	97	—4,638	137	—4,747
18	—4,664	58	—4,716	98	—4,701	138	—4,738
19	—4,746	59	—4,740	99	—4,819	139	—4,730
20	—4,677	60	—4,615	100	—4,810	140	—4,797
21	—4,727	61	—4,754	101	—4,734		
22	—4,754	62	—4,752	102	—4,716		
23	—4,691	63	—4,685	103	—4,636		
24	—4,641	64	—4,657	104	—4,677		
25	—4,697	65	—4,792	105	—4,729		
26	—4,786	66	—4,788	106	—4,742		
27	—4,714	67	—4,813	107	—4,739		
28	—4,754	68	—4,707	108	—4,782		
29	—4,834	69	—4,685	109	—4,802		
30	—4,827	70	—4,704	110	—4,812		
31	—4,735	71	—4,694	111	—4,718		
32	—4,694	72	—4,635	112	—4,722		
33	—4,698	73	—4,650	113	—4,784		
34	—4,776	74	—4,758	114	—4,659		
35	—4,804	75	—4,657	115	—4,629		
36	—4,861	76	—4,600	116	—4,648		
37	—4,839	77	—4,728	117	—4,735		
38	—4,78?	78	—4,813	118	—4,775		
39	—4,742	79	—4,731	119	—4,662		
40	—4,678	80	—4,822	120	—4,612		

PROMEDIOS DE LAS SÉRIES.

SÉRIES.	D
I.	—4,7382
II.	—4,7312
III.	—4,7425
IV.	—4,7610
V.	—4,7466
VI.	—4,6842
VII.	—4,7337
VIII.	—4,7088
IX.	—4,7391
X.	—4,7217
XI.	—4,7369
XII.	—4,6944
XIII.	—4,7117
XIV.	—4,7400

Promedio general $\overset{D}{-4,72785}$.

Introduciendo el valor

$$N = 38975,$$

y el promedio anterior — 4,7278 en la fórmula (4), se obtiene:

$$\frac{R_t}{R} = 1 - 0,000121305 = 0,999878695.$$

de donde, sustituyendo el valor

$$R = 3898^{mm},5112,$$

hallado en la comparacion de la regla española con la de Borda núm. 1, resulta:

$$R_t = 3898^{mm},5112 \times 0,999878695 = 3898^{mm},0384.$$

En el cuadro ❶ se han reunido todos los errores ó diferencias Δ, de los 140 valores de x á su promedio general.

CUADRO ❶.

Comparacion.	Δ D	Comparacion.	Δ D	Comparacion.	Δ D	Comparacion.	Δ D
1	+0,009	41	—0,017	81	+0,100	121	+0,121
2	+0,047	42	—0,070	82	+0,110	122	+0,042
3	—0,012	43	+0,126	83	—0,052	123	+0,002
4	—0,010	44	+0,098	84	—0,088	124	—0,036
5	—0,143	45	—0,093	85	—0,078	125	+0,041
6	—0,075	46	—0,032	86	—0,024	126	—0,040
7	—0,026	47	—0,047	87	+0,009	127	—0,023
8	+0,092	48	—0,092	88	—0,006	128	—0,060
9	+0,021	49	—0,044	89	—0,070	129	+0,043
10	—0,005	50	—0,015	90	—0,012	130	+0,073
11	+0,086	51	+0,033	91	+0,022	131	+0,025
12	+0,002	52	+0,061	92	+0,030	132	—0,039
13	—0,043	53	+0,067	93	+0,098	133	—0,010
14	—0,056	54	+0,083	94	+0,015	134	+0,029
15	—0,036	55	—0,038	95	—0,044	135	+0,010
16	—0,069	56	+0,042	96	—0,002	136	—0,035
17	—0,013	57	+0,077	97	+0,090	137	—0,019
18	+0,064	58	+0,012	98	+0,027	138	—0,010
19	—0,018	59	—0,012	99	—0,091	139	—0,002
20	+0,051	60	+0,113	100	—0,082	140	—0,069
21	+0,001	61	—0,026	101	—0,006		
22	—0,026	62	—0,024	102	+0,012		
23	+0,037	63	+0,043	103	+0,092		
24	+0,087	64	+0,071	104	+0,051		
25	+0,031	65	—0,064	105	—0,001		
26	—0,058	66	—0,060	106	—0,014		
27	+0,014	67	—0,085	107	—0,011		
28	—0,026	68	+0,021	108	—0,054		
29	—0,106	69	+0,043	109	—0,074		
30	—0,099	70	+0,024	110	—0,084		
31	—0,007	71	+0,034	111	+0,010		
32	+0,034	72	+0,093	112	+0,006		
33	+0,030	73	+0,078	113	—0,056		
34	—0,048	74	—0,030	114	+0,069		
35	—0,076	75	+0,071	115	+0,099		
36	—0,133	76	+0,128	116	+0,080		
37	—0,111	77	0,000	117	—0,007		
38	—0,055	78	—0,085	118	—0,047		
39	—0,014	79	—0,003	119	+0,066		
40	+0,050	80	—0,094	120	+0,116		

DIFERENCIAS PARA LAS CATORCE SÉRIES.

SÉRIES.	D
I.....	—0,0104
II.....	—0,0034
III....	—0,0147
IV....	—0,0332
V.....	—0,0188
VI....	+0,0436
VII...	—0,0059
VIII...	+0,0190
IX....	—0,0113
X.....	+0,0061
XI....	—0,0091
XII...	+0,0334
XIII...	+0,0161
XIV...	—0,0122

Aplicando á las cantidades anteriores el método de los mínimos cuadrados, se deduce de ellas el error medio de una comparacion:

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{0{,}5127460}{140-1}} = \pm 0{,}0607.$$

y el error probable:

$$E = 0{,}6745\,\varepsilon = \pm 0{,}0409.$$

Si se opera del mismo modo con los promedios de las séries de diez comparaciones, se halla que el error medio de una série es:

$$\varepsilon' = \pm\sqrt{\frac{0{,}00585957}{14-1}} = \pm 0{,}0212$$

y el error probable:

$$E' = \pm 0{,}0143.$$

El error medio de x será:

$$\varepsilon_x = \pm\frac{0{,}0607}{\sqrt{140}} = \pm 0{,}0051$$

y su error probable:

$$E_x = \pm 0{,}0034.$$

El error probable de R es $\pm$ 0,0100 (*), al cual corresponde un error medio:

$$\varepsilon_R = \pm 0{,}0148$$

(*) *Experiencias*, etc., cap. X.

y de consiguiente la ecuacion (4) da para el error medio de R_1.

$$\varepsilon_{R_1} = \pm\sqrt{\left((1+\frac{x}{N})\cdot \varepsilon^R\right)^2+\left(\frac{R}{N}\cdot \varepsilon x\right)^2} = \pm 0{,}0157,$$

siendo el error probable de R_1:

$$E_{R_1} = \pm 0{,}0106.$$

La unidad á que se refieren los valores anteriores es el *decimilímetro*.

ÍNDICE.

	Páginas.
Introduccion	47
Descripcion del comparador	49
Marcha de la operacion	53
Observaciones	56
Fórmulas relativas á la comparacion	149
Cálculos numéricos	151

ÍNDICE

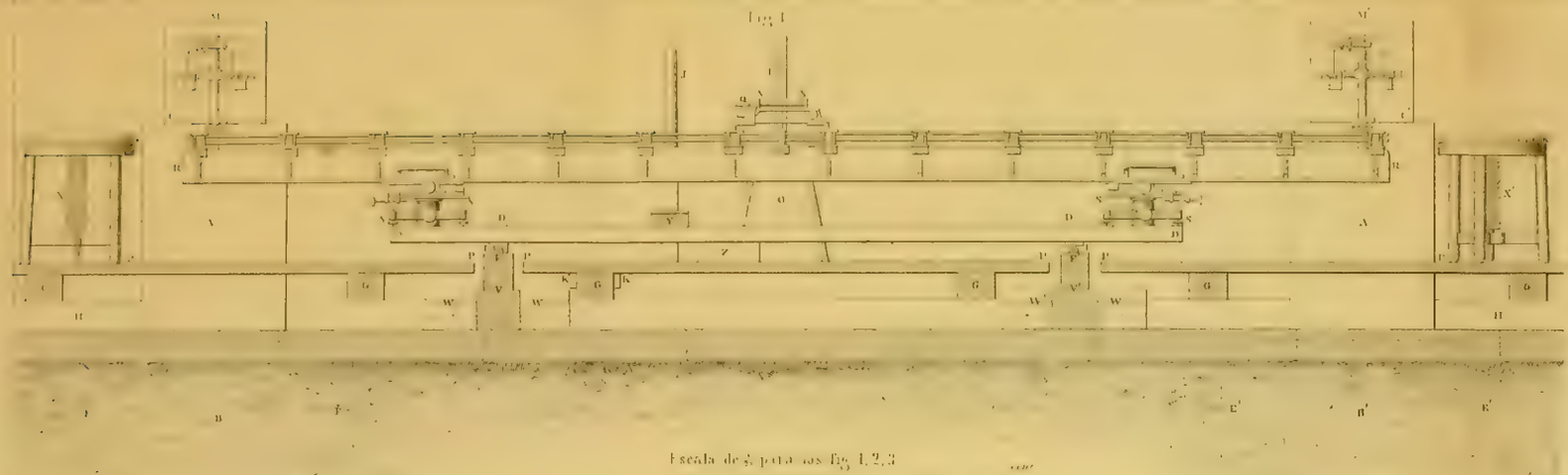
de las materias contenidas en esta segunda parte del tomo 2.° de Memorias.

Discurso sobre el origen y progresos de los instrumentos de astronomía y geodésia, leido por el Sr. *D. Carlos Ibañez é Ibañez* en el acto de su recepcion de Académico numerario, el dia 8 de marzo de 1863. 3

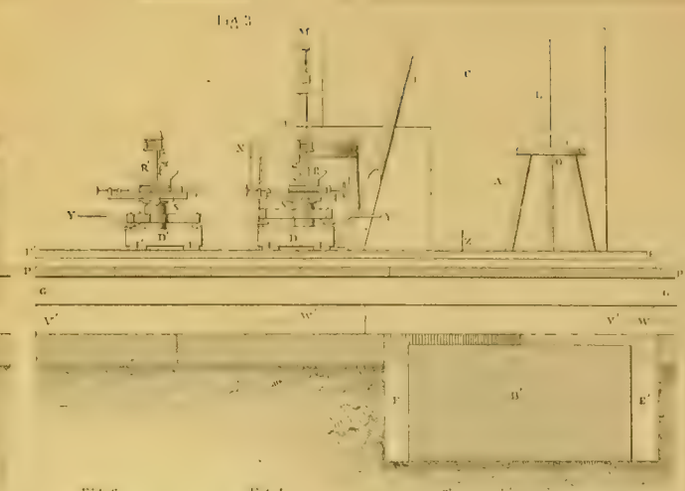
Contestacion al discurso anterior por el Sr. *D. Antonio Aguilar y Vela*, Académico numerario. 31

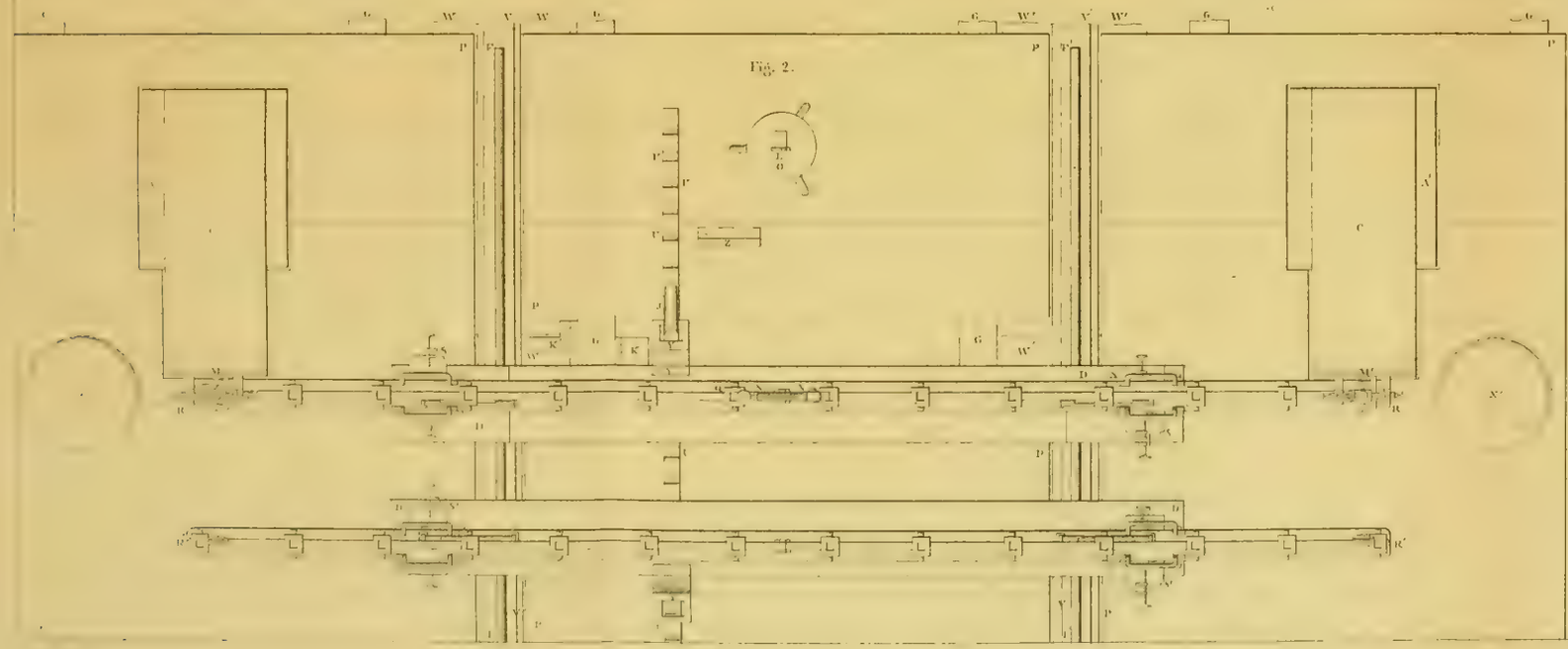
Comparacion de la regla geodésica perteneciente al Gobierno de S. A. el Virey de Egipto, con la que sirvió para la medicion de la base central del mapa de España, por *M. Ismail Effendi*, Astrónomo egipcio, y *D. Carlos Ibañez é Ibañez*, Académico numerario. 47

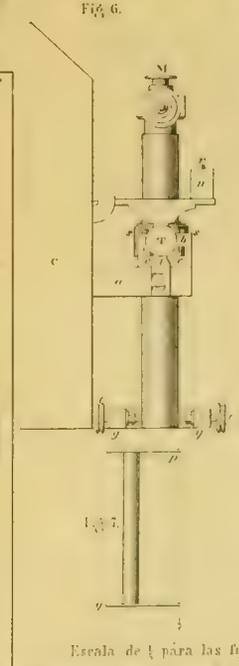
COMPARACION DE LA REGLA GEODÉSICA EGÍPCIA CON LA ESPAÑOLA.



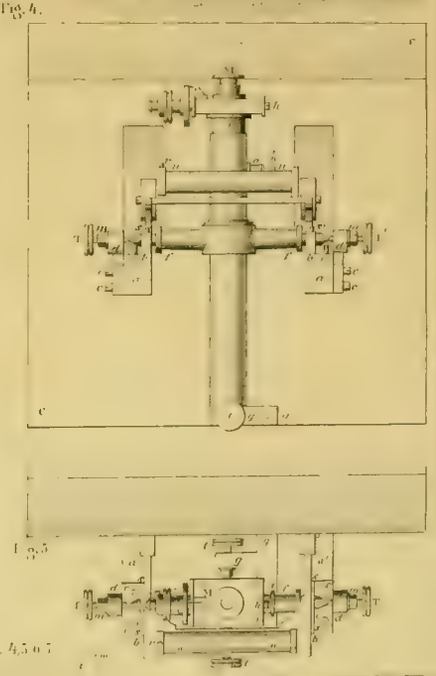
Escala de $\frac{1}{5}$ para las figs. 1, 2, 3







Escala de $\frac{1}{2}$ para las figs. 4, 5 o 7



3 2044 093 250 660